

TD M7 : Mouvement d'un solide

Table des matières

1	Rotation d'une barre autour d'un axe fixe	1
2	Mouvement d'une nacelle de grande roue	2
3	Pendule de torsion	4
4	Pendule solide	5
5	Chute d'un arbre	7

1 Rotation d'une barre autour d'un axe fixe

Une barre rigide AB de longueur L est en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe (Oz) dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère (O, x, y, z) (figure 1). La barre est située dans un plan vertical et son extrémité A est confondue avec O . Elle fait un angle α avec l'axe (Oz) .

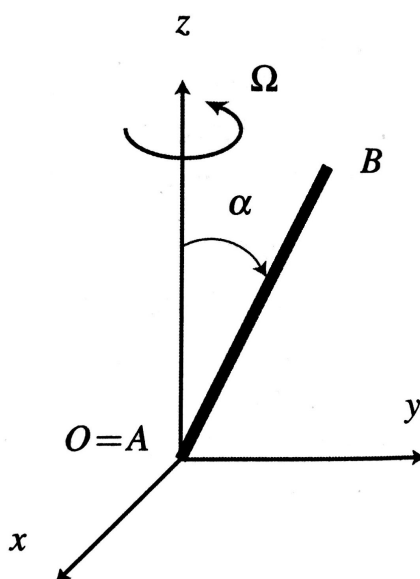


Figure 1 – Mouvement d'une barre

1.1. Décrire le mouvement du point A dans $\mathcal{R}$.

Réponse :

Le point A est confondu avec O , qui appartient à l'axe fixe (Oz) : sa position est constante. Donc A est **immobile** dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{0}, \quad \vec{v}_A = \vec{0}, \quad \vec{a}_A = \vec{0}.$$

1.2. Décrire celui de B puis exprimer ses vecteurs position, vitesse et accélération. On s'aidera d'un schéma sur lequel on définira une base adaptée au problème.

Réponse :

On introduit une base cylindrique autour de (Oz) : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. La barre faisant un angle constant α avec (Oz) , on a :

$$\overrightarrow{OB} = L \sin(\alpha) \vec{e}_r + L \cos(\alpha) \vec{e}_z$$

Le point B décrit un **mouvement circulaire uniforme** autour de (Oz) , de rayon

$$R = L \sin(\alpha)$$

Comme $\dot{\theta} = \Omega$ (rotation uniforme) et $\dot{\vec{e}}_r = \Omega \vec{e}_\theta$, $\dot{\vec{e}}_\theta = -\Omega \vec{e}_r$, $\dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$, on obtient :

$$\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = L \sin(\alpha) \Omega \vec{e}_\theta$$

Donc $\|\vec{v}_B\| = L \sin(\alpha) \Omega$.

Puis :

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = L \sin(\alpha) \Omega \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -L \sin \alpha \Omega^2 \vec{e}_r$$

Accélération purement centripète (dirigée vers l'axe).

2 Mouvement d'une nacelle de grande roue

La grande roue installée place de la Concorde à Paris (figure 2) a un diamètre de $H = 60$ m mesuré entre le centre de la roue et le point de fixation haut des nacelles. Chaque nacelle, accrochée à un bras métallique, a une hauteur $d = 2,5$ m et réalise un tour complet à vitesse angulaire constante en $\Delta t = 10$ min. On note O , le centre de la grande roue.



Figure 2 – Mouvement d'une grande roue

2.1. Décrire le mouvement d'une nacelle.

Réponse :

Le point de fixation de la nacelle est solidaire de la roue : il décrit un mouvement circulaire uniforme dans un plan vertical, de centre O et de rayon

$$R = \frac{H}{2} = 30 \text{ m}$$

En revanche, la nacelle (la cabine) reste verticale, on peut donc assimiler le mouvement de la nacelle à une **translation circulaire**.

2.2. Tracer la trajectoire du point de fixation de la nacelle puis celle du point bas de la nacelle situé à la verticale du point de fixation. Décrire ces trajectoