

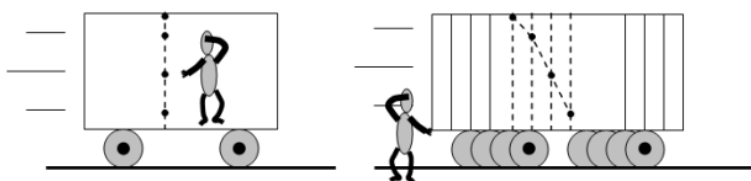
M1 - Description et paramétrage du mouvement d'un point

Table des matières

1	Référentiel d'étude d'un mouvement	1
2	Vecteur position, déplacement, vitesse et accélération	2
2.1	Vecteur position	2
2.2	Vecteur déplacement	3
2.3	Vecteur déplacement élémentaire	3
2.4	Vecteur vitesse	4
2.5	Vecteur accélération	4
3	Coordonnées cartésiennes	5
3.1	Repérage d'un point et vecteur position	5
3.2	Vecteur vitesse et vecteur accélération	6
4	Coordonnées cylindriques	7
4.1	Repérage d'un point - Vecteur position	7
4.2	Relations entre coordonnées cylindriques et cartésiennes	8
4.3	Vecteur vitesse et vecteur accélération	9
5	Mouvement circulaire	11
5.1	Mouvement circulaire uniforme	12
5.2	Mouvement circulaire non uniforme	12
6	Interprétation de l'accélération : repère de Frenet	13
6.1	Signification physique des composantes	13
7	Coordonnées sphériques	14
7.1	Repérage d'un point - Vecteur position	14
7.2	Coordonnées géographiques	16
7.3	Relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes	16

1 Référentiel d'étude d'un mouvement

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. Suivant la position de l'observateur par rapport à l'objet en mouvement, ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Ainsi dans un train qui se déplace en ligne droite, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne, alors que la personne qui est sur le quai et observe la même scène conclut que le mouvement n'est pas rectiligne. **Le mouvement d'un point est donc relatif à un observateur fixe dans un référentiel d'étude.** Pour décrire un mouvement, il faut donc préciser l'observateur ou encore le référentiel.



Définition d'un référentiel

Un **référentiel** est l'ensemble d'un repère spatial (origine plus base vectorielle) lié à un solide de référence et d'une chronologie dans ce repère (horloge).

Peut-être considéré comme **solide**, tout système dont les distances mutuelles entre les éléments restent invariables au cours du temps.

Dans les exemples précédents on peut définir un référentiel « *train* » (dont le solide de référence est le train) ou un référentiel « *terrestre* » (dont le solide de référence est un objet fixe posé sur le sol).

Définition d'un repère orthonormé

Un repère est l'association d'une **origine** O et d'une **base vectorielle orthonormée directe** notée par exemple $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Le triplet $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base vectorielle si $\forall \vec{V}, \exists (\alpha, \beta, \gamma)$ réels tel que $\vec{V} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3$.

La base vectorielle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **orthonormée** (voir un exemple sur la figure 2) si

— les vecteurs de la base sont perpendiculaires deux à deux :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0$$

— et les vecteurs de la base ont une norme égale à l'unité :

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$$

La base vectorielle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est **directe** (voir un exemple sur la figure 2) si

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3$$



2 Vecteur position, déplacement, vitesse et accélération

Soit O un point fixe du référentiel d'étude noté $\mathcal{R}$, servant d'origine du repère, et M un point matériel mobile.

2.1 Vecteur position

Définition du vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur position**. Son évolution temporelle $\overrightarrow{OM}(t)$ est donnée par les **équations horaires du mouvement**.

La courbe décrite par le point M au cours du mouvement est la **trajectoire** du point M .

2.2 Vecteur déplacement

Le mobile M est situé au point $M(t)$ à l'instant t et au point $M(t + \Delta t)$ à l'instant $t + \Delta t$. Entre ces deux instants, la variation du vecteur position est donc

$$\Delta \overrightarrow{OM} = \underbrace{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t)}_{\text{valeur finale}} - \underbrace{\overrightarrow{OM}(t)}_{\text{valeur initiale}} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

Définition du vecteur déplacement

Entre t et $t + \Delta t$, le point M se déplace de

$$\Delta \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

appelé **vecteur déplacement**.

2.3 Vecteur déplacement élémentaire

Lorsque la durée Δt devient très faible, on la note dt et on parle de durée élémentaire ou infinitésimale. Pendant cette durée dt , le mobile M passe du point $M(t)$ au point $M(t + dt)$ comme sur la figure 1

Définition du vecteur déplacement élémentaire

Entre t et $t + dt$, le point M se déplace de $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$

appelé **vecteur déplacement élémentaire**.

