

TD EM3

Induction électromagnétique

A. Rails de LAPLACE

Un circuit est constitué de deux rails rectilignes parallèles horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est a . Le circuit comprend une résistance R et il est fermé par une tige parfaitement conductrice, de masse m qui peut glisser sans frottement sur les deux rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical. A l'instant initial, il n'y a pas de courant et la tige est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$, puis abandonnée à elle-même.

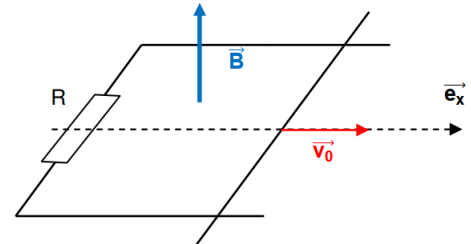


FIGURE 1 – Rails de LAPLACE

1. Déterminer l'équation mécanique (M) du système.
2. Déterminer l'équation électrique (E) du système.
3. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse v de la tige.
4. Donner l'expression de sa vitesse $v(t)$. Tracer l'allure de $v(t)$.
5. Effectuer un bilan de puissance. Qu'advient-il de l'énergie cinétique initiale?
6. Pourquoi la puissance de la force de LAPLACE n'intervient-elle pas dans le bilan?

B. Déplacement d'une spire dans un champ magnétique

Une spire conductrice rectangulaire MNPQ mobile, de côtés de longueur a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, est en translation dans le plan (Oxy) parallèlement à l'axe (Ox) et dans le sens des x croissants.

Dans la zone d'espace définie par $x > 0$ existe un champ magnétique uniforme et égal à $\vec{B} = B\vec{e}_z$, avec $B > 0$. On admet que le champ magnétique est nul en dehors de cette zone, sans se préoccuper du problème lié à la discontinuité de $\vec{B}$. On néglige toute force autre que magnétique.

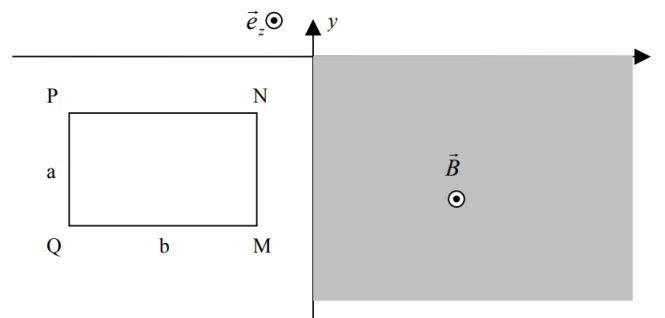


FIGURE 2 – Spire

A un instant t , on notera $x(t)$ l'abscisse du côté MN (de longueur a) de la spire et $v(t)$ sa vitesse. A l'instant où le côté MN de la spire conductrice pénètre dans la zone où règne le champ magnétique la vitesse de la spire est non nulle et égale à v_0 .

1. Décrire qualitativement le phénomène qui se produit lorsque la spire pénètre avec une vitesse non nulle dans la zone où règne le champ magnétique.
2. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire (on précisera le sens conventionnel choisi pour l'orientation de la spire et on distinguera très clairement différents cas selon les valeurs de x).
3. En déduire l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire dans chacun des cas précédents.
4. En déduire, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(x)$. On pourra utiliser le fait que :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

6. En déduire, par intégration de l'équation précédente, la valeur de la vitesse v en fonction de x . On précisera le domaine de validité de la relation ainsi obtenue. A quelle condition la spire conductrice pourra-t-elle rentrer entièrement dans la zone où règne le champ magnétique? On suppose que la condition précédente est vérifiée et que la vitesse de la spire est non nulle à l'instant où la spire se trouve entièrement dans la zone où règne le champ magnétique. Quel sera le mouvement ultérieur de la spire?
7. Citer une application pratique du phénomène physique précédent.

C. Inductance d'un solénoïde infini ● ○ ○

Après avoir rappelé l'expression du champ magnétique généré par un solénoïde infini, exprimer son inductance L en fonction notamment du nombre de spires N .

