

Intégrales à paramètres – TD₆

Suites et séries d'intégrales

Exercice 1 :

Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2 \sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2} dt$ converge et déterminer sa limite.

Réponse

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(t) = \frac{1 + 2 \sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1 + t^2}.$$

► Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,

► Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + t^2} = \ell(t)$.

► La fonction ℓ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

► Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| \leq \underbrace{\frac{1}{1 + t^2}}_{=\varphi(t)}.$$

La fonction φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$). Par théorème de comparaison, φ est intégrable en $+\infty$.

Comme φ est paire, φ est intégrable en $-\infty$.

Donc, φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x + \dots + x^n} dx.$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'intégrale u_n converge.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.

Réponse

Pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in [0, +\infty[$, on note :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x + \dots + x^n}.$$

► Soit $t > 0$. En reconnaissant une somme de termes en progression géométrique, on a :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Or, } x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ +\infty & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc,

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\begin{cases} 1-x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}}_{=f(x)}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

De plus, pour tout $t \geq 0$, $1 + x + x^2 + \dots + x^n \geq 1 + x^2 > 0$.

Donc,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{1 + x + x^2 + \dots + x^n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 + x^2}_{=\varphi(x)}}.$$

La fonction φ est positive et continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable en $+\infty$.

Donc, φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par théorème de convergence dominée,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 1-x dt = \left[-\frac{(1-x)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 :

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction u_n par :

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \times t^{x-1} dt.$$

Montrer que la suite de fonction $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction Γ sur $]0, +\infty[$.

Réponse

Soit $x > 0$ fixé.

On définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t > 0, \quad f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \times \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

On remarque que la fonction f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, donc, $\int_n^{+\infty} f_n(t) dt = 0$.

D'où, par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n f_n(t) dt + \int_n^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \times t^{x-1} dt = u_n(x).$$

Soit $t > 0$ fixé. On a :

$$f_n(t) = t^{x-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right).$$

Or, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $-\frac{t}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -t \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -t$.

Donc, par composition de **limite**,

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x-1}.$$

Ainsi,

la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$.

Cas 1 : $t \in]0, n[$. Dans ce cas, $|f_n(t)| = t^{x-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$.

Or, on sait que, pour tout $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.

De plus, $-\frac{t}{n} > -1$. Donc,

$$|f_n(t)| \leq t^{x-1} \exp\left(n \times \left(-\frac{t}{n}\right)\right) \leq t^{x-1} e^{-t}.$$

Cas 2 : $t \geq n$. Dans ce cas, $|f_n(t)| = 0 \leq e^{-t} t^{x-1}$.

Ainsi,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t > 0, |f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux.

la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue par morceaux.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$, où la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est positive, continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (car équivalent à $\frac{1}{t^{1-x}}$ en 0, avec $1-x < 0$, et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, avec $2 > 1$).

Ainsi, par théorème de convergence dominée,

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x).$$

Autrement dit,

la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction Γ sur $]0, +\infty[$

Exercice 4 :

Montrer l'existence de $c > 0$ tel que :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}.$$

Indication : utiliser un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale sur $[0, 1]$.

Réponse

On applique le changement de variable : $x = \frac{1}{n} \times u + 1$, $dx = \frac{1}{n} du$ et $\begin{array}{c|c} t & 1 \\ u & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1+\frac{1}{n} & 1 \end{array}$. On a :

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{1+\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} du.$$

On note $f_n(u) = \sqrt{1+\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, 1]$.

► Soit $u \in [0, 1]$. On a :

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n \times \ln\left(1+\frac{u}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(n \times \ln\left(\frac{u}{n} + o\left(\frac{u}{n}\right)\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(u + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^u.$$

Donc, $f_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+e^u} = \ell(u)$.

► La fonction ℓ est continue sur $[0, 1]$.

► On sait que, pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

Donc,

$$|f_n(u)| \leq \exp\left(n \times \frac{u}{n}\right) \leq e^u.$$

La fonction $\varphi : u \mapsto e^u$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc est intégrable sur $[0, 1]$.