De par sa définition, le déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire.

$$\text{Iq : } d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$$

2.4 Vecteur vitesse

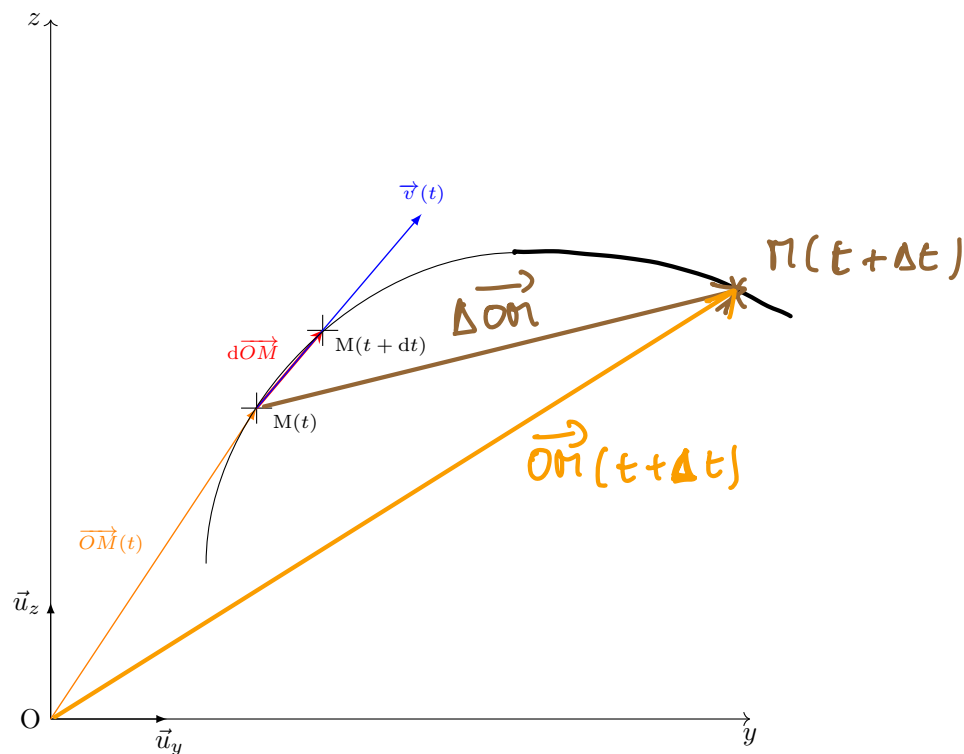


Figure 1 – Définition des vecteurs déplacement, position et vitesse

Définition du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est égal à la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

De part sa définition, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et son module s'exprime en m.s^{-1}

On remarquera que le vecteur déplacement élémentaire peut donc s'exprimer en fonction du vecteur vitesse par la formule :

$$d\vec{OM} = \vec{v} dt$$

2.5 Vecteur accélération

Définition du vecteur accélération

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est égal à la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

Le module de l'accélération s'exprime en m.s^{-2}

3 Coordonnées cartésiennes

3.1 Repérage d'un point et vecteur position

Soit la base cartésienne ¹ représentée sur la figure 2.

