

13

Espaces préhilbertiens réels

« Ce qui est simple est toujours faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable. »

Paul Valéry (1871 – 1945)

Plan de cours

I	Généralités	1
II	Orthogonalité	4
III	Suites totales (pour votre culture, HP)	10
IV	Méthode des moindres carrés (pour votre culture, HP)	11

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

I | Généralités

A – Produit scalaire

Définition 13.1 : Produit scalaire

On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- φ est *bilinéaire* : pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y_1) = \lambda \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_1) \quad \text{et} \quad \varphi(x_1, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_1, y_2)$$

- φ est *symétrique* : pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est *définie positive* : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0_E$.

On note généralement le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Il suffit en pratique de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie pour justifier la bilinéarité.

Définition 13.2 : Espaces préhilbertiens réels

- On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Notation usuelle : $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.
- Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé espace euclidien.

Voici quatre exemples fondamentaux d'espaces préhilbertiens réels, à connaître sur le bout des doigts.

Exemple 1 – $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique

Le produit scalaire canonique est défini par :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle X | Y \rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{en notant } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

L'application ainsi définie est clairement bilinéaire et symétrique.

De plus, l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive car quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle X | X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle X | X \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Exemple 2 – $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$

Si $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'intégrale existe par continuité de fg sur le segment $[a, b]$. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire. Soient $f, g, h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda f + g | h \rangle = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))h(t) dt = \lambda \int_a^b f(t)h(t) dt + \int_a^b g(t)h(t) dt = \lambda \langle f | h \rangle + \langle g | h \rangle$$

par linéarité de l'intégrale; ce qui justifie la linéarité à gauche. On obtient la linéarité à droite par symétrie.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique. Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b g(t)f(t) dt = \langle g | f \rangle$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. $\langle f | f \rangle = \int_a^b f^2(t) dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale et :

$$\langle f | f \rangle = 0 \iff \int_a^b f^2(t) dt = 0 \iff \begin{array}{c} f^2 \text{ est continue} \\ \text{et positive sur } [a, b] \end{array} \iff \forall t \in [a, b], \quad f^2(t) = 0 \iff f \text{ est nulle sur } [a, b]$$

Exemple 3 – $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$

Là aussi, l'intégrale est bien définie. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de plus,

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda P + Q | R \rangle = \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t))R(t) dt = \lambda \int_0^1 P(t)R(t) dt + \int_0^1 Q(t)R(t) dt = \lambda \langle P | R \rangle + \langle Q | R \rangle$$

par linéarité de l'intégrale; ce qui justifie la linéarité à gauche. On obtient la linéarité à droite par symétrie.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt = \int_0^1 Q(t)P(t) dt = \langle Q | P \rangle$
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\langle P | P \rangle = \int_0^1 P^2(t) dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale et :

$$\langle P | P \rangle = 0 \iff \int_0^1 P^2(t) dt = 0 \iff \begin{array}{c} P^2 \text{ est continue} \\ \text{et positive sur } [0, 1] \end{array} \iff \forall t \in [0, 1], \quad P^2(t) = 0 \iff \begin{array}{c} P \text{ admet une} \\ \text{infinité de racines} \end{array} \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Exemple 4 – $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$

Rappelons tout d'abord que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}.$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda A + B | C \rangle = \text{Tr}((\lambda A + B)^\top C) = \lambda \text{Tr}(A^\top C) + \text{Tr}(B^\top C) = \lambda \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$$

par linéarité de la trace; ce qui justifie la linéarité à gauche. La linéarité à droite est obtenue par symétrie.

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^\top B) \stackrel{\text{Tr}(M^\top) = \text{Tr}(M)}{=} \text{Tr}((A^\top B)^\top) = \text{Tr}(B^\top A) = \langle B | A \rangle$$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle A | A \rangle = \text{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \geq 0$ et :

$$\langle A | A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 0 \iff \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ik}^2 = 0 \iff A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 1

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable.