D. Le haut-parleur électrodynamique ● ● ○

On s'intéresse au fonctionnement d'un haut parleur électrodynamique composé :

- d'un aimant permanent annulaire qui fournit un champ $\vec{B}$ radial et constant.
- d'une bobine de longueur totale de fil ℓ , de résistance $R = 2\Omega$ et d'inductance L , placée dans l'entrefer de l'aimant et soumise à une tension u .
- d'une membrane solidaire de la bobine, pouvant se mouvoir suivant l'axe (Ox).

Le dispositif de rappel est assimilé à un ressort de raideur k et les frottements fluides sont modélisés par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Cette force de frottement fluide traduit la transmission acoustique de la membrane à l'air environnant; la puissance de cette force correspond à la puissance émise. On fournit sur la figure 3 deux schéma en situations.

La situation est modélisable par le schéma-équivalent présenté ci-après (figure 4) et à partir duquel l'étude suivante se base. L'écartement CD est la longueur de l'enroulement ℓ .

1. Déterminer la force de Laplace et déterminer l'équation mécanique du mouvement (M).
2. Déterminer la fem e et déterminer l'équation électrique (E).
3. Mettre en évidence le couplage des deux équations.
4. Effectuer un bilan de puissance. On pourra faire apparaître le terme énergétique $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}Li^2$, et on interprétera physiquement chacun des termes du bilan.
5. Que devient ce bilan si on s'intéresse uniquement à la moyenne, la tension d'alimentation u étant supposée périodique? Définir dans ce cas le rendement du haut parleur.

La tension appliquée $u(t)$ est désormais sinusoïdale de pulsation ω . On peut adjoindre à la tension $u(t)$ un nombre complexe $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$

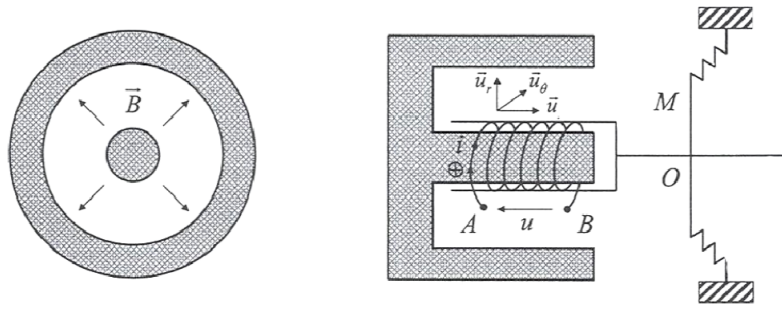


FIGURE 3 – Vues du haut-parleur

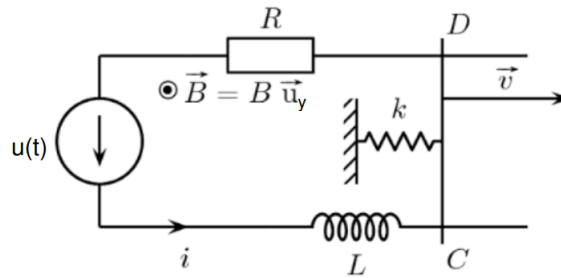


FIGURE 4 – Modélisation du haut-parleur en rails de LAPLACE

6. Déterminer l'impédance du haut-parleur $\underline{Z}$. On la mettra sous la forme $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_m$.
7. Montrer que l'impédance acousto-mécanique (ou motionnelle) $\underline{Z}_m$ peut être modélisée par trois composants électriques R' , L' et C' (placés en parallèle) à déterminer en fonction des données. A quelle caractéristique mécanique sont-ils liés ?
8. AN : $B = 0,20 \text{ T}$; $\ell = 20 \text{ m}$; $m = 120 \text{ g}$; $k = 43 \text{ kN.m}^{-1}$; $\alpha = 6,0 \text{ kg.s}^{-1}$.
9. On peut montrer que le rendement défini à la question 5 a pour expression :

$$\eta = \frac{1}{1 + RR' \cdot \left(\frac{1}{R'^2} + \left(C'\omega - \frac{1}{L'\omega} \right)^2 \right)}$$

Pour quelle valeur de la pulsation et quelle fréquence est-il maximal ?

10. Déterminer le rendement pour une fréquence de 300 Hz.
11. Conclure sur l'utilisation de ce haut-parleur.

E. Inductance mutuelle

Un très long solénoïde de rayon a est constitué de n_1 spires par unité de longueur. Le solénoïde est entouré d'une bobine plate de résistance R , formée de N_2 spires circulaires de rayon $r > a$ et de même axe que le solénoïde, comme l'indique la figure 5a. Le solénoïde est parcouru par un courant variable $i(t)$.