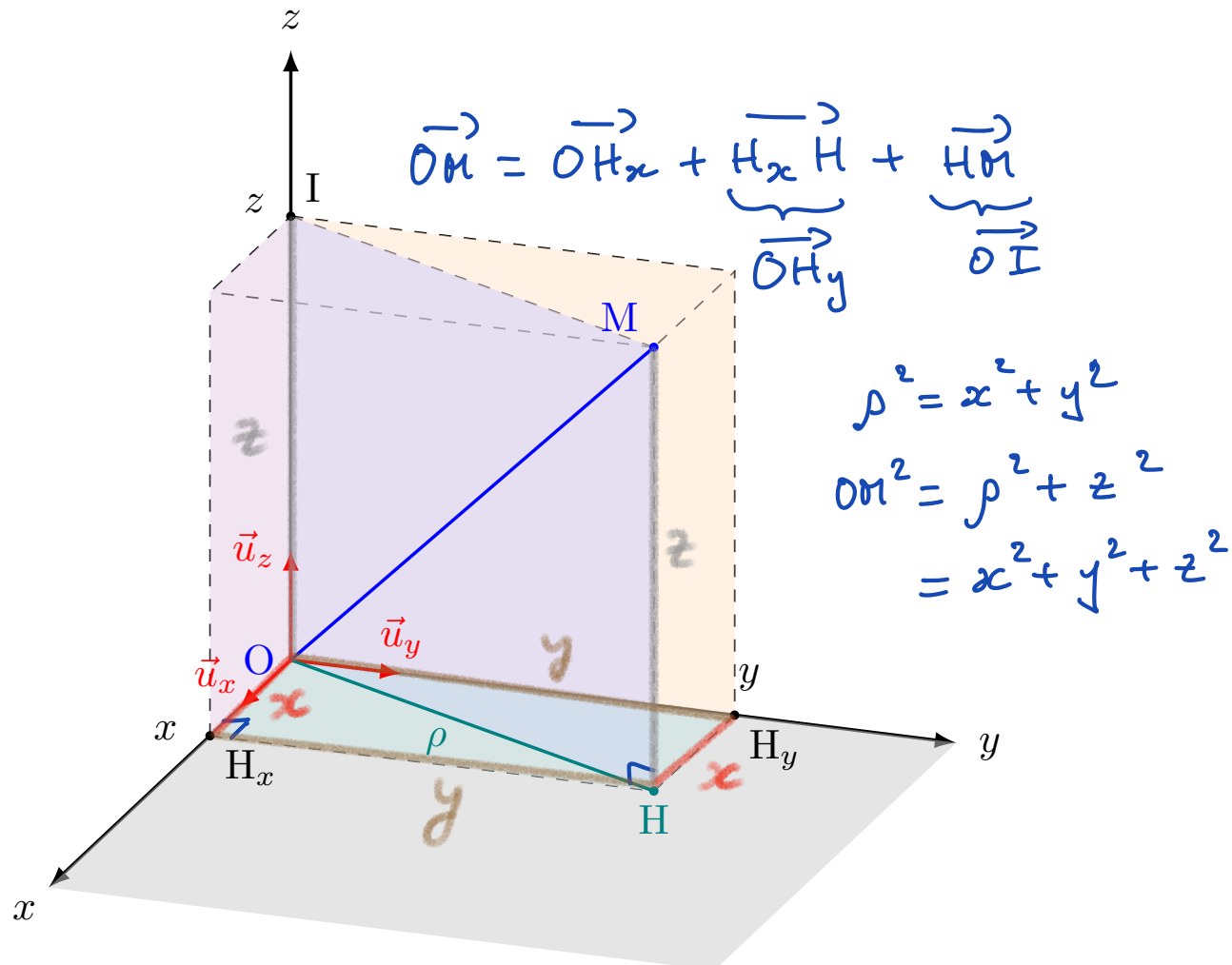


Figure 2 – Coordonnées cartésiennes

On appelle H le projeté de M sur le plan (O, x, y) et I le projeté de M sur l'axe (Oz) . On appelle H_x et H_y les projetés de H sur les axes respectifs (Ox) et (Oy) .

Alors $x = \overline{OH_x}$, $y = \overline{OH_y}$ et $z = \overline{OI}$ sont les **coordonnées cartésiennes** de M qui définissent de façon unique la position de M extrémité du **vecteur position** qui s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

Remarque : si l'on représente 2 des 3 vecteurs de la base dans un plan, pour déterminer si le 3^e est rentrant ou sortant, on utilise la règle des 3 doigts de la main **droite**.

Lorsque M se déplace, x , y et z peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$; x , y et z sont des fonctions du temps et on devrait écrire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ mais on omet souvent d'écrire (t) pour alléger l'écriture.

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

3.2 Vecteur vitesse et vecteur accélération

Le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + x \underbrace{\frac{d\vec{u}_x}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + y \underbrace{\frac{d\vec{u}_y}{dt}}_{\vec{0}} + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z + z \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{\vec{0}}$$

On utilise souvent la notation $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$:

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit donc :