1. Montrer que $\mathcal{L}^2(I)$ possède une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$.

Faire de même avec $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

B – Norme euclidienne

Pour tout vecteur x de l'espace préhilbertien réel E , $\langle x|x \rangle \geq 0$. On pose alors :

- $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$ pour tout $x \in E$. Le réel positif $\|x\|$ est appelée norme euclidienne de x ;
- $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$. Le réel positif $d(x, y)$ est appelée distance de x à y .

Si $x \neq 0_E$, $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, il est dit unitaire.

Proposition 13.3 : Identités remarquables

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tous $x, y \in E$,

- (i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$; (ii) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle$;
- (iii) Identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;
- (iv) Identité de polarisation : $\langle x|y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

Théorème 13.4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors,

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration 1

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0_E$, le résultat est immédiat, y compris le cas d'égalité. Supposons désormais $x \neq 0_E$.
- $\langle \lambda x + y | \lambda x + y \rangle \geq 0$ et $\langle \lambda x + y | \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \langle x|x \rangle + 2\lambda \langle x|y \rangle + \langle y|y \rangle$.
C'est un trinôme en λ de signe constant donc son discriminant Δ est négatif ou nul.

$$\Delta = (2\langle x|y \rangle)^2 - 4\langle x|x \rangle \langle y|y \rangle = 4(\langle x|y \rangle^2 - \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle) \leq 0$$

Ainsi, $|\langle x|y \rangle| \leq \sqrt{\langle x|x \rangle} \sqrt{\langle y|y \rangle} = \|x\| \cdot \|y\|$.

- Cas d'égalité : $\Delta = 0$ donc il existe une racine double notée λ_0 vérifiant $(\lambda_0 x + y | \lambda_0 x + y) = 0$.
D'où $\lambda_0 x + y = 0$, soit $y = -\lambda_0 x$.

Démonstration 2

Soient $x, y \in E$.

- Si l'un des deux vecteurs est nul, le résultat est immédiat, y compris le cas d'égalité.
- Sinon, posons $x' = \frac{x}{\|x\|}$, $y' = \frac{y}{\|y\|}$ et enfin, $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle x|y \rangle \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

$$0 \leq \|x' - \varepsilon y'\|^2 = \|x'\|^2 + \|y'\|^2 - 2\varepsilon \langle x'|y' \rangle = 2 \left(1 - \frac{|\langle x|y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$$

On retrouve bien $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Le cas d'égalité est clair : $\frac{x}{\|x\|} = \varepsilon \frac{y}{\|y\|}$. ■

Exemple

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\int_0^1 P(t) dt \leq \sqrt{\int_0^1 P^2(t) dt}$.

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $Q = 1$.

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$, alors :

$$\left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \cdot \left(\int_a^b f'^2(t) dt \right) \geq \left(\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right)^2$$

Théorème 13.5 : Norme

L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

Démonstration

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|x\| = \langle x|x \rangle \geq 0$ donc $\|\cdot\|$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- $\|x\| = 0 \iff \langle x|x \rangle = 0 \iff x = 0$ et $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x|x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Donc :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y|x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

D'où $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

II | Orthogonalité

On considère un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

A – Vecteurs orthogonaux**Définition 13.6**

Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux si $\langle x|y \rangle = 0$.

Exemples

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$. Les vecteurs $x = (1, 0, 2)$ et $y = (2, 1, -1)$ sont orthogonaux.

2. $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Comme $\langle \cos, \sin \rangle = 0$, les vecteurs $\cos$ et $\sin$ sont orthogonaux.

Théorème 13.7 : Pythagore

Soient $x, y \in E$. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x|y \rangle = 0$.

