

Transformation en z

BTS | Mathématiques | Groupements B2, B3

Objectifs du chapitre

- Comprendre la notion de signal discret et son traitement numérique
- Définir et calculer la transformée en z d'un signal discret
- Utiliser les propriétés de la transformée en z (linéarité, décalage, convolution)
- Calculer la transformée en z inverse par décomposition en éléments simples
- Résoudre des équations aux différences à l'aide de la transformée en z
- Analyser la stabilité d'un filtre numérique (condition sur les pôles)

Situation professionnelle — Filtrage numérique en électrotechnique

Un technicien en électronique industrielle travaille sur un système de traitement numérique du signal. Le convertisseur analogique-numérique (CAN) échantillonne un signal de mesure à la fréquence $f_e = 1 \text{ kHz}$. Le signal numérique obtenu $x[n]$ doit être filtré pour éliminer les bruits haute fréquence avant d'être transmis à l'unité de contrôle d'un variateur de vitesse.

L'outil mathématique adapté à ce traitement est la **transformée en z**, qui joue pour les signaux discrets le même rôle que la transformée de Laplace pour les signaux continus. Elle permet de concevoir des filtres numériques, d'analyser leur stabilité et de calculer leur réponse.

1. Signaux discrets et suites

DÉFINITION — SIGNAL DISCRET

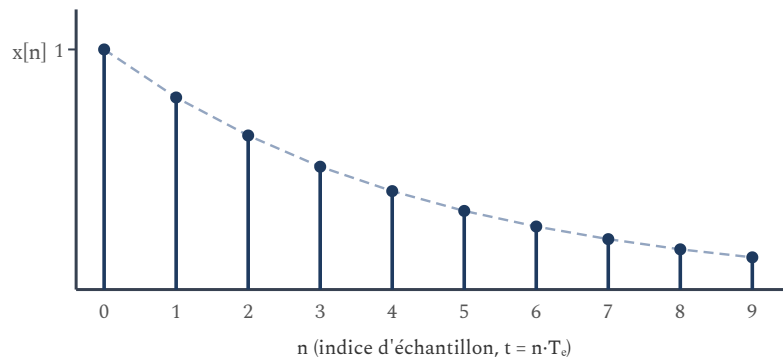
Un **signal discret** est une suite de valeurs numériques $x[n]$ indexées par un entier $n \in \mathbb{Z}$.

Il résulte de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$ à des instants $t = nT_e$:

$$x[n] = x(nT_e), \quad T_e = \frac{1}{f_e}$$

Signaux discrets fondamentaux :

- **Impulsion de Kronecker** : $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$
- **Échelon unitaire discret** : $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
- **Exponentielle discrète** : $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$
- **Sinusoïde discrète** : $x[n] = \cos(\omega_0 n) u[n]$, où ω_0 est la pulsation normalisée



Signal discret $x[n] = (0,8)^n u[n]$: chaque bâton est un échantillon prélevé à l'instant $t = nT_e$. La courbe pointillée est l'enveloppe continue $x(t) = (0,8)^t$.

RAPPEL — TRANSFORMÉE DE FOURIER À TEMPS DISCRET (TFTD)

La transformée de Fourier à temps discret d'un signal $x[n]$ est :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

où ω est la pulsation normalisée (sans dimension). Elle existe si le signal est absolument sommable : $\sum_n |x[n]| < +\infty$.

La transformée en z est une généralisation de la TFTD : on substitue $e^{j\omega}$ par une variable complexe z , ce qui étend considérablement le domaine de convergence.

2. Définition de la transformée en z

DÉFINITION — TRANSFORMÉE EN Z BILATÉRALE

Soit $x[n]$ un signal discret. La **transformée en z bilatérale** est :

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

La **région de convergence (ROC)** est l'ensemble des z pour lesquels la série converge absolument.