$$d\vec{OM} = \vec{v} dt = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

4 Coordonnées cylindriques

4.1 Repérage d'un point - Vecteur position

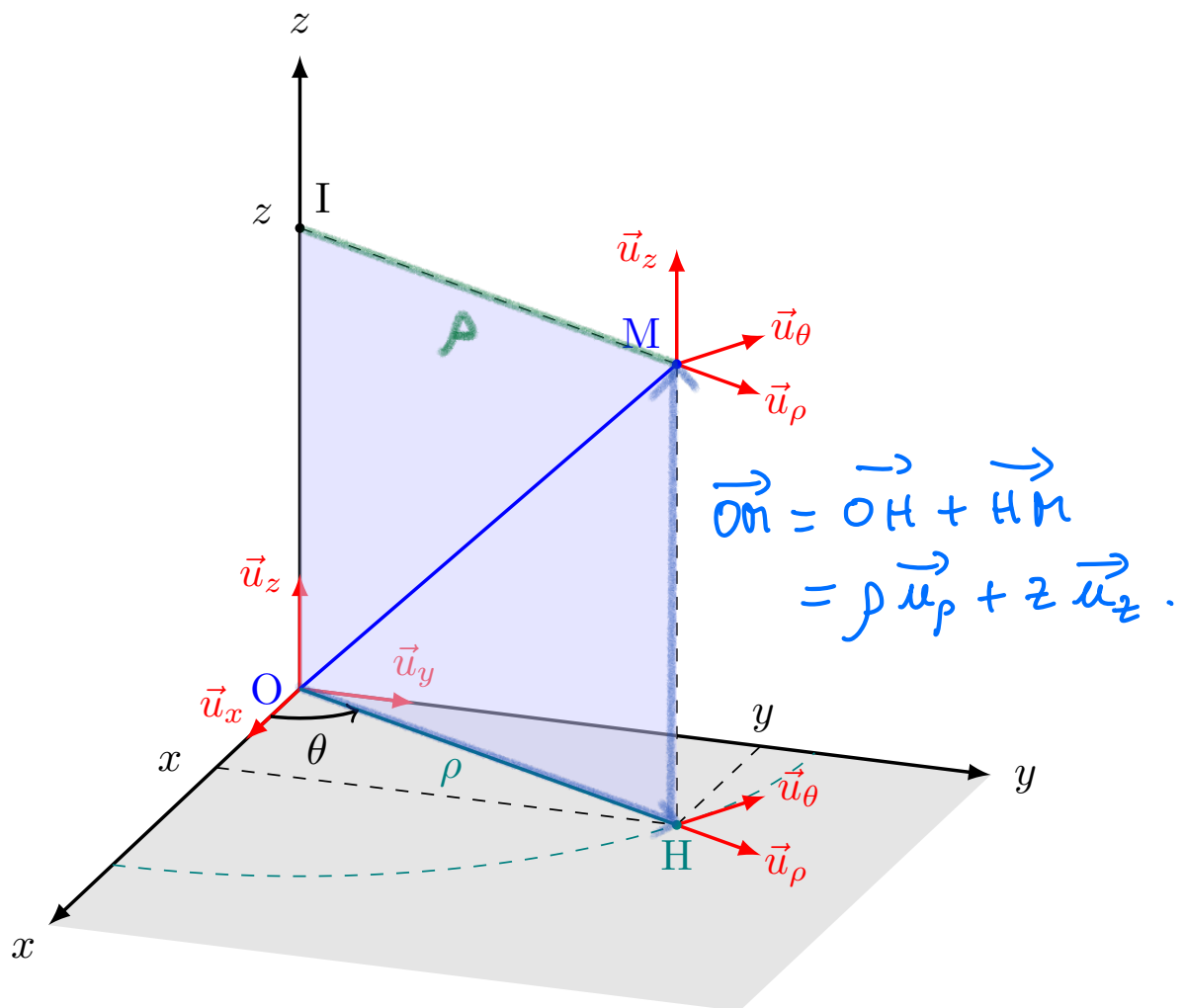


Figure 3 – Coordonnées cylindriques

De la même manière que $x = \overline{OH_x}$, $y = \overline{OH_y}$ et $z = \overline{OI}$ définissent la position de M , les **coordonnées cylindriques**² $M(\rho, \theta, z)$ peuvent être utilisés pour repérer la position de M .

Définition des coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cylindriques, le point $M(\rho, \theta, z)$ est repéré à l'aide des trois coordonnées suivantes :

- la distance, notée ρ , de M à l'axe $(O, \vec{u}_z)$: $\rho = \|\vec{OH}\| = OH = MI \geq 0$
- l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_x, \vec{OH}) \in [0; 2\pi]$
- la cote $z = \vec{OM} \cdot \vec{u}_z = \overline{OI} \in \mathbb{R}$

2. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

Si le mouvement est plan (à deux dimensions), on utilise les **coordonnées polaires** (r, θ) .

Définition de la base locale cylindrique orthonormée directe

Le triplet $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ constitue la **base cylindrique orthonormée directe** ($\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ la **base polaire**) :

- par définition $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$
- puis $\vec{u}_\theta$ s'obtient en tournant de $\pi/2$ dans le sens des θ croissant en partant de $\vec{u}_\rho$ dans le plan (O, x, y)
- enfin $\vec{u}_z$ est le 3^e vecteur de la base cartésienne

$\rho = cte$ définit un cylindre de rayon ρ (un cercle en coordonnées polaires).

$\theta = cte$ définit un demi plan perpendiculaire au plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (une demi droite en coordonnées polaires).

$z = cte$ définit un plan parallèle au plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

A partir des définitions des vecteurs de la base cylindrique, on déduit l'expression du **vecteur position** dans cette base :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

ou dans la base polaire :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

Remarque

Il ne faut pas confondre les coordonnées cylindriques du point M et les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ qui correspondent aux trois composantes de ce vecteur dans la base cylindrique :

$$M \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

On notera cependant que $\overrightarrow{OM}$ dépend bien implicitement de θ car la direction et le sens de $\vec{u}_\rho$ dépendent de cette variable.