Démonstration

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$ donc $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x|y \rangle = 0$. ■

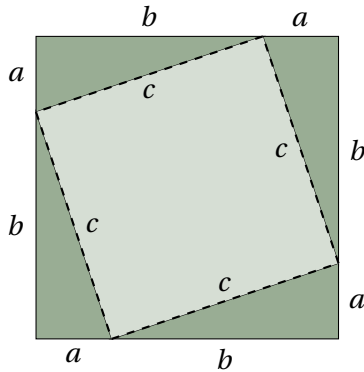


Illustration du théorème de Pythagore

L'aire du grand carré est égale à la somme de l'aire du petit carré et de l'aire des quatre triangles rectangles. Ainsi,

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$$

On trouve donc après simplification :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Théorème 13.8

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres.

Démonstration

Considérons un vecteur x orthogonal à tous les autres, c'est-à-dire que : $\forall y \in E, \langle x|y \rangle = 0$.

Il est en particulier orthogonal à lui-même, donc $\langle x|x \rangle = \|x\|^2 = 0$. Ainsi, $x = 0_E$. ■

B – Familles orthogonales et orthonormales**Définition 13.9 : Familles orthogonales et orthonormales**

(i) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ quelconque de vecteurs de E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \implies \langle e_i|e_j \rangle = 0.$$

(ii) Elle est dite orthonormale si elle vérifie de plus : $\forall i \in I, \quad \|e_i\| = 1$.

Proposition 13.10 : Pythagore « généralisé »

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E . Alors, $\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$.

Théorème 13.11

Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Démonstration

Démontrons ce résultat dans le cas d'une famille finie $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs.

• Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E$. Ainsi, quel que soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \middle| e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i|e_j \rangle = \lambda_j \|e_j\|^2 = 0$$

Le vecteur e_j étant non nul, $\lambda_j = 0$, et ceci, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La famille est bien libre.

• Une famille orthonormale est orthogonale et ses vecteurs sont unitaires donc non nuls. ■

Une famille orthonormale contient donc au plus $\dim(E)$ vecteurs si E est de dimension finie. Si elle en contient précisément $\dim(E)$, c'est une base. On la qualifie de *base orthonormale* ou de *base orthonormée*.

Théorème 13.12 : Décomposition dans une base orthonormée

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

$$\forall x \in E, \quad x = \langle x|e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x|e_n \rangle e_n = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont $(\langle x|e_i \rangle)_{1 \leq i \leq n}$.

Démonstration

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$.

Il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle x|e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \middle| e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i|e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} = x_j$$

Ainsi, $x = \langle x|e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x|e_n \rangle e_n = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i$. ■

Proposition 13.13

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On considère $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Alors,

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle^2 = X^\top X$$

Ce dernier résultat montre qu'en dimension finie, tous les produits scalaires se ramènent au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ via le choix d'une base orthonormale. Mais tout espace euclidien possède-t-il une base orthonormale?

Réponse : oui ! Tout espace vectoriel de dimension finie (donc tout espace euclidien) possède une base. Dans le cas d'un espace euclidien, on peut même construire une base orthonormée à l'aide du *procédé* ou *algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*. Ceci nous assure l'existence d'une base orthonormale.

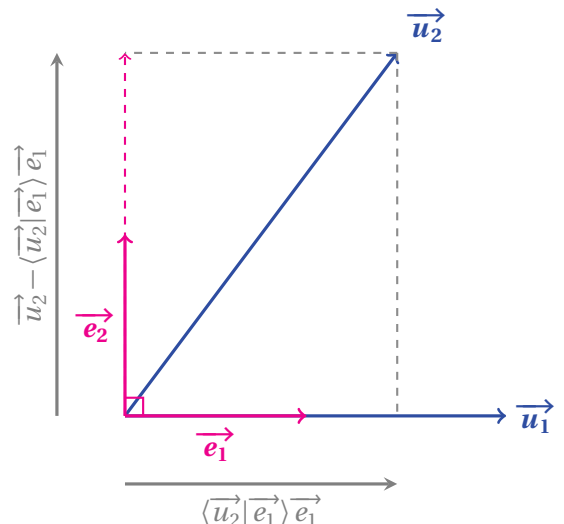
Le procédé d'orthonormalisation repose sur l'idée fondamentale suivante :