Pas le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{1 + e^u} du = c.$$

La fonction **continue** $u \mapsto \sqrt{1 + e^u}$ n'est pas la fonction nulle et est positive sur $[0, 1]$, donc, $c > 0$.
Ainsi,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n}.$$

Exercice 5 :

Soit $f \in L^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n \times \int_0^1 \frac{f(n \times t)}{1+t} dt$.

Indication : utiliser un changement de variable

Réponse

On applique le changement de variable $u = nt$, avec $du = n dt$ et $\frac{t}{u} \mid \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & n \end{matrix}$.

On a :

$$u_n = \int_0^n \frac{f(u)}{1 + \frac{u}{n}} du.$$

On note, pour tout $u \geq 0$,

$$g_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1 + \frac{u}{n}} & \text{si } u \in [0, n] \\ 0 & \text{si } u > n \end{cases}$$

- Soit $u \in [0, +\infty[$. Pour n assez grand, on a $u < n$, donc,

$$g_n(u) = \frac{f(u)}{1 + \frac{u}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(u).$$

Donc, la suite de fonction (g_n) converge simplement vers f sur $[0, +\infty[$.

- Les fonctions g_n et f sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $u \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|g_n(u)| = \frac{|f(u)|}{1 + \frac{u}{n}} \leq |f(u)|,$$

car $1 + \frac{u}{n} \geq 1 > 0$.

Comme f est intégrable sur $[0, +\infty[$, $|f|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(u) du.$$

Exercice 6 :

On note

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} dt.$$

Montrer que I converge et calculer sa valeur.

Réponse

Pour tout $t > 0$, on a $|e^{-\sqrt{t}}| < 1$, donc, en faisant apparaître une somme de série géométrique de raison $e^{-\sqrt{t}}$, on a :

$$\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}} = e^{-\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\sqrt{t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)\sqrt{t}}.$$

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)\sqrt{t}} dt.$$

On note $f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)\sqrt{t}}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$.

Les fonctions f_n sont continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. De plus, $f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \in \mathbb{R}$, donc, f_n est prolongeable par continuité en 0, donc est intégrable en 0.

D'autre part, par croissances comparées, comme $n+1 > 0$, $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a montré au début que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S := \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1 - e^{-\sqrt{t}}}$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Calculons $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ (comme f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'intégrale existe).

On applique le changement de variable $u = \sqrt{t}$, autrement dit, $t = u^2$ avec $dt = 2u du$ et $\begin{array}{c|cc} t & 0 & +\infty \\ \hline u & 0 & +\infty \end{array}$. La fonction

$t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-(n+1)\sqrt{t}}| dt$ converge. Donc, on peut appliquer le changement de variable et :

$$\int_0^{+\infty} |e^{-(n+1)\sqrt{t}}| dt = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-(n+1)u} du.$$

On applique une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} u e^{-(n+1)u} du = \left[\frac{u e^{-(n+1)u}}{-(n+1)} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{n+1} du,$$

où, par croissances comparées,

$$\frac{u e^{-(n+1)u}}{-(n+1)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{u e^{-(n+1)u}}{-(n+1)} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} u e^{-(n+1)u} du = \left[\frac{e^{-(n+1)u}}{-(n+1)^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-(n+1)u} du \sim \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

On reconnaît une série de Riemann convergente (car $2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge. Ainsi, par théorème d'intégration terme à terme, S est intégrable sur $]0, +\infty[$ (donc I converge) et

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi,

$$I = \frac{\pi^2}{3}.$$

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 7 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4 \times t^2}} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la limite de F en 0.

Réponse

1. On note $f(t, x) = \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4 \times t^2}}$ où $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, $1 + x^4 t^2 \geq 1 > 0$, donc, $|f(t, x)| \leq t^2 \leq 1$.

La fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est continue positive sur le SEGMENT $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

Par théorème de continuité sous le signe $\int$,

F est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$, on a $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

Exercice 8 : Intégrale de Gauss

On pose, pour tout $x \geq 0$, $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2 \times (1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que les fonctions G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $G(x) + (H(x))^2 = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Réponse

1. Montrons que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On note $g(t, x) = \frac{e^{-x^2 \times (1+t^2)}}{1+t^2}$ où $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc, est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto g(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -2x \times e^{-x^2 \times (1+t^2)}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $[0, 1]$.