4.2 Relations entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

Propriété : Relations entre les deux systèmes de coordonnées

des cartésiennes vers cylindriques

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\vec{u}_\rho = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

des cylindriques vers cartésiennes

$$x = \rho \cos(\theta)$$

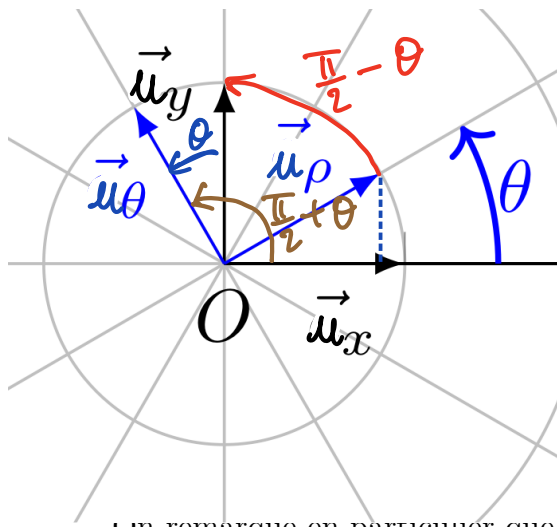
$$y = \rho \sin(\theta)$$

$$\vec{u}_x = \cos(\theta) \vec{u}_\rho - \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_y = \sin(\theta) \vec{u}_\rho + \cos(\theta) \vec{u}_\theta$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x \times \vec{u}_x + \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y \times \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x \times \vec{u}_x + \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_y \times \vec{u}_y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 * \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x &= \|\vec{u}_\rho\| \times \|\vec{u}_x\| \times \cos \theta = \cos \theta \\
 * \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\
 * \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta \\
 * \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_y &= \cos \theta.
 \end{aligned}$$

On remarque en particulier que $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$ ou encore

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{u}_\rho) &= \frac{d}{dt}(\cos \theta) \vec{u}_x + \frac{d}{dt}(\sin \theta) \vec{u}_y \\
 &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y \\
 &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta
 \end{aligned}$$

On pourra également vérifier que

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin \theta) \vec{u}_x + \frac{d}{dt}(\cos \theta) \vec{u}_y \\
 &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho.
 \end{aligned}$$

4.3 Vecteur vitesse et vecteur accélération

Nous avons vu que ρ , θ , z , mais aussi $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dépendent du temps.

Le vecteur vitesse s'écrit donc :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{OM}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\rho \vec{u}_\rho) + \dot{z} \vec{u}_z = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{z} \vec{u}_z \\
 &= \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z.
 \end{aligned}$$

Le vecteur accélération s'en déduit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Démonstration : $\vec{a} = \ddot{\rho} \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{u}_z$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{\rho} \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \rho \dot{\theta} \times (-\dot{\theta} \vec{u}_\rho) + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$\left\{ \begin{array}{l} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \text{ est la } \mathbf{composante radiale} \text{ de l'accélération.} \\ a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \text{ est la } \mathbf{composante orthoradiale} \text{ de l'accélération.} \\ a_z = \ddot{z} \text{ est la } \mathbf{composante axiale}. \end{array} \right.$

Exprimons le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{OM} = \vec{v} dt = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