On considère une famille libre $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

- Commençons par poser $\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ pour obtenir un vecteur unitaire.
- On retranche ensuite à $\vec{u}_2$ sa composante suivant $\vec{e}_1$.
On obtient alors un vecteur $\vec{e}_2' = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2|\vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1$ orthogonal à $\vec{e}_1$. Il ne reste plus qu'à le diviser par sa norme (non nulle ?) pour obtenir un vecteur unitaire :

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2|\vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1}{\|\vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2|\vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1\|}$$

La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ obtenue est orthonormale.



Théorème 13.14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de E . Il existe alors une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

Démonstration

Démontrons ce résultat par récurrence sur n .

- **Initialisation** – La famille (u_1) étant libre, u_1 est non nul. On pose alors $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.
- **Hérédité** – Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
Considérons pour cela la famille $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ que l'on suppose libre. La famille $(u_1, \dots, u_n)$ étant libre, il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On pose alors :

$$e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

- (i) On souhaite que la famille $(e_1, \dots, e'_{n+1})$ soit orthogonale.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle e'_{n+1} | e_j \rangle = 0 \iff \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle u_{n+1} | e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i | e_j \rangle = \langle u_{n+1} | e_j \rangle - \lambda_j = 0$$

On pose donc $\lambda_j = \langle u_{n+1} | e_j \rangle$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (ii) e'_{n+1} est non nul. Dans le cas contraire, u_{n+1} serait combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$ donc de $(u_1, \dots, u_n)$. La famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ ne pourrait être libre ! On peut donc poser $e_{n+1} = \frac{e'_{n+1}}{\|e'_{n+1}\|}$.

La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est alors orthonormale.

- (iii) Enfin, puisque $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et que e_{n+1} est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$ et de u_{n+1} , $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$. Ceci achève la récurrence. ■

- Une telle famille $(e_1, \dots, e_n)$ est unique à condition que $\langle u_k | e_k \rangle > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- La matrice de passage de la base $(u_1, \dots, u_n)$ à $(e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure.
- On peut normaliser les vecteurs e'_k à chaque étape ou bien normaliser la famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ une fois construite.

Théorème 13.15

Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

Exercice 5

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((2, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel à l'aide du procédé vu précédemment.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que cette base soit orthonormale.

Exercice 7

Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = QR$, où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $R \in T_n^+(\mathbb{R})$.

C – Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

E désigne toujours un espace préhilbertien réel de dimension quelconque.

Définition 13.16 : Orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle orthogonal de F l'ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x | y \rangle = 0\}$$

Proposition 13.17

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- (i) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (ii) Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$. De plus, $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Démonstration

- (i) • Tout d'abord, $F^\perp$ est non vide car il contient le vecteur nul.
- Soient $x_1, x_2 \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\forall y \in F$, $\langle \lambda x_1 + x_2 | y \rangle = \lambda \underbrace{\langle x_1 | y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_2 | y \rangle}_{=0} = 0$.

Donc $F^\perp$ est stable par combinaison linéaire.

- (ii) Soit $x \in G^\perp$. Pour tout $y \in F$, $\langle x | y \rangle = 0$ car $y \in G$. Ainsi, $x \in F^\perp$. Comme attendu, $G^\perp \subset F^\perp$. ■

Assez facilement, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. Attention, dire que deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux ne signifie pas que l'un est l'orthogonal de l'autre. Penser à l'exemple de deux droites orthogonales dans l'espace.

Exercice 8

| Soit $u \in E$ non nul. Montrer que $\text{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan et en donner une équation.

Proposition 13.18

Soient F un sous-espace vectoriel de E et $u \in E$.

$u \in F^\perp$ si et seulement si u est orthogonal aux vecteurs d'une base quelconque de F .