1. Déterminer la force électromotrice e induite dans la bobine.
2. Commenter le comportement du montage si le courant n'est plus variable.
3. Que devient cette fem si la bobine n'entoure plus le solénoïde ?
4. Que vaut le coefficient d'inductance mutuelle M ?

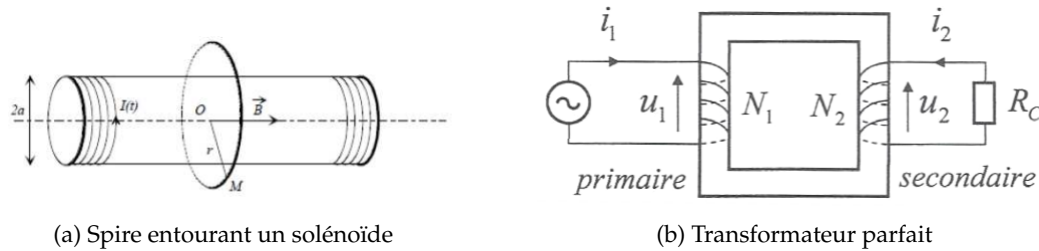


FIGURE 5 – Situations d'induction mutuelles

F. Transformateur parfait

Un transformateur est schématiquement (figure 5b) constitué de deux circuits de faibles résistances r_1 et r_2 et d'inductances propres L_1 et L_2 , de nombre de spires N_1 pour le primaire et N_2 pour le secondaire. Le primaire est alimenté par une tension alternative $u_1(t)$ et le secondaire $u_2(t)$ alimente une charge R_C .

Ces enroulements sont traversés par une carcasse métallique (constituée en générale d'un matériau ferro-magnétique) qui canalise les lignes de champ magnétique. Toutes les lignes de champ issues de la première bobine traverse la seconde : on dit que le couplage est parfait (ou supposé comme tel dans cet exercice) et on a $M^2 = L_1 L_2$. On rappelle que l'inductance est proportionnelle au carré du nombre de spire.

1. Établir les équations électriques dans chaque circuit et simplifier les termes négligeables.
2. Établir le rapport du transformateur m égal au rapport de $\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$. L'exprimer en fonction des nombre de spires.

G. Couplage de deux circuits

Les deux-circuits ci-contre sont couplés par une inductance mutuelle M .

1. Établir les équations électriques dans chaque circuit.
2. Effectuer un bilan de puissance, et y insérer l'expression de l'énergie magnétique totale E_m .
3. Quel est l'intérêt d'une telle installation ?

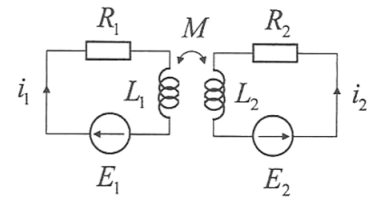


FIGURE 6 – Couplage inductif

H. Machine asynchrone

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cette machine se compose principalement de deux parties :

- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant $B(t)$,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface S mobile autour d'un axe.

1. Étude du stator

Soit un ensemble de trois bobines (figure 7), dont les axes sont perpendiculaires à Oz et régulièrement décalés de $\frac{2\pi}{3}$. Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_s dont les intensités sont les suivantes : $i_1(t) = I_0 \cos(\omega_s t)$; $i_2(t) = I_0 \cos(\omega_s t - \frac{2\pi}{3})$; $i_3(t) = I_0 \cos(\omega_s t - \frac{4\pi}{3})$.

La fréquence d'alimentation de ces bobinages statoriques est égale à $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50$ Hz. Chaque bobine crée en O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme : $\vec{B}_k = K i_k(t) \vec{e}_k$ (K est une constante qui s'exprime en H.m^{-2} et $\vec{e}_k$ est le vecteur unitaire de l'axe de la $k^{\text{ème}}$ bobine).