5 Mouvement circulaire

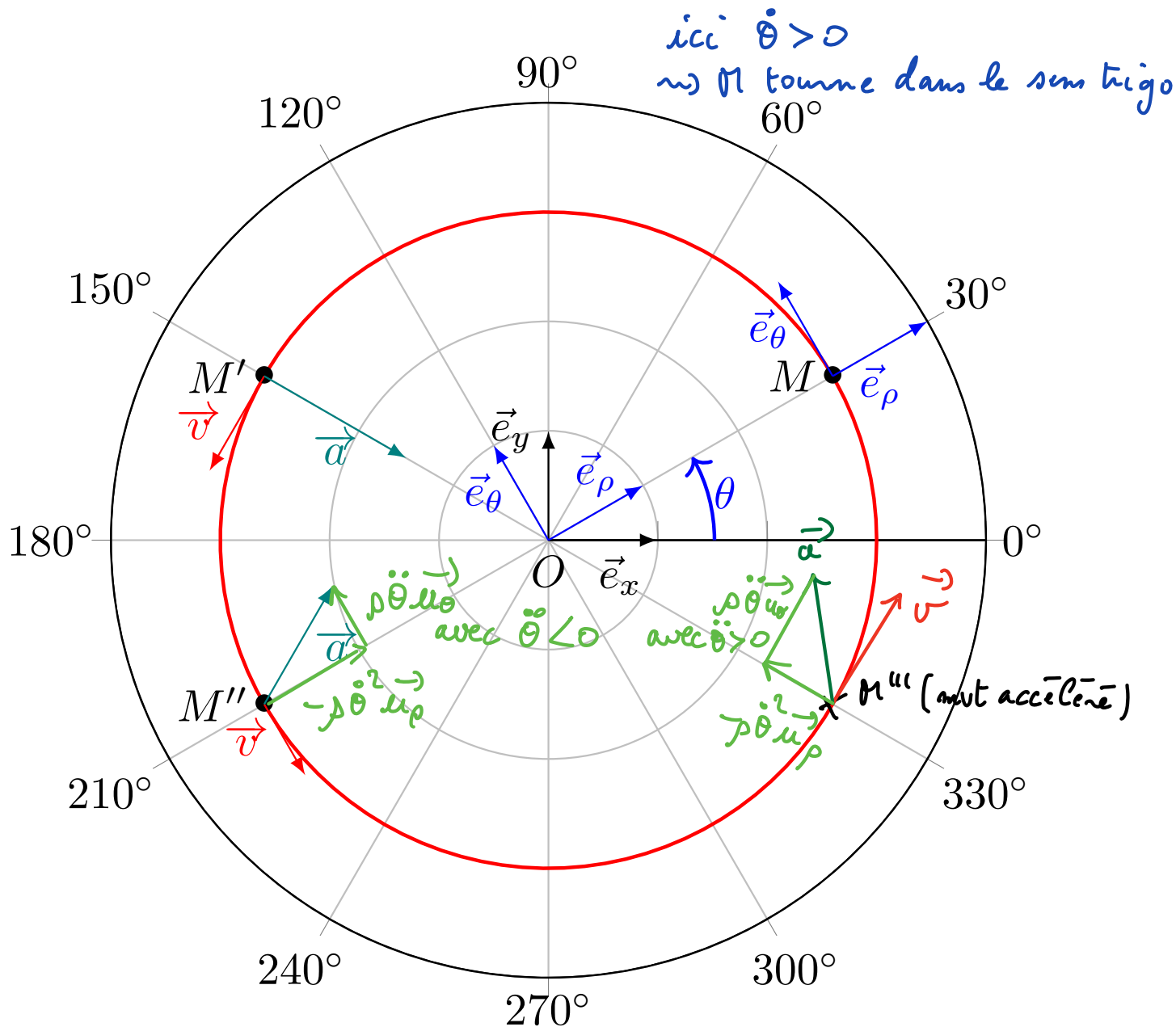


Figure 4 – Mouvement circulaire uniforme en M' et non uniforme décéléré en M''

On considère un point matériel M décrivant une trajectoire circulaire de rayon R dans un référentiel galiléen sur la figure 4. Le mouvement est plan et s'effectue autour d'un centre fixe O . Il est naturel de le décrire à l'aide d'un repérage polaire, fondé sur la base mobile $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, où $\vec{u}_\rho$ est radial et $\vec{u}_\theta$ orthoradial.

La position du point est entièrement caractérisée par l'angle polaire $\theta(t)$, la distance au centre étant constante et égale à R :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_\rho$$

ici $\rho = R$ constant

La dérivation temporelle conduit à l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = R \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

qui est toujours tangente à la trajectoire.

5.1 Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement est dit uniforme lorsque la norme de la vitesse est constante. Cela implique que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, notée ω_0 . L'angle polaire évolue alors linéairement avec le temps :

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

donc $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega_0 \vec{u}_\theta$

où θ_0 représente la position angulaire initiale.

La vitesse a pour norme algébrique $\bar{v}_0 = R\omega_0$ dont le signe dépend du signe de ω_0 et donc du sens de rotation du mobile. **Bien que sa norme soit constante, le vecteur vitesse n'est pas constant car sa direction varie au cours du temps. Il en résulte une accélération non nulle**, obtenue en dérivant la vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (R\omega_0 \vec{u}_\theta)$$

$$= R\omega_0 \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -R\omega_0^2 \vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = -R\omega_0^2 \vec{u}_\rho = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_\rho$$

$$v_0^2 = \bar{v}_0^2 = R^2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{R} = R \omega_0^2$$

Cette accélération est radiale, centripète et dirigée vers le centre du cercle.