Démonstration

L'implication est immédiate, montrons simplement la réciproque dans le cas d'un espace de dimension finie. Supposons u orthogonal aux vecteurs d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F . Soit $y \in F$. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

tel que $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$. Ainsi, $\langle u | y \rangle = \left\langle u \left| \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u | e_i \rangle = 0$. Donc $u \in F^\perp$. ■

Théorème 13.19

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration

Soient $x \in E$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Raisonnons par analyse/synthèse.

- *Analyse* – On suppose que $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$.

$x_F \in F$ donc $x_F = \sum_{i=1}^p \langle x_F | e_i \rangle e_i$ et $x_{F^\perp} = x - x_F \in F^\perp$. Ainsi,

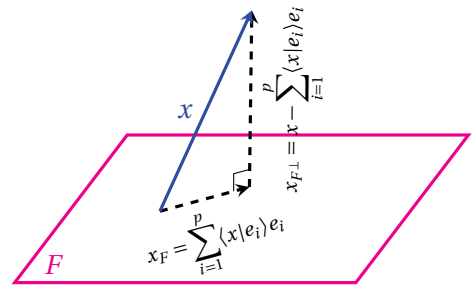
$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \langle x - x_F | e_i \rangle = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_F = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i$$

- *Synthèse* –

$$\text{On peut écrire } x = \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i}_{\in F} + \left(x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \right).$$

Il reste à montrer que $x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \in F^\perp$, ce qui est bien le cas car :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \left\langle x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \middle| e_j \right\rangle = \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle \langle e_i | e_j \rangle = 0$$



Corollaire 13.20 : Inégalité de Bessel

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de F et $x \in E$. Alors, $\sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.
Il y a égalité si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Corollaire 13.21

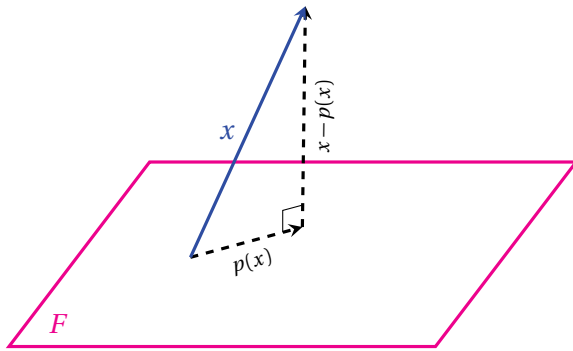
Soient E un espace euclidien (donc de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E .
 $F^\perp$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$. De plus, $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration

- Si $E = F \oplus G$ et que E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
- Il suffit de montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$ puis on conclut par égalité des dimensions. ■

D – Projection orthogonale et distance**Définition 13.22 : Projecteur orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors, $E = F \oplus F^\perp$.
On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.



Représentation du projeté orthogonal de x sur F

On rappelle que pour tout projecteur,

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$$

Un projecteur est un projecteur orthogonal ssi

$$\boxed{\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp}$$

Théorème 13.23

En notant p la projection orthogonale sur F , sous-espace vectoriel de E de dimension finie n ,

- Si $x \in E$, $p(x)$ est entièrement caractérisé par : $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F , alors $p(x) = \langle x | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x | e_n \rangle e_n$.

Démonstration

Redémontrons rapidement le deuxième point.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle x | e_i \rangle = \langle p(x) + (x - p(x)) | e_i \rangle = \langle p(x) | e_i \rangle + \langle x - p(x) | e_i \rangle = \langle p(x) | e_i \rangle$$

On retrouve donc le fait que $p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$. ■

Exercice 9

| Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 10

| Soient E un espace préhilbertien réel et p la projection orthogonale sur une droite vectorielle D de E .

- Pour $x \in E$, exprimer $p(x)$ en fonction de x .
- Même question lorsque p est la projection orthogonale sur un hyperplan H de E .

Exercice 11

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note x un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.

- Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(x)$.
- Soit M la matrice dans la base canonique d'une projection orthogonale.

Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires $X_1, \dots, X_r$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $M = \sum_{k=1}^r X_k X_k^\top$.