1. Justifier l'unité de K par une analyse dimensionnelle.

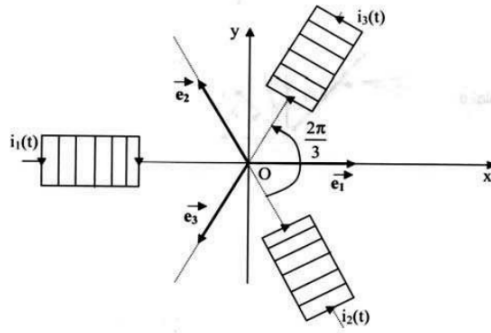


FIGURE 7 – Bobinages statoriques

2. On donne le théorème de FERRARIS :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos \left(\omega_s t - \frac{2k\pi}{p} \right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} (\cos(\omega_s t) \vec{e}_x + \sin(\omega_s t) \vec{e}_y)$$

En déduire que les 3 bobines créent au point O un champ tournant $\vec{B}$ dont on donnera l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Donner la norme du champ $B_0 = \|\vec{B}\|$ en fonction de K et I_0 . Préciser la vitesse angulaire de rotation du champ et calculer sa valeur numérique en tours par minutes (tour/min).

2. Entraînement du rotor

Le rotor, modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface S orientée selon la normale $\vec{n}$ tourne autour d'un axe (Oz) avec une vitesse angulaire ω ($\omega \geq 0$) (figure 8).

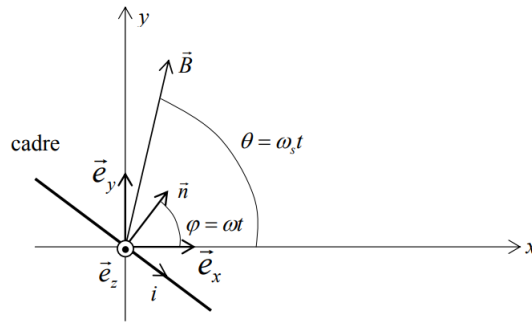


FIGURE 8 – Modélisation du rotor

3. Exprimer le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ généré par le stator à travers le cadre en fonction de B_0, S, ω, ω_s et t . En déduire la force électromotrice d'induction $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction du flux maximum $\Phi_0 = B_0 S$, de la vitesse angulaire de glissement $\Omega = \omega_s - \omega$ et de t .

Le cadre constitue un circuit série de résistance R et d'inductance L .

4. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ induit dans le cadre. L'orientation de l'intensité du courant induit est indiquée sur la figure 8 sur laquelle la spire est vue de dessus.
5. On se place en régime permanent sinusoïdal ; l'intensité dans le cadre s'écrit alors $i(t) = I_M \sin(\Omega t - \psi)$. En utilisant la notation complexe, montrer que :

$$i(t) = I_M e^{j(\Omega t - \psi - \frac{\pi}{2})} = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j(\Omega t - \frac{\pi}{2})}$$

6. En déduire l'expression de I_M en fonction de Φ_0, Ω, R et L . Exprimer $\cos(\psi)$ en fonction de Ω, R et L et préciser le signe de $\sin(\psi)$. Préciser si $i(t)$ est en avance ou en retard par rapport à $e(t)$.
7. On donne $\Phi_0 = 10^{-3} \text{ T.m}^2$ et $L = 100 \text{ mH}$. Donner la valeur numérique de la valeur efficace de $i(t)$ dans le cas où $R \ll L\Omega$.
8. Comment mesure-t-on en pratique une intensité efficace? Quelles différences y-a-t-il entre les positions AC et DC d'un multimètre numérique? La signification des positions AC et DC est-elle la même sur l'oscilloscope?
9. On rappelle l'expression du moment magnétique $\vec{M}$ du rotor : $\vec{M} = i(t)S\vec{n}$. En déduire le couple électromagnétique $\vec{\Gamma}$ des forces de LAPLACE s'exerçant sur le cadre puis sa projection $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$ sur l'axe de rotation en fonction de $S, B_0, I_M, \psi, \Omega$ et t .
10. On donne la relation de trigonométrie suivante : $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. Montrer que la valeur moyenne de Γ , notée Γ_m , est donnée par :

$$\Gamma_m = \left(\frac{\Phi_0^2}{2L} \right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2}$$

11. On peut tracer l'allure de Γ_m en fonction de ω (figure 9) :

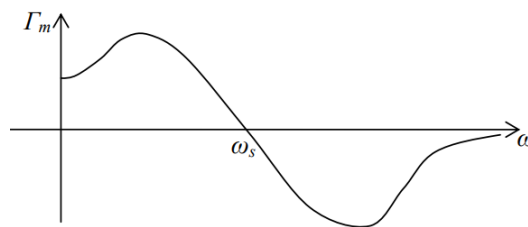


FIGURE 9 – Variations de Γ_m avec ω

A quoi correspond physiquement la limite de Γ_m quand ω tend vers 0? Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant?