5.2 Mouvement circulaire non uniforme

Lorsque la vitesse angulaire dépend du temps, le mouvement reste circulaire mais n'est plus uniforme. Les expressions de la position et de la vitesse conservent la même forme :

$$\vec{OM} = R \vec{u}_\rho \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On note $\bar{v} = R\dot{\theta}$ la vitesse algébrique dont le signe dépend du sens de rotation. L'accélération comporte désormais deux contributions distinctes :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_\rho + \frac{d\bar{v}}{dt} \vec{u}_\theta$$

On identifie ainsi :

- une composante radiale centripète, perpendiculaire à la trajectoire, liée à sa courbure ;
- une composante orthoradiale, colinéaire à la vitesse, associée à la variation de sa norme.

6 Interprétation de l'accélération : repère de Frenet

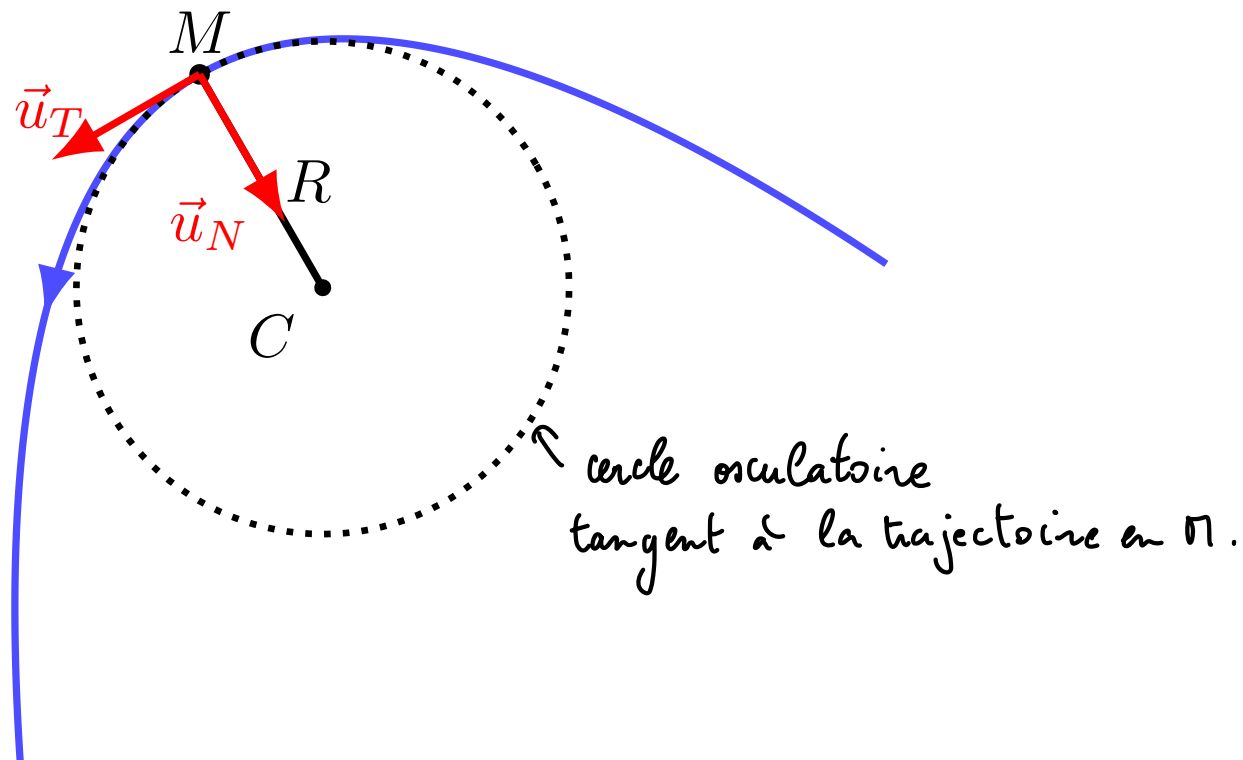


Figure 5 – Repère local de Frenet

Repère de Frenet

Pour analyser le mouvement le long d'une trajectoire plane quelconque, on introduit le repère de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ (figure 5), défini localement en chaque point :

- $\vec{u}_T$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement ;
- $\vec{u}_N$ est le vecteur unitaire normal, dirigé vers l'intérieur de la courbure.

La vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = v \vec{u}_T$$

où $v = \|\vec{v}\|$ est la norme de la vitesse.

L'accélération se décompose naturellement en deux composantes :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

où R désigne le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

6.1 Signification physique des composantes

La composante normale

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

est responsable du changement de direction de la vitesse. Elle est perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers le centre de courbure. Son intensité est d'autant plus grande que la trajectoire est courbée (petit R) et que le mouvement est rapide (grand v).

