Généralités sur les Fonctions

#SecondeMaths

Images et Antécédents

« valeur d'entrée » « valeur de sortie »

$$\underbrace{x}_{\text{Antécédent}} \longmapsto \underbrace{f(x) = y}_{\text{Image}}$$

Expression algébrique

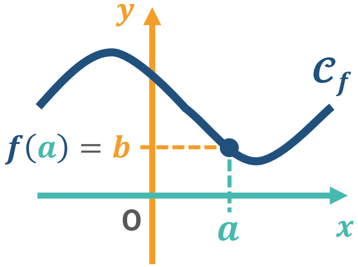
antécédent

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3$$

L'image de chaque antécédent peut se calculer avec l'expression

Représentation graphique

Les images se lisent sur l'axe des ordonnées



Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses

Si « $f(2) = -3$ » alors on peut écrire que :

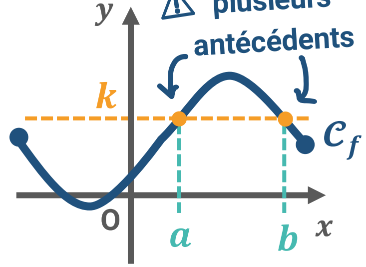
« -3 est l'image de 2 par la fonction f. »

« 2 est l'antécédent de -3 par la fonction f. »

Résolution Graphique de :

$f(x) = k$

⚠ Il peut avoir plusieurs antécédents

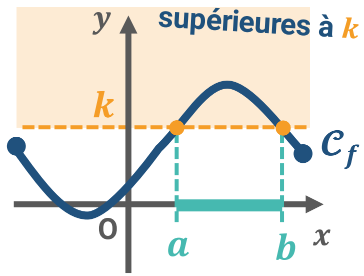


$S = \{a; b\}$

« seulement a et b »

$f(x) > k$

valeurs strict. supérieures à k



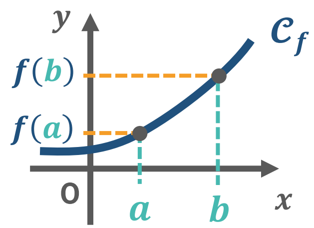
$S = \,]a; b[$

« tous les nombres compris entre a et b »

Comparaison d'Images

f est croissant

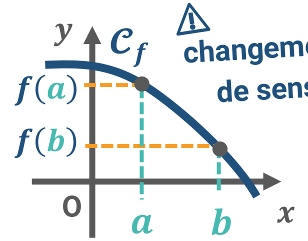
$$a \leq b$$
$$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$$



f est décroissant

$$a \leq b$$
$$\Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

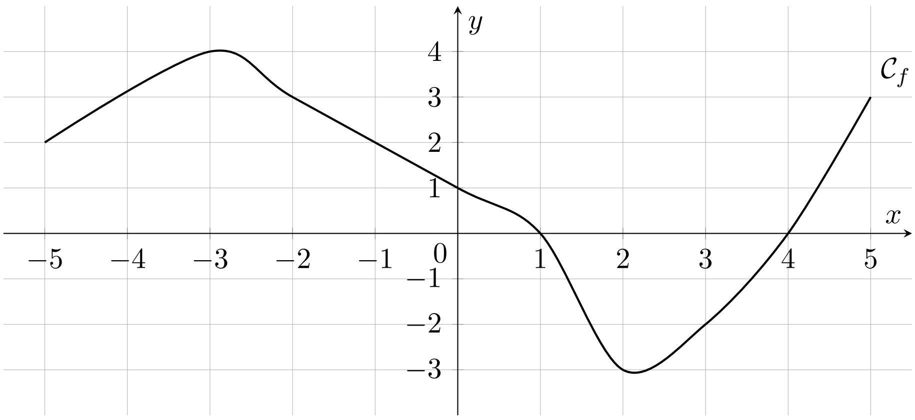
⚠ changement de sens



Marche aussi avec les tableaux de variation

EXERCICE 1

On considère la fonction f et sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé. Dans tout cet exercice, les réponses se feront par **lectures graphiques**, on indiquera, **en bleu**, sur le graphique les traits nécessaires aux lectures.