Définition 13.24 : Distance

Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

On appelle distance de x à F le réel $d(x, F) = \inf_{u \in F} d(x, u) = \inf_{u \in F} \|x - u\|$.

Intuitivement, la distance de x à F est la plus petite des distances entre x et les vecteurs de F . Cependant, rien ne nous garantit l'existence d'une *distance minimale*. Noter que la définition a bien un sens car $\{\|x - u\| \mid u \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée; elle admet une borne inférieure.

Théorème 13.25

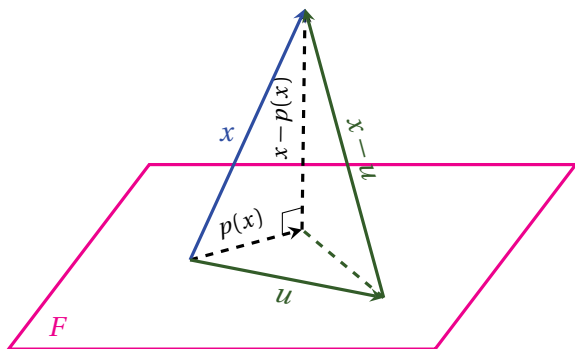
Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

$d(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\| = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

La distance est donc un minimum qui est atteint pour $u = p(x)$.

Démonstration

On peut à nouveau s'appuyer sur une simple figure.



Soit $u \in F$.

D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - u\|^2 = \underbrace{\|x - p(x)\|}_{\in F^\perp}^2 + \underbrace{\|u - p(x)\|}_{\in F}^2$$

Ainsi, $\|x - u\| \geq \|x - p(x)\|$ et la borne inférieure est atteinte pour $u = p(x) \in F$.

La borne inférieure est un minimum. ■

Exercice 12

| Déterminer la distance du vecteur $u = (1, 2, 3)$ au plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

III | Suites totales (pour votre culture, HP)

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne toujours un espace préhilbertien réel. Étant donné une famille orthonormale de vecteurs $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on cherche à généraliser l'expression $x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ valable en dimension finie en s'extrayant du

monde des combinaisons linéaires pour donner un sens à $\sum_{i=1}^{+\infty} \langle x | e_i \rangle e_i$.

Définition 13.26 : Suite totale

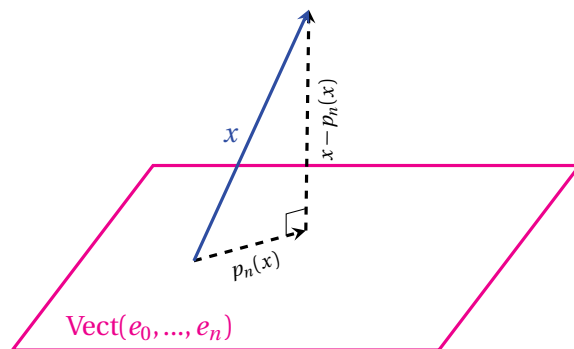
On dit qu'une suite de vecteurs $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E est totale si pour tout $x \in E$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists y \in \text{Vect}(e_i), \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

Par caractérisation séquentielle de la limite, cela revient à dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Vect}(e_i)$ qui converge vers x . En d'autres termes, $\text{Vect}(e_i)$ est *dense* dans E .

Théorème 13.27

Soient $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de E et pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. Alors, pour tout x de E , $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .



Représentation du projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$

Démonstration

Soient $x \in E$ et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de E . On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Vect}(e_i)_{0 \leq i \leq n}$ et l'on cherche à montrer que $\|x - p_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On fixe $\varepsilon > 0$.

Par définition d'une famille totale, il existe $y \in \text{Vect}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$.

Le vecteur y étant combinaison linéaire d'un nombre nécessairement fini de vecteurs e_i , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_{n_0}$. Remarquons qu'alors, pour tout $n \geq n_0$, $y \in F_n$ et donc,

$$\|x - p_n(x)\| = \inf_{u \in F_n} \|x - u\| \leq \|x - y\| \leq \varepsilon$$

On vient finalement d'établir que pour tout $x \in E$, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x | e_i \rangle e_i$.