3. Puissance et rendement d'un moteur

On considère maintenant un moteur du type précédent relié à une charge par un arbre. Le moment d'inertie de l'arbre est noté J . On notera Γ le couple délivré par le moteur, Γ_r le couple résistant dû à la charge (Γ et Γ_r positifs).

12. En appliquant le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe de rotation, relier la dérivée de la vitesse angulaire Ω_m de l'arbre à J, Γ et Γ_r .
13. On considère les courbes suivantes correspondant à trois moteurs différents (figure 10) reliés à la même charge exerçant un couple résistant Γ_r constant. Expliquer de façon précise quel(s) moteur(s) est (sont) susceptible(s) de démarrer.

On se place maintenant en régime permanent; on a alors $\Gamma(\omega) = \Gamma_r$.

14. En utilisant les résultats de la deuxième partie, donner l'expression de la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur $\langle P_{\text{meca}} \rangle = \Gamma_m \omega$ en fonction de $\Phi_0, \omega, \omega_s, R$ et L .
15. En utilisant à nouveau les résultats de la deuxième partie, donner l'expression de la puissance moyenne $\langle P_J \rangle$ dissipée par effet Joule dans les conducteurs du rotor en fonction de $\Phi_0, \omega, \omega_s, R$ et L .
16. En déduire la puissance électrique moyenne $\langle P_{el} \rangle$ fournie au moteur en fonction de $\Phi_0, \omega, \omega_s, R$ et L .
17. On introduit maintenant la grandeur $g = \frac{(\omega_s - \omega)}{\omega_s}$, appelée glissement, qui caractérise l'écart relatif entre la vitesse angulaire de synchronisme et la vitesse angulaire de rotation de l'arbre du moteur. Exprimer le rendement du moteur en fonction de g . La vitesse de rotation ω des moteurs asynchrones s'écarte rarement de plus de 5% de la vitesse de rotation ω_s du champ tournant. Lorsqu'elle s'en écarte de 5%, calculer le rendement du moteur asynchrone.

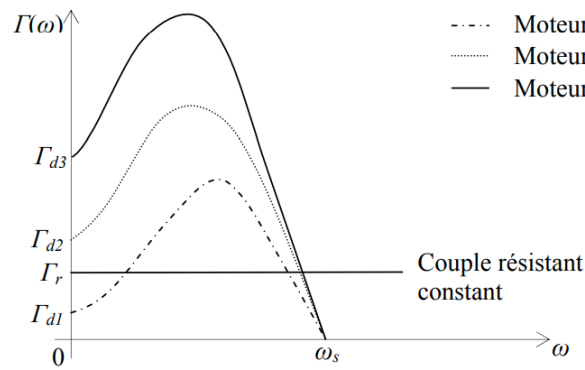


FIGURE 10 – Comparaison de 3 moteurs

I. Double rail de LAPLACE

Deux tiges cylindriques, ayant des caractéristiques identiques (notamment leur résistance R et leur masse m), sont posées sur deux rails séparés d'une distance a , placés dans un champ magnétique uniforme de valeur B_0 . Chaque tige est reliée à un ressort de raideur k comme indiqué sur le schéma ci-contre.

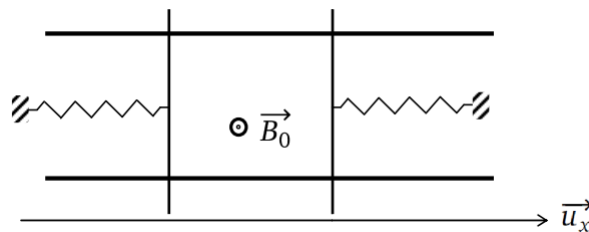


FIGURE 11 – Birails de LAPLACE

Les positions des tiges sont repérées par les abscisses $x_1(t)$ et $x_2(t)$, mesurées par rapport aux positions d'équilibre. A l'instant initial, les positions et vitesses initiales valent : $x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}$

1. Déterminer les équations du mouvement. Que peut-on en dire ?
2. Quels changements de variables faut-il créer pour pouvoir effectuer la résolution ?
3. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes : $x_{10} = A, x_{20} = 0, v_{10} = 0, v_{20} = 0$.
4. La résolution avec des conditions initiales plus riches est possible, mais longue. Peut-on imaginer une solution numérique ? AN : $k = 10 \text{ N.kg}^{-1}, m = 100 \text{ g}, a = 1.0 \text{ m}, R = 1.0 \Omega$ et $B_0 = 0.447 \text{ T}$.