Soit $[0, b] \subset \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [a, b]$, $t \in [0, 1]$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \right| \leq 2x \leq 2b.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 2b$ est continue positive sur le SEGMENT $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, par théorème de dérivation sous le signe $\int$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$.

Ceci est vrai pour tout $[0, b] \subset \mathbb{R}_+$, donc,

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $h : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème fondamental de l'analyse, H est l'unique primitive de h qui s'annule en 0.

Donc,

H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $x \geq 0$, on note $\varphi(x) = G(x) + (H(x))^2$.

Par Q1, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi'(x) = G'(x) + 2H'(x)H(x) = \int_0^1 -2x \times e^{-x^2 \times (1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Cas 1 : $x \neq 0$. Dans $\int_0^x e^{-t^2} dt$, on utilise le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, donc, $t = xu$, $dt = x du$ et $\begin{array}{c|c} t & 0 \\ \hline u & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & x \\ \hline u & 1 \end{array}$.

On a :

$$\varphi'(x) = \int_0^1 -2x \times e^{-x^2 \times (1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xu)^2} x du = -2x \int_0^1 e^{-x^2 \times (1+t^2)} dt + 2x \int_0^1 e^{-x^2 \times (1+u^2)} du = 0.$$

Cas 2 : $x = 0$. On a : $\varphi'(0) = G'(0) + 2H'(0)H(0) = 0$.

Donc, φ' est nulle sur $[0, +\infty[$, donc, φ est constante sur $[0, +\infty[$.

Or,

$$\varphi(0) = G(0) + (H(0))^2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\text{pour tout } x \geq 0, G(x) + (H(x))^2 = \frac{\pi}{4}.$$

3. On remarque que $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto g(t, x)$ est continue sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $g(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = \ell(t)$.

La fonction ℓ est continue sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, 1]$, $|g(t, x)| \leq 1$. La fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est continue positive sur le SEGMENT $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

Donc, par théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \ell(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Donc, en passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans **Q2**, $0 + I^2 = \frac{\pi}{4}$.

D'où, $|I| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par positivité de l'intégrale, $I \geq 0$.

Donc,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarque : La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 9 : Intégrale de Dirichlet

Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt.$$

1. Vérifier que f est définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. En utilisant une majoration $|f(x)|$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'expression de $f'(x)$, puis de $f(x)$ sans signe intégral.

Pour $x \geq 0$. On note $f_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ et $f_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt$.

5. Vérifier que $f(x) = f_1(x) + \text{Im}(f_2(x))$.
6. Montrer que f_1 est continue en 0.
7. Montrer que f_2 est continue en 0.

Indication : on pourra commencer par intégrer par parties.

8. En déduire que f est continue en 0, puis la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Réponse

1. Soit $x \geq 0$. On note $h(t, x) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ pour $t > 0$.

Cas 1 : $x > 0$. La fonction $t \mapsto h(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Par croissances comparées, $h(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$). Par théorème de comparaison, $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable en $+\infty$.

De plus, $h(t, x) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \times 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$, donc, $t \mapsto h(t, x)$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

Donc, $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Cas 2 : $x = 0$. La fonction $t \mapsto h(t, x) = \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On a : $h(t, x) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$, donc, $t \mapsto h(t, x)$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

Soit $A > 0$, par intégrations par parties,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{\frac{\pi}{2}}^A + \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\cos(t)}{t^2} dt = -\frac{\cos(A)}{A} + \int_{\frac{\pi}{2}}^A \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Or, $\frac{\cos(A)}{A} \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, $\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$). Par théorème de comparaison, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge absolument donc converge.

Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, autrement dit, $f(0)$ existe.

Ainsi,

f est définie sur $[0, +\infty[$.

2. • À x fixé, la fonction $t \mapsto h(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Par croissances comparées, $h(t, x) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable en $+\infty$.

De plus, $h(t, x) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \times 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$, donc, $t \mapsto h(t, x)$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

Donc, $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- À t fixé, la fonction $x \mapsto h(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = -\sin(t)e^{-xt}.$$

- À x fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$ et $x \in [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) \right| \leq e^{-at}.$$

La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence).