DÉFINITION — TRANSFORMÉE EN Z UNILATÉRALE

Pour les signaux causaux (nuls pour $n < 0$), on utilise la transformée unilatérale, plus courante en traitement du signal :

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

PROPRIÉTÉ — RÉGION DE CONVERGENCE POUR UN SIGNAL CAUSAL

Pour un signal causal $x[n] = x[n] u[n]$, la ROC est :

$$|z| > r_{\max}$$

où r_{\max} est le plus grand module des pôles de $X(z)$.

Le cercle unité $|z| = 1$ est dans la ROC si et seulement si tous les pôles vérifient $|p_i| < 1$. Dans ce cas, on peut calculer la réponse en fréquence en posant $z = e^{j\omega}$.

3. Table des transformées en z usuelles

PROPRIÉTÉ — TRANSFORMÉES FONDAMENTALES

Signal $x[n]$	Transformée $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	tout \mathbb{C}
$\delta[n - k] (k \geq 0)$	z^{-k}	$z \neq 0$ si $k > 0$
$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z - a}$	$ z > a $
$nu[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	$ z > 1$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z - a)^2}$	$ z > a $
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z(z - a \cos \omega_0)}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az \sin \omega_0}{z^2 - 2az \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a $

EXEMPLE — DÉMONSTRATION DE $\mathcal{Z}\{A^n U[N]\} = \frac{Z}{Z - A}$

Par définition de la transformée unilatérale :

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

C'est une série géométrique de raison $r = a/z$. Elle converge si et seulement si $|a/z| < 1$, c'est-à-dire $|z| > |a|$. La somme vaut :

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - a/z} = \frac{z}{z - a}$$

4. Propriétés de la transformée en z

PROPRIÉTÉ — LINÉARITÉ

Pour tous réels α, β et signaux $x[n], y[n]$:

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

PROPRIÉTÉ — DÉCALAGE TEMPOREL (RETARD)

Pour tout entier $k \geq 0$ et conditions initiales nulles :

$$\mathcal{Z}\{x[n - k]\} = z^{-k} X(z)$$

Le facteur z^{-k} joue le rôle d'un opérateur de retard. Il est l'analogie discret du facteur e^{-sT} en transformée de Laplace.

PROPRIÉTÉ — AVANCE TEMPORELLE

Pour tout entier $k \geq 1$ et conditions initiales nulles :

$$\mathcal{Z}\{x[n + k]\} = z^k X(z)$$

PROPRIÉTÉ — CONVOLUTION DISCRÈTE

Si $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k]$, alors :

$$\mathcal{Z}\{x[n] * h[n]\} = X(z) \cdot H(z)$$

La convolution (opération complexe dans le domaine temporel) devient un **simple produit** dans le domaine z .

PROPRIÉTÉ — THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE

Pour un signal causal $x[n]$ avec $x[n] = 0$ pour $n < 0$:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

PROPRIÉTÉ — THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE

Si $x[n]$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$, et si tous les pôles de $(z - 1)X(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité (sauf éventuellement en $z = 1$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$$

PROPRIÉTÉ — MULTIPLICATION PAR N

$$\mathcal{Z}\{n x[n]\} = -z \frac{dX}{dz}(z)$$

EXEMPLE — DÉMONSTRATION DE $\mathcal{Z}\{N A^N U[N]\}$

On part de $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}$ et on applique la propriété de multiplication par n :

$$\mathcal{Z}\{n a^n u[n]\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right)$$

Calcul de la dérivée :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{(z-a) \cdot 1 - z \cdot 1}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

Donc :

$$\mathcal{Z}\{n a^n u[n]\} = -z \cdot \frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

5. Transformée en z inverse

DÉFINITION — TRANSFORMÉE INVERSE

La transformée en z inverse permet de retrouver $x[n]$ à partir de $X(z)$. La formule théorique fait appel à une intégrale de contour (théorème des résidus), mais en pratique on utilise la **décomposition en éléments simples**.

La méthode standard consiste à développer $X(z)/z$ en fractions partielles, puis à multiplier par z pour retrouver des termes identifiables dans la table.

