

Feuille d'exercices 12

Primitives et équations différentielles

— **Exercice 1** ●○○ — **Composée, fractions rationnelles et autres** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de définition :

1. $x \mapsto -6xe^{x^2}$
2. $x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$
3. $x \mapsto -x^2 \sin(x^3)$
4. $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
5. $x \mapsto \frac{-2e^x}{e^x+3}$
6. $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$
7. $x \mapsto \frac{3}{x} \ln x$
8. $x \mapsto \frac{x^3}{1+x}$
9. $x \mapsto \tan^2 x$

— **Exercice 2** ●○○ — **Primitives en vrac** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $x \mapsto \frac{1}{-2x^2+12x-18}$
3. $x \mapsto \frac{x-7}{-2x^2+12x-18}$
4. $x \mapsto \frac{3}{-6x^2-x+12}$
5. $x \mapsto \frac{3x-\frac{11}{4}}{-6x^2-x+12}$
6. $x \mapsto \frac{1}{8x^2-48x+74}$
7. $x \mapsto (6x^2-2x+6)e^{2x}$
8. $x \mapsto e^{-3x}(6 \cos(2x) - 5 \sin(2x))$

— **Exercice 3** ●○○ — **IPP** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$
2. $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$
3. $x \mapsto 3x^2 \ln(1+x)$
4. $x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$
5. $x \mapsto (\sin x)e^x$ (avec ou sans IPP)
6. $x \mapsto (x^2+1) \sin(2x)$

— **Exercice 4** ●●○ — On désire calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 2} dx$$

1. Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on note $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

2. En déduire que

$$I = \int_a^b \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$$

avec a et b à déterminer.

3. En déduire I .

— **Exercice 5** ●●○ — **Une histoire de composées** On souhaite définir la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{x^3} e^{\sqrt{t}} dt.$$

Donner le domaine de définition et celui de dérivabilité de f . Calculer la dérivée sur le domaine de dérivabilité.

— **Exercice 6** ●●○ — **Changements de variable** Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

1. $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$
2. $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x+x \ln x}$
4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+x^2}$
5. $x \mapsto \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x}$

— **Exercice 7** ●●○ — **EDL1** Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

1. $y'(x) - 2xy(x) = 6x$ sur $\mathbb{R}$. Et avec $y(0) = 1$?
2. $y'(x) + \frac{2}{x^3}y(x) = (-2x+3)e^{\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Et avec $y(1) = e$?
3. $xy'(x) - y(x) = x \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Et avec $y(1) = -3$?
4. $(x+1)y'(x) - xy = 2x^2 - x + 2$ sur $] -1, +\infty[$. Et avec $y(1,5) = 5e^{1,5}$?

— **Exercice 8** ●● — **EDL2** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1.

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = x + \sin x - e^{3x} + e^{4x} \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = 3\sin(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} y''(x) + 8y'(x) + 25y(x) = e^{-4x} \cos(5x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

— **Exercice 9** ●●● — **Equations fonctionnelles**

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(x) + \int_0^2 f(t)dt \quad \text{et} \quad f(1) = 3.$$

— **Exercice 10** ●●● — **Changement de variable dans une equadiff** On considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 6x - 1 \quad (1)$$

1. Cette équation différentielle rentre-t-elle dans le cadre du cours ?

2. Nous allons effectuer le changement de variable $x = e^t$. Etant donnée une solution y de (1), on introduit pour cela la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$. Quel est le domaine de définition de la fonction z ? Montrer qu'elle est deux fois dérivable sur son domaine de définition.

3. Exprimer y en fonction de z , puis les dérivées première et seconde de y en fonction de celles de z .

4. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + z(t) = 6e^t - 1. \quad (2)$$

5. Résoudre cette équation différentielle, puis en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale (1).