Donc, par théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi,

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $x > 0$. Dans la question précédente, on a montré que $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc par inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} e^{-xt} dt.$$

Or, $|\sin(t)| \leq |t|$, donc, $\frac{|\sin(t)|}{t} e^{-xt} \leq e^{-xt}$. Comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale de référence), on peut appliquer la croissante de l'intégrale :

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \leq \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} \leq \frac{1}{x}.$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x}.$$

On sait que $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par théorème d'encadrement,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. On a :

$$f'(x) = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-xt} dt \right) = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = -\operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{(-x+i)} \right]_0^{+\infty} \right).$$

Or, $\left| \frac{e^{(-x+i)t}}{(-x+i)} \right| = \frac{e^{-xt}}{1+x^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$$f'(x) = -\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{-x+i} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{-x-i}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Or, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $-\operatorname{Arctan}(x) + C \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + C$.

Donc, $C = \frac{\pi}{2}$.

Donc,

pour tout $x > 0$, $f(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$.

5. On a :

$$f_1(x) + \operatorname{Im}(f_2(x)) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt + \operatorname{Im} \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt = f(x).$$

6. Montrons que $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f_1(0)$.

On note $\varphi(t, x) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ avec $t > 0$ et $x \in [0, 1]$.

- À x fixé, $t \mapsto \varphi(t, x)$ est continue sur $]0, 1]$.
- Pour tout $t > 0$, $\varphi(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \ell(t)$.
- La fonction ℓ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
- Pour tout $t > 0$ et $x \in [0, 1]$, $|\varphi(t, x)| \leq \frac{t}{t} \times 1 \leq 1$. La fonction constante égale à 1 est positive continue intégrable sur le SEGMENT $[0, 1]$.

Par théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f_1(0).$$

7. Par intégration par parties (justifiée par le crochet possède des limites finies et l'intégrale de droite est absolument convergente),

$$f_2(x) = \left[\frac{e^{-(x-i)t}}{-t(x-i)} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2(x-i)} dt = -\frac{e^{-(x-i)}}{-(x-i)} - \frac{1}{x-i} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt}_{=g(x)}.$$

Les fonctions $x \mapsto -\frac{e^{-(x-i)}}{-(x-i)}$ et $x \mapsto \frac{1}{x-i}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ (le dénominateur est non nul).

Montrons que g est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $\psi(t, x) = \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$.

- À x fixé, la fonction $t \mapsto \psi(t, x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- À t fixé, la fonction $x \mapsto \psi(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \geq 1$ et $x \geq 0$:

$$|\psi(t, x)| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de continuité sous le signe intégrale, g est continue sur $[0, +\infty[$.
En particulier, g est continue en 0, et par opérations sur les fonctions continues,

f_2 est continue en 0.

8. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue en 0. Donc, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Or, $f(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}$.

Donc, par unicité de la limite,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10 :

Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-u^2+i) \times x^2}}{u^2 - i} du$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer F' .

Réponse

Pour tout $u \in [0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(u, x) = \frac{e^{(-u^2+i) \times x^2}}{u^2 - i}$. On a :

$$\forall (u, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, |f(u, x)| = \frac{e^{-u^2 \times x^2}}{\sqrt{1+u^4}}.$$

► Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ (u est réel, le dénominateur ne s'annule pas).

De plus $|f(u, x)| \leq \frac{1}{u^2}$ (car $x^2 > 0$) et la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$. Ainsi, F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

► On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

• Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (point précédent).

• Soit $u \in [0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto f(u, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $(u, x) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, x) = -2x \times e^{(-u^2+i) \times x^2}.$$

• Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u, x)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.

• Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment quelconque. Pour tout $u \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(u, x) \right| \leq 2b \times e^{-u^2 \times a^2}.$$

La fonction $\varphi : u \mapsto 2b \times e^{-u^2 \times a^2}$ est positive et continue sur $[0, +\infty[$. De plus, par croissances comparées, $\varphi(u) = o_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right)$ et la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$ (car φ est continue sur $[0, 1]$).

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe $\int$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ceci est vrai pour tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2x \times e^{(-u^2+i) \times x^2} du = -2x \times e^{ix^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 \times x^2} du$$

► Le changement de variable $v = u \times x$ (où $x > 0$ est fixé) donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2 \times x^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \frac{1}{x} dv.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = -2e^{ix^2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

Exercice 11 :

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer un équivalent simple de F en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de F en 0.