MÉTHODE — DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (PÔLES SIMPLES)

1. Écrire $\frac{X(z)}{z}$ sous la forme $\frac{N(z)}{D(z)}$
2. Décomposer : $\frac{X(z)}{z} = \sum_i \frac{A_i}{z - p_i}$ où les p_i sont les pôles
3. Calculer les résidus : $A_i = \left[(z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$
4. Multiplier par z : $X(z) = \sum_i \frac{A_i z}{z - p_i}$
5. Identifier chaque terme dans la table : $x[n] = \sum_i A_i p_i^n u[n]$

ATTENTION — PÔLES MULTIPLES

Pour un pôle a d'ordre 2, la décomposition de $X(z)/z$ comprend des termes en $\frac{A}{z - a}$ et $\frac{B}{(z - a)^2}$. Après multiplication par z :

$$\frac{Az}{z - a} + \frac{Bz}{(z - a)^2} \xrightarrow{z^{-1}} A a^n u[n] + \frac{B}{a} n a^n u[n]$$

EXEMPLE COMPLET — CALCUL DE $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Z^2}{(Z-1)(Z-0,5)}\right\}$

Posons $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)}$. On écrit :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

Calcul de A :

$$A = \left[\frac{z}{z-0,5} \right]_{z=1} = \frac{1}{1-0,5} = 2$$

Calcul de B :

$$B = \left[\frac{z}{z-1} \right]_{z=0,5} = \frac{0,5}{0,5-1} = \frac{0,5}{-0,5} = -1$$

On reconstitue $F(z)$:

$$F(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

Par la table des transformées inverses :

$$f[n] = 2 \cdot 1^n u[n] - (0,5)^n u[n] = [2 - (0,5)^n] u[n]$$

Vérification (valeur initiale) : $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1 \Rightarrow f[0] = 1 = 2 - (0,5)^0 = 2 - 1 = 1$.

Cohérent.

6. Équations aux différences

DÉFINITION — ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Une équation aux différences (EDLCC) est de la forme :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Elle modélise la relation entre l'entrée $x[n]$ et la sortie $y[n]$ d'un système discret. N est l'ordre du système.

MÉTHODE — RÉOLUTION PAR LA TRANSFORMÉE EN Z

Avec des conditions initiales nulles ($y[-k] = 0$ et $x[-k] = 0$ pour $k > 0$) :

1. Appliquer \mathcal{Z} à chaque terme en utilisant $\mathcal{Z}\{y[n-k]\} = z^{-k}Y(z)$
2. Factoriser : $Y(z) \cdot A(z) = X(z) \cdot B(z)$ avec $A(z) = \sum a_k z^{-k}$ et $B(z) = \sum b_k z^{-k}$
3. Isoler : $Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$
4. Calculer $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ par décomposition en éléments simples

EXEMPLE — RÉPONSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE DU 1ER ORDRE

Résoudre $y[n] - 0,7 y[n - 1] = x[n]$ avec $x[n] = \delta[n]$, conditions initiales nulles.

Étape 1 : Transformation en z :

$$Y(z) - 0,7 z^{-1} Y(z) = \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$$

Étape 2 : Factorisation :

$$Y(z) (1 - 0,7 z^{-1}) = 1 \implies Y(z) = \frac{1}{1 - 0,7 z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,7}$$

Étape 3 : Transformée inverse (lecture directe dans la table) :

$$y[n] = h[n] = (0,7)^n u[n]$$

EXEMPLE — RÉPONSE INDICIELLE D'UN FILTRE DU 2ÈME ORDRE

Soit $y[n] - 1,2y[n-1] + 0,35y[n-2] = x[n]$, avec $x[n] = u[n]$ et conditions initiales nulles.

Fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1,2z^{-1} + 0,35z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1,2z + 0,35}$$

Pôles : $\Delta = 1,44 - 4(0,35) = 0,04$, donc $z_1 = 0,7$, $z_2 = 0,5$.