1. Indiquer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer :
   (a) L'image de 3 puis l'image de (-2).
   (b) Les éventuels antécédents de 0.
   (c) Les éventuels antécédents de 2.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur son ensemble de définition, s'ils existent.
4. Indiquer l'intervalle image de la fonction f.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

EXERCICE 2

On considère les fonctions f et h définies sur l'ensemble des réels et leurs représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ par :

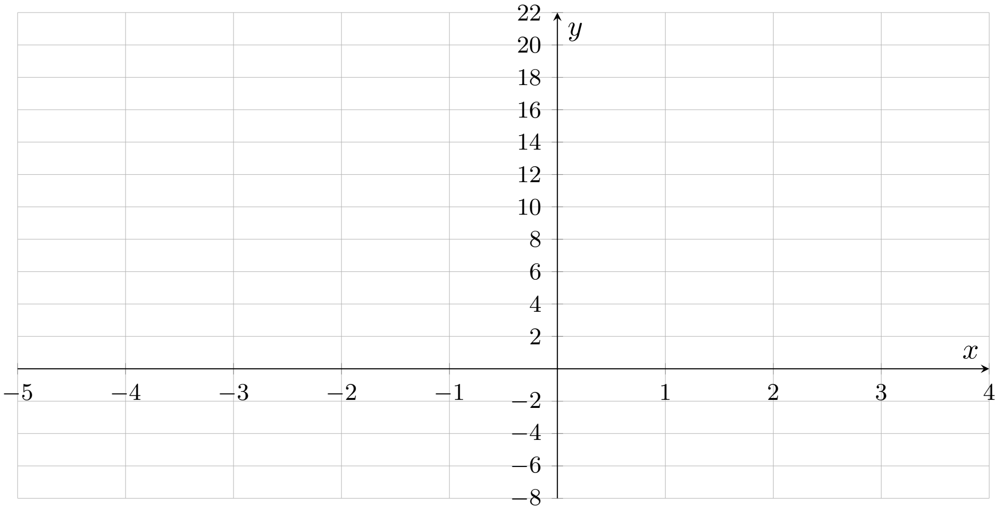
$$f(x) = 2x^2 + x - 6 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2 - 4}{1 + x^2}$$

1. Calculer l'image de $(5 - \sqrt{2})$ par la fonction f, en détaillant les calculs.
2. Calculer l'image de $\dfrac{-2}{3}$ par la fonction h, en détaillant les calculs.
3. Montrer que, pour tout x réel, $f(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{49}{8}$.
4. En remarquant que, pour tout x réel, $2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{49}{8} = 2\left[\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{49}{16}\right]$, factoriser l'expression de $f(x)$.

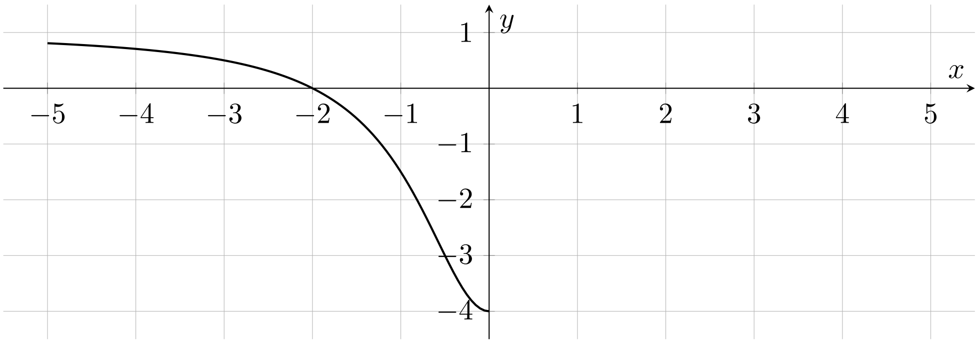
5. Déterminer par le calcul, les éventuels antécédents de 0.
6. Déterminer par le calcul, les éventuels antécédents de $-\frac{49}{8}$.
7. Montrer que, pour tout x réel, $f(x) \geq -\frac{49}{8}$.
8. En déduire l'existence d'un extremum pour la fonction f, dont on précisera la valeur.
9. À l'aide de la calculatrice, établir un tableau de valeurs pour la fonction f pour x compris entre -4 et 3 avec un pas de $0,5$. On complétera le tableau ci-dessous :

x	-4	$-3,5$	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$f(x)$															

10. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$ dans le repère ci-dessous.



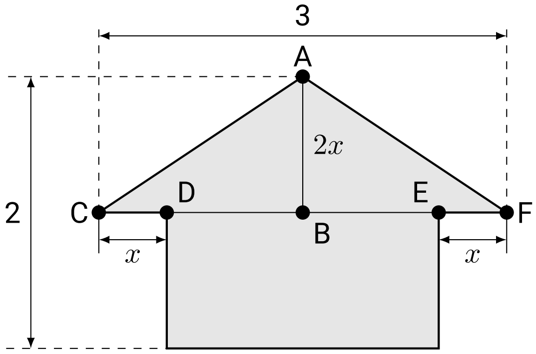
11. Étudier la parité de la fonction h.
12. On a tracé une restriction de la courbe $\mathcal{C}_h$ sur l'intervalle $[-5\,;\,0]$. Compléter sur le graphique ci-dessous la courbe afin d'obtenir $\mathcal{C}_h$ sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ en justifiant votre tracé.



EXERCICE 3

Une société sponsorise un salon immobilier et souhaite apposer son logo de 3 mètres sur 2 mètres, sur les murs où se déroule l'évènement.

Ci-contre le logo.



On pose :

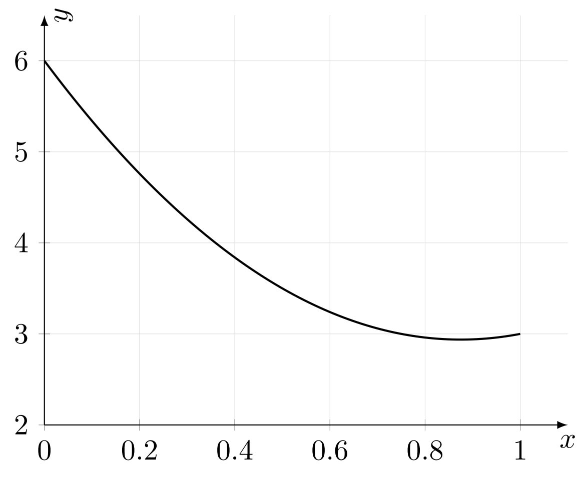
- $AB = 2x$;
- $CD = EF = x$.

1. On nomme $f(x)$ l'aire du logo, la fonction f étant définie sur $[0\,;\,1]$.
   Démontrer que : $f(x) = 4x^2 - 7x + 6$.
2. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au centième) :

x	0	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	1
$f(x)$								

3. On donne, ci-contre, la courbe de la fonction f :
   On souhaite connaître la valeur de x pour laquelle l'aire du logo est égale à $3,8$ m^2.
   - À l'aide du graphique ci-contre, donner une valeur approximative de x.
   - Puis à l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de x au millième près.

   On souhaite connaître la valeur de x pour laquelle l'aire du logo est inférieure à $2,96$ m^2.
   - En utilisant la calculatrice, résoudre l'inéquation $f(x) < 2,96$ avec une précision de $0,01$.



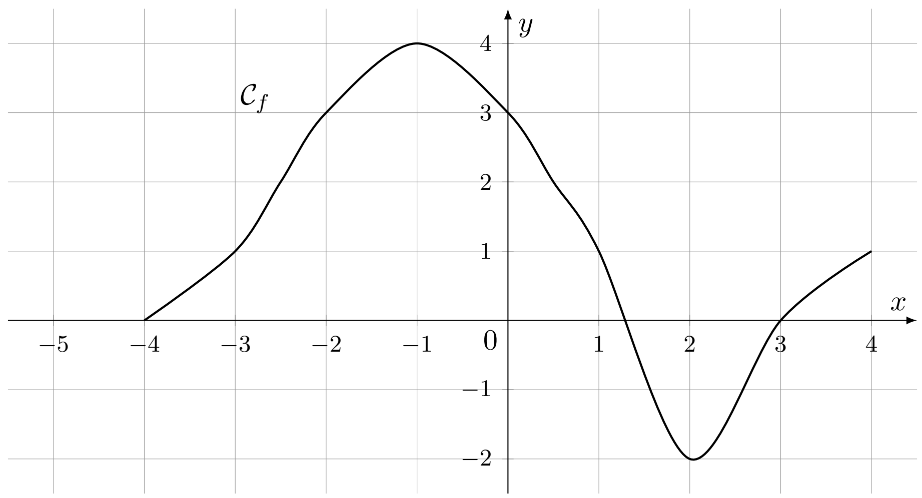
EXERCICE 1 (4 pts)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $f(x) \geq 3$ b) $f(x) > 1$ c) $f(x) < 2$

(d) Donner le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.

(e) Dresser le tableau de variations de cette fonction.



EXERCICE 2 (4 pts)

Voici le tableau de variations d'une fonction f :

x	-5		-1		0		2		3
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	0	↘	-5

(a) Donner l'ensemble de définition de f.

(b) Donner $f(2)$, $f(-5)$.

(c) Donner un antécédent de -1 par f.

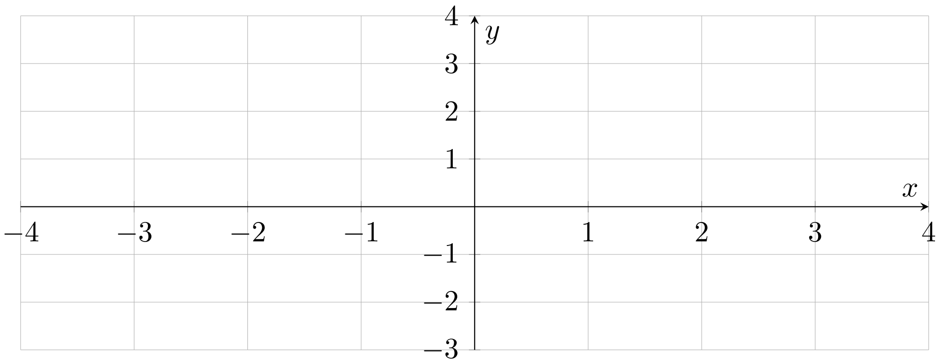
(d) Quel est le maximum de f ?

(e) Comparer si possible $f(-3)$ et $f(-2)$; $f(2)$ et $f(\frac{5}{2})$; $f(-3)$ et $f(2)$.

EXERCICE 3 (3 pts)

Tracer, dans le repère ci-dessous, une courbe susceptible de représenter la fonction h sachant que :

- $h(-3) = 0$, $h(0) = 2$, $h(2) = -1$,
- h est croissante sur $[-3\,;\,0]$ et sur $[1\,;\,3]$, h est décroissante sur $[0\,;\,1]$,
- le maximum de h est 3, le minimum de h est -2.



EXERCICE 4 (9 pts)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

(a) Donner le tableau de valeurs de la fonction pour x variant de -4 à 4 avec un pas de 2.

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$					

(b) Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à la courbe de f (justifier) :
$A(-2\,;\,-1)$ et $B(-1\,;\,-4)$?

(c) Faire afficher à l'écran de la calculatrice, la courbe représentative de la fonction f.
On présentera un croquis sur la copie et on donnera les valeurs de la fenêtre graphique choisie X_{min}, X_{max}, X_{grad}, Y_{min}, Y_{max}, Y_{grad}.

(d) Par lecture graphique à la calculatrice, conjecturer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

(e) Vérifier par le calcul les solutions lues sur le graphique.

(f) Donner alors le tableau de signe de la fonction f sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.

(g) En utilisant les fonctions du menu calculs de la calculatrice, conjecturer le minimum de f ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint.

(h) Dresser alors le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 1

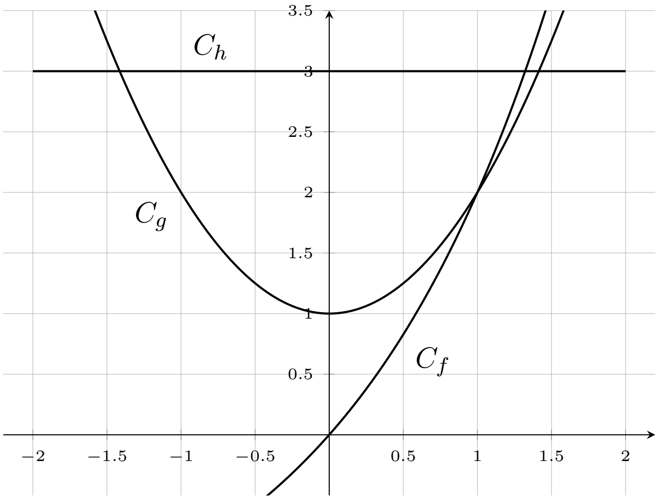
Soit f la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.

a. Utiliser le mode graphique de votre calculatrice pour observer la courbe représentative associée à f.
(fenêtre : $-3 \leq X \leq 3$ pas 1, $-3 \leq Y \leq 11$, pas 1)

b. Faire alors une hypothèse sur le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

Exercice 2

Les fonctions f, g et h sont définies sur $[-2\,;\,2]$.



Résoudre graphiquement :

a. $f(x) = g(x)$

b. $f(x) = h(x)$

c. $h(x) = g(x)$

d. $f(x) \leq g(x)$

e. $h(x) \leq g(x)$

f. $h(x) > f(x)$

Exercice 3

Voici le tableau de variations d'une fonction f :

x	-4		-1		0		1
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-5	↗	3

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?
Comparer si possible en justifiant :

a) $f(-2)$ et $f(-3)$

b) $f(-1)$ et $f(0)$

c) $f(0)$ et $f(-3)$

Exercice 4

En utilisant le tableau de variation de la question 3.

a. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[-4\,;\,-1]$.
b. Donner le minimum de f sur l'intervalle $[-4\,;\,0]$.
c. Donner le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[-4\,;\,1]$.

Exercice 5

Un club sportif fait fabriquer des tee-shirts au nom du club. Chaque tee-shirt est facturé 4€ mais ils sont facturés 3,5€ l'un si la commande est d'au moins 100 unités du produit.

Compléter l'algorithme suivant où `n` est la variable égale au nombre de tee-shirts commandés et `p` le prix payé par le club :

```
def prix(n) :
    if ..................:
        p = n * 4
    else :
        p = ..................
    return p
```