Réponse

1. Pour tout $t \in [0, +\infty[$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(t, x) = \frac{e^{-t}}{x+t}$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
- Soit $t \in [0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment quelconque. Pour tout $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, b]$, on a

$$|f(t, x)| \leq \frac{e^{-t}}{a}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{a}$ est positive, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence).

Donc, par le théorème de continuité sous le signe $\int$, la fonction F est continue sur $[a, b]$. Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc,

F est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x > 0$, on a $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \frac{t}{x}} dt$.

Soit (x_n) une suite de $]0, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, on note $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1 + \frac{t}{x_n}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Soit $t \in [0, +\infty[$. On a $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t}$. La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto e^{-t}$.
- La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t}$. De plus, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de référence).

Par le théorème de convergence dominée,

$$x_n \times F(x_n) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Ceci est vrai pour toute suite (x_n) de $]0, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Donc, par caractérisation séquentielle de la limite, $x \times F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi,

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Remarque : on peut aussi trouver cet équivalent par intégration par parties.

3. On utilise le changement de variable $u = x + t$. Dans ce cas $du = dx$. D'où,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u+x}}{u} du = e^x \times \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Or $e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Donc,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_x^1 \frac{1}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \ln(x).$$

De plus, la fonction $u \mapsto \frac{e^{-u}-1}{u}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (équivalent usuel). Donc, $\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{u} du$ converge. De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge.

Or, $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$. Donc, $\int_x^1 \frac{e^{-u}-1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = o_{x \rightarrow 0^+}(\ln(t))$. Donc,

$$F(x) = -\ln(x) + o_{x \rightarrow 0^+}(\ln(t)).$$

Ainsi,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 12 :

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F en 0 et $+\infty$.

Réponse

Indication

1. Utiliser le changement de variable $t = x \times s$: pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_0^1 \frac{\sin(x \times s)}{1+s} ds$

Appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$.

2. Limite en 0 : $|F(x)| \leq \int_0^1 \sin(x \times s) ds$, puis calculer l'intégrale de droite. Conclure à l'aide d'un équivalent classique

Limite en $+\infty$: intégrer par parties : $F(x) = \left[-\frac{\cos(x \times s)}{x \times (1+s)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(x \times s)}{x \times (1+s)^2} ds$.

Le terme entre crochets tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Puis, après majoration ($|\cos| \leq 1$), on montre que l'intégrale de droite tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 13 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x \times t)}{t} \times e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer F' .
2. En déduire une expression de F sans symbole intégral.

Réponse

1. Appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (il n'y a pas de difficulté). On trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(x \times t) \times e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{ix \times t} \times e^{-t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1) \times t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{x^2+1}.$$

2. De la question précédente, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^x = \operatorname{Arctan}(x).$$

Exercice 14 :

On définit une fonction F par $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x \times (t+1)} dt$.

1. Déterminer I le domaine de définition de F .
2. Sans utiliser de dérivée, déterminer la monotonie de F .
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
4. Montrer que $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$.
5. Déterminer des équivalents simples de F aux bornes de I .

Réponse

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et

$$\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}.$$

En reconnaissant une intégrale de Riemann, $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est intégrable en $+\infty$ si, et seulement si, $1+x > 1$, autrement dit, $x > 0$.

Donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x \times (t+1)} dt$ converge absolument si, et seulement si, $x > 0$.

Comme l'intégrande est positive, la convergence absolue équivaut à la convergence.

Donc,

$$I =]0, +\infty[.$$

2. Soit $x \leq y$. Comme $t \geq 1$, $e^{x \ln(t)} \leq e^{y \ln(t)}$.

Donc, $0 < t^x(t+1) \leq t^y(t+1)$.

Donc, $\frac{1}{t^x(t+1)} \geq \frac{1}{t^y(t+1)}$.

Par croissance de l'intégrale, $F(x) \geq F(y)$.

Donc,

$$F \text{ est décroissante sur } I.$$

3. On note $f(t, x) = \frac{1}{t^x(t+1)}$ où $t \in [1, +\infty[$ et $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (**Q1**).