Transformée de l'entrée : $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 1,2z + 0,35)(z-1)} = \frac{z^3}{(z-0,7)(z-0,5)(z-1)}$$

Décomposition de $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-0,7)(z-0,5)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,7} + \frac{C}{z-0,5}$$

Résidus :

$$A = \left[\frac{z^2}{(z-0,7)(z-0,5)} \right]_{z=1} = \frac{1}{0,3 \times 0,5} = \frac{20}{3}$$

$$B = \left[\frac{z^2}{(z-0,5)(z-1)} \right]_{z=0,7} = \frac{0,49}{0,2 \times (-0,3)} = -\frac{49}{6}$$

$$C = \left[\frac{z^2}{(z-0,7)(z-1)} \right]_{z=0,5} = \frac{0,25}{(-0,2)(-0,5)} = \frac{5}{2}$$

Réponse :

$$y[n] = \left(\frac{20}{3} - \frac{49}{6}(0,7)^n + \frac{5}{2}(0,5)^n \right) u[n]$$

7. Fonction de transfert en z

DÉFINITION — FONCTION DE TRANSFERT EN Z

La fonction de transfert en z d'un système numérique est le rapport :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}$$

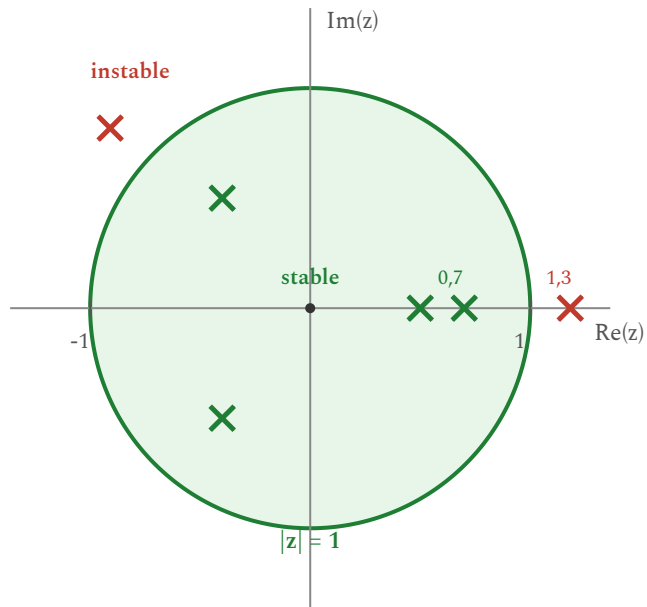
Les **zéros** de $H(z)$ sont les racines du numérateur. Les **pôles** de $H(z)$ sont les racines du dénominateur.

PROPRIÉTÉ — CONDITION DE STABILITÉ

Un système numérique décrit par $H(z)$ est **stable** si et seulement si :

$$\forall i, \quad |p_i| < 1$$

Tous les pôles doivent être strictement à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. C'est l'analogie discret de la stabilité de Hurwitz (pôles à partie réelle strictement négative) pour les systèmes continus.



Critère de stabilité dans le plan complexe : un système est stable si et seulement si tous ses pôles (croix \times) sont strictement à l'intérieur du cercle unité, soit $|p_i| < 1$ (en vert). Un seul pôle à l'extérieur (en rouge) rend le système instable.

À retenir — Correspondance Laplace / z

Domaine continu (Laplace)	Domaine discret (z)
Variable complexe s	Variable complexe z
Retard e^{-sT}	Retard z^{-1}
Stable : $\text{Re}(p_i) < 0$	Stable : $ p_i < 1$
Plan complexe entier	Plan complexe avec cercle unité
Axe imaginaire $j\omega$	Cercle unité $ z = 1$

8. Filtrés numériques : RIF et RII

DÉFINITION — FILTRE RIF (RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE)

Un **filtre RIF** est un filtre dont la réponse impulsionnelle $h[n]$ est nulle au-delà d'un rang M fini. Sa fonction de transfert est un polynôme en z^{-1} :

$$H_{\text{RIF}}(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}$$

Les seuls pôles sont en $z = 0$: un filtre RIF est **toujours stable**. L'implémentation par l'équation aux différences $y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$ ne nécessite pas de rétroaction.