J. Mesure d'une inductance mutuelle

Le montage ci-contre permet de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines. Les deux bobines se font face comme sur la figure. La première bobine est montée en série avec une résistance $R = 100 \Omega$ et un générateur de tension e_0 harmonique de fréquence $f = 2,0 \text{ kHz}$. Les tensions u_1 et u_2 sont mesurées grâce à un oscilloscope supposé idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée infinie.

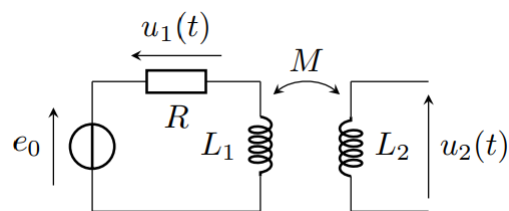


FIGURE 12 – Mesure d'induction mutuelle

1. Quelle est l'intensité circulant dans la bobine 2 ? D'après la loi de comportement habituelle de la bobine, que vaudrait alors la tension u_2 ? Pourquoi cette loi n'est-elle pas applicable telle quelle ici ?
2. Exprimer la tension u_2 en fonction de M et u_1 .

3. Calculer M sachant que les tensions lues à l'oscilloscope ont des amplitudes $U_1 = 3,00 \text{ V}$ et $U_2 = 0,50 \text{ V}$.
4. On fait tourner la bobine sur elle-même dans le plan de la paillasse. Indiquer sans calcul comment est modifiée la valeur de M lorsque l'angle de rotation vaut 180° ? 90° ? Même question si l'on aligne les axes des deux bobines.

K. Négliger l'auto-induction ?

On fait très souvent l'approximation de négliger l'auto-induction dans les circuits ne comportant aucun bobinage. On s'intéresse dans cet exercice à la validité de cette approximation pour un circuit a priori quelconque schématisé ci-contre, d'auto-inductance L . Le schéma ne préjuge pas de la présence ou non de bobinages. Le circuit, de surface totale S et de résistance R , est plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos(\omega t) \vec{n}$.

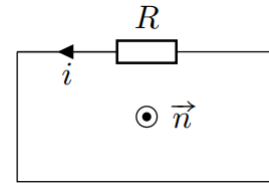


FIGURE 13 – L est-il négligeable ?

1. Pour commencer, on ne prend en compte que la fem induite par le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$. Calculer son flux au travers du circuit, et en déduire le schéma électrique équivalent. Que vaut l'intensité i ?
2. Désormais, on considère aussi le phénomène d'auto-induction. Exprimer le flux magnétique au travers du circuit et représenter le schéma électrique équivalent. Établir l'équation différentielle vérifiée par i .
3. Le champ extérieur étant sinusoïdal, tous les signaux dans le circuit le sont aussi et on fait le choix de travailler avec la notation complexe. Exprimer le rapport $\underline{H}$ et $H = \frac{|E_L|}{|E_{\text{ext}}|}$ des amplitudes de la fem auto-induite et de la fem induite par le champ extérieur. En déduire à quelle condition sur la pulsation la fem auto-induite est négligeable.
4. Pour fixer les idées, calculer numériquement la pulsation et la fréquence caractéristiques avec des valeurs de R et L utilisées habituellement en TP d'électronique. Commenter ?
5. En proposant des ordres de grandeur raisonnables, refaire le même calcul pour un circuit de même résistance mais à une seule « spire » composée d'un fil de cuivre de TP. L'inductance d'un circuit circulaire de diamètre D est donnée par

$$L = \mu_0 \frac{D}{2} \left(\ln \frac{8D}{d} - 2 \right)$$

où d est le diamètre du fil de cuivre. Est-il légitime de négliger l'inductance du circuit ?