La composante tangentielle

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T$$

traduit la variation de la norme de la vitesse :

- si $\vec{a}_T$ est de même sens que $\vec{v}$, la vitesse augmente (mouvement accéléré) ;
- si $\vec{a}_T$ est de sens opposé, la vitesse diminue (mouvement décéléré) ;
- si $\vec{a}_T = \vec{0}$, le mouvement est uniforme.

On remarque qu'un mouvement est uniforme si et seulement si :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

7 Coordonnées sphériques

7.1 Repérage d'un point - Vecteur position

triangle OMI :

$$z = r \cos \theta$$

$$\rho = r \sin \theta$$

triangle $OH H_x$:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$= r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$= r \sin \theta \sin \varphi$$

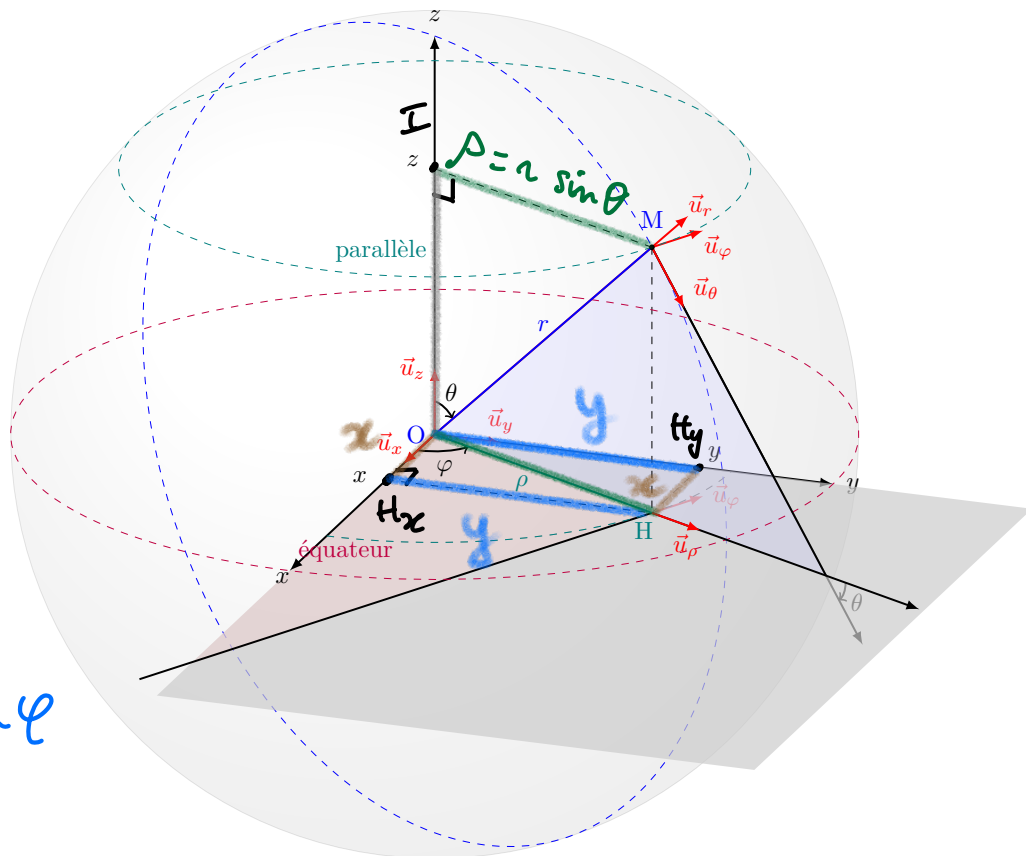


Figure 6 – Coordonnées sphériques

Définition des coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées sphériques ^a, le point $M(r, \theta, \varphi)$ est repéré à l'aide des trois coordonnées suivantes :

- la longueur $r = \|\overrightarrow{OM}\| \geq 0$
- l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM}) \in [0; \pi]$
- l'angle orienté $\varphi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OH}) \in [0; 2\pi]$

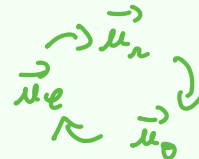
a. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

On remarquera que les angles θ et φ n'ont ici pas la même définition qu'en coordonnées cylindriques.

Définition de la base locale sphérique orthonormée directe

Le triplet $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ constitue la **base sphérique orthonormée directe** qui par définition est telle que :

- le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$
- le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OH}}{OH}$
- le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$



Le **vecteur position** s'écrit dans la base sphérique :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$$

Remarque

Il ne faut pas confondre les coordonnées sphériques du point M et les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ qui correspondent aux trois composantes de ce vecteur dans la base sphérique :

$$M \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On notera cependant que $\overrightarrow{OM}$ dépend bien implicitement de θ et de φ car la direction et le sens de $\vec{u}_r$ dépendent de ces deux variables.