On obtient alors la version « complète » de l'inégalité de Bessel.

Corollaire 13.28 : Égalité de Parseval

Si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale totale d'éléments de E , alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x | e_i \rangle^2$.

Démonstration

Le théorème de Pythagore va encore une fois venir à notre rescousse. Il suffit d'écrire pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x - p_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 + \|x - p_n(x)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x | e_i \rangle^2$$

Exercice 13

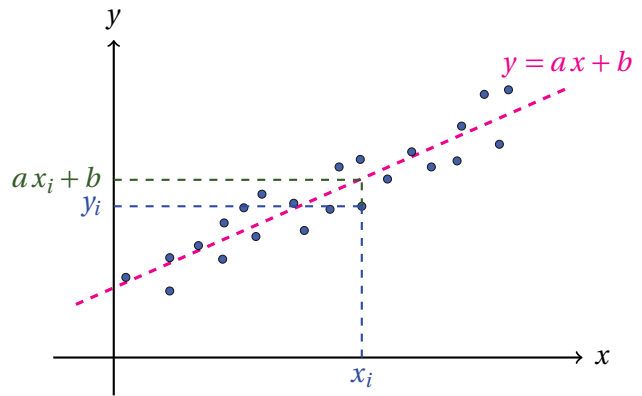
Montrer que la famille $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale de l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ pour un produit scalaire à préciser. On pourra utiliser le théorème de Weierstrass.

IV | Méthode des moindres carrés (pour votre culture, HP)

Il est courant, en physique-chimie, en sciences industrielles, ou plus généralement dans toute discipline expérimentale (biologie, chimie, économie, ...), d'avoir à comparer des données expérimentales et de conjecturer une éventuelle dépendance linéaire entre deux paramètres donnés (par exemple entre l'allongement d'un ressort et la force de traction exercée sur celui-ci).

Supposons que l'on dispose d'une série de n mesures de la forme (x_i, y_i) avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On cherche à trouver « la droite de meilleure approximation » de nos mesures, c'est-à-dire la droite qui décrit au mieux la tendance du nuage observé. C'est le principe de régression linéaire.

Mais quel sens donner à cette fameuse « droite de meilleure approximation » ?



Si la droite recherchée a pour équation $y = ax + b$, l'écart ponctuel entre la mesure obtenue (x_i, y_i) et la mesure attendue $(x_i, ax_i + b)$ vaut $|y_i - ax_i - b|$. On peut dès lors chercher à minimiser l'écart global entre les points et la droite, écart qui peut être défini de différentes façons. Par exemple,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |y_i - ax_i - b|; \quad \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|; \quad \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

On choisit de minimiser la dernière de ces quantités dans la méthode dite des moindres carrés. Il suffit pour cela d'interpréter $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ comme la distance d'un vecteur à un certain sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Posons $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Z = aX + b = (ax_1 + b, \dots, ax_n + b)$ et $F = \text{Vect}(X, (1, \dots, 1))$.

Il vient $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|Y - Z\|^2 = \inf_{Z \in F} \|Y - Z\|^2 = d^2(Y, F)$. D'après ce qui précède, $d^2(Y, F)$ vaut $\|Y - p(Y)\|^2$ où p est la projection orthogonale sur F . Alors, $Y - Z = Y - p(Y) \in F^\perp$ c'est-à-dire :

$$\langle Y - Z | X \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle Y - Z | (1, \dots, 1) \rangle = 0$$

Cela nous conduit à résoudre le système suivant d'inconnues a et b :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

On obtient après simplification le système linéaire 2×2 suivant :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

On obtient ainsi les coefficients a et b recherchés.

Une petite mise en garde cependant, rien ne nous garantit que la loi étudiée est linéaire !