DÉFINITION — FILTRE RII (RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE)

Un **filtre RII** possède une réponse impulsionnelle de durée infinie. Sa fonction de transfert est une fraction rationnelle :

$$H_{\text{RII}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Il possède des pôles non nuls. Sa stabilité doit être vérifiée. L'implémentation nécessite une boucle de rétroaction.

PROPRIÉTÉ — FILTRE PASSE-BAS DU 1ER ORDRE (RII)

Le filtre de lissage exponentiel est défini par :

$$y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha) y[n - 1], \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Sa fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{\alpha z}{z - (1 - \alpha)}$$

Pôle : $p = 1 - \alpha$. Pour $0 < \alpha < 2$, $|p| < 1$: filtre stable. Plus α est petit, plus le filtre est lissant (bande passante étroite).

Gain statique : $H(1) = \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Le filtre ne déforme pas la composante continue.

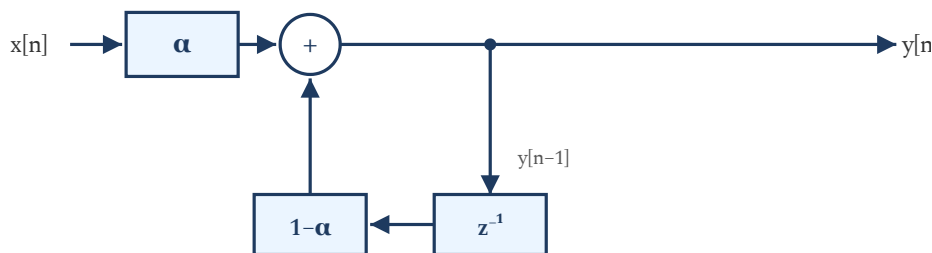


Schéma-bloc du filtre récursif (RII) $y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha) y[n - 1]$: la boucle de rétroaction contient un retard z^{-1} et le gain $1 - \alpha$. Le pôle $p = 1 - \alpha$ vérifie $|p| < 1$ (filtre stable).

PROPRIÉTÉ — FILTRE PASSE-HAUT (RIF D'ORDRE 1)

Le filtre différenciateur discret est :

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

Sa fonction de transfert :

$$H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}$$

Zéro en $z = 1$ (composante continue bloquée), pôle en $z = 0$: filtre RIF toujours stable. Il s'approche d'un dérivateur discret.

PROPRIÉTÉ — FILTRE PASSE-BAS FIR PAR MOYENNE GLISSANTE

Le filtre à moyenne glissante d'ordre M est :

$$y[n] = \frac{1}{M + 1} \sum_{k=0}^M x[n - k]$$

Sa fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{M + 1} \sum_{k=0}^M z^{-k} = \frac{1}{M + 1} \cdot \frac{1 - z^{-(M+1)}}{1 - z^{-1}}$$

Filtre RIF d'ordre M , toujours stable. Effet de lissage plus fort pour M grand.

EXEMPLE — APPLICATION INDUSTRIELLE : LISSAGE DE MESURE

Un technicien mesure une température toutes les $T_e = 100$ ms. Il applique le filtre $y[n] = 0,2x[n] + 0,8y[n-1]$ ($\alpha = 0,2$).

- Pôle : $p = 0,8$, $|p| = 0,8 < 1 \rightarrow$ filtre **stable**
- Gain continu : $H(1) = 1 \rightarrow$ pas de biais statique
- Réponse en fréquence : $H(e^{j\omega}) = \frac{0,2}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$
- À $\omega = \pi$ (fréquence de Nyquist) : $|H(e^{j\pi})| = \frac{0,2}{1 + 0,8} = \frac{0,2}{1,8} \approx 0,11 \rightarrow$ forte atténuation haute fréquence.