Pour tout $t \geq 1$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) = \frac{(-\ln(t))^j}{t^x(t+1)}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ et $t \geq 1$:

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(t, x) \right| = \left| \frac{(-\ln(t))^j}{t^x(t+1)} \right| \leq \frac{|\ln(t)|^j}{t^{a+1}}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{|\ln(t)|^j}{t^{a+1}}$ est positive et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

De plus, en prenant $\gamma \in]1, a+1[$ (par exemple $\gamma = 1 + \frac{a}{2}$), on a par croissances comparées : $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est positive, continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $\gamma > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc, par théorème de dérivation sous le signe $\int$, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$.

Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$, donc,

F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Remarque : par positivité de l'intégral, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{-\ln(t)}{t^x(t+1)}}_{\leq 0} dt \leq 0$$

Donc, on trouve que F est décroissante.

Remarque 2 : par positivité de l'intégral, pour tout $x > 0$,

$$F''(x) = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{(\ln(t))^2}{t^x(t+1)}}_{\geq 0} dt \geq 0$$

Donc, F est convexe.

4. Soit $x > 0$. On a :

$$F(x) + F(x+1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} \times (t+1)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x \times (t+1)} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x \times (t+1)} \times \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt = \left[\frac{t^{-x}}{-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

5. On a

$$F(x) = \frac{1}{x} - F(x+1).$$

Or, F est continue en 1, donc, $F(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(1) \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi,

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Comme F est décroissante,

$$\frac{1}{x} = F(x) + F(x+1) \leq 2F(x).$$

De même,

$$\frac{1}{x-1} = F(x-1) + F(x) \geq 2F(x).$$

Donc,

$$\frac{1}{x} \leq 2F(x) \leq \frac{1}{x-1}.$$

Or, $\frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Donc, $2F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Ainsi,

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Exercice 15 :

On considère la fonction $f : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}} dx$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 3. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
 4. Soit $t > 0$. En utilisant le changement de variable $x = \frac{t}{u}$, montrer que $f'(t) = -2f(t)$.
 5. En déduire l'expression de f .
- On admettra que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On a :

$$\forall x \geq 0, \left| e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}} \right| \leq e^{-x^2} \quad \text{et} \quad e^{-x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$).

Par théorème de comparaison, $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, donc,

f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$f(-t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \times e^{-\frac{(-t)^2}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}} dx = f(t).$$

Donc,

f est paire.

2. On note $g(t, x) = e^{-x^2} \times e^{-\frac{t^2}{x^2}}$.

- À x fixé, $t \mapsto g(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- À t fixé, $x \mapsto g(t, x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $|g(t, x)| \leq e^{-x^2}$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive, continue et intégrable (car négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$).

Par théorème de continuité sous le signe intégral,

f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. • À x fixé, $t \mapsto g(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = -\frac{2t}{x^2} e^{-x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}.$$

- À t fixé, $x \mapsto g(t, x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \geq 0$ et $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \right| \leq \frac{b}{x^2} e^{-x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}}.$$

La fonction $\psi : x \mapsto \frac{b}{x^2} e^{-x^2} e^{-\frac{a^2}{x^2}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

De plus, par croissances comparées, $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R}$, donc ψ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0.

D'autre part, $\psi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc, par théorème de comparaison, ψ est intégrable en $+\infty$.

Par théorème de dérivabilité sous le signe intégral, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ceci est vrai pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc,

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $t > 0$. On a :

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2} e^{-x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}} dx.$$

On applique le changement de variable $x = \frac{t}{u}$ avec $dx = -\frac{t}{u^2} du$ (la fonction $u \mapsto \frac{t}{u}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale $f'(t)$ converge). Donc,

$$f'(t) = \int_{+\infty}^0 -\frac{2t \times u^2}{t^2} e^{-\frac{t^2}{u^2}} e^{-u^2} \times \left(-\frac{t}{u^2}\right) du = -2 \int_{+\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{u^2}} e^{-u^2} du = -2f(t).$$

5. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$, $f(t) = C e^{-2t}$. Par continuité de f en 0 (**Q1**), on peut faire tendre t vers 0, donc, $f(0) = C$.

$$\text{Or, } f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\text{Donc, pour tout } t \geq 0, f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2t}.$$

Par parité de f , pour tout $t \leq 0$, $f(t) = f(-t)$. Comme $-t \geq 0$, on a : $f(t) = f(-t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2(-t)}$.

Ainsi,

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|t|}.$$