9. Exercices d'application

EXERCICE 1 — CALCUL DE TRANSFORMÉES

Calculer les transformées en z des signaux suivants :

1. $x_1[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-2]$
2. $x_2[n] = (0,8)^n u[n] + (0,4)^n u[n]$
3. $x_3[n] = n(0,6)^n u[n]$
4. $x_4[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$

EXERCICE 2 — TRANSFORMÉE INVERSE

Calculer la transformée en z inverse de :

$$1. X_1(z) = \frac{3z}{z - 0,6}$$

$$2. X_2(z) = \frac{z^2}{(z - 0,5)(z - 0,3)}$$

$$3. X_3(z) = \frac{z^2 + z}{(z - 1)(z - 0,8)}$$

$$4. X_4(z) = \frac{z}{(z - 0,4)^2}$$

EXERCICE 3 — ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES ET STABILITÉ

Un filtre numérique est décrit par :

$$y[n] - 0,5y[n - 1] - 0,25y[n - 2] = x[n] + 0,5x[n - 1]$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$.
2. Calculer les pôles et les zéros. Le filtre est-il stable ?
3. Calculer la réponse impulsionnelle $h[n]$.
4. Calculer la réponse stationnaire à un échelon $x[n] = u[n]$ en utilisant le théorème de la valeur finale.

EXERCICE 4 — ANALYSE D'UN FILTRE RII DU 2ÈME ORDRE

Un système de commande numérique possède :

$$H(z) = \frac{0,1(z + 1)}{(z - 0,8)(z - 0,6)}$$

1. Vérifier que le système est stable.
2. Calculer le gain statique $H(1)$.
3. Décomposer $H(z)$ en éléments simples et calculer $h[n]$.
4. Donner l'équation aux différences correspondante et proposer un algorithme d'implémentation numérique.

Transformation en z

Transformation en z | BTS | Mathématiques

Table utile : impulsion $\delta_n \rightarrow 1$; échelon $u_n = 1 \rightarrow \frac{z}{z-1}$; $a^n \rightarrow \frac{z}{z-a}$. Linéarité : $Z(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$. Retard : $Z(x_{n-1}) = z^{-1}X(z)$ (signal causal).

Exercice 1 — Lecture de la table

Donne la transformée en z de :

1. le signal échelon $u_n = 1$. 2. le signal $x_n = 2^n$. 3. l'impulsion δ_n .

Exercice 2 — Linéarité

Détermine $X(z)$ pour $x_n = 3 \times u_n + 2 \times (0,5)^n$.

Exercice 3 — Transformée inverse

Détermine le signal x_n dont la transformée est $X(z) = \frac{z}{z-0,5}$.

Exercice 4 — Propriété de retard

Un signal causal x_n a pour transformée $X(z)$. Exprime la transformée du signal retardé x_{n-1} .

Exercice 5 — Fonction de transfert (type BTS)

Un système vérifie l'équation aux différences $y_n - 0,5 y_{n-1} = x_n$ (conditions initiales nulles).

1. Applique la transformée en z aux deux membres.

2. En déduire la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

 **Durée** : 1 heure  **Calculatrice** : autorisée  **Barème** : 20 points

 **Formulaire** : table des transformées fournie

Exercice 1 — Transformées directes (8 points)

Donne $X(z)$ pour : 1. $x_n = u_n$ (échelon) (2) 2. $x_n = 3^n$ (2) 3. $x_n = 4\delta_n$ (2) 4.
 $x_n = u_n + (0,2)^n$ (2)

Exercice 2 — Transformée inverse (6 points)

Détermine le signal x_n pour : 1. $X(z) = \frac{z}{z-1}$ (3) 2. $X(z) = \frac{z}{z-0,25}$ (3)

Exercice 3 — Fonction de transfert (6 points)

Un filtre numérique vérifie $y_n - 0,8y_{n-1} = x_n$ (C.I. nulles).

- Établis la fonction de transfert $H(z)$. (4 pts)
- Donne la réponse impulsionnelle (signal y_n si $x_n = \delta_n$). (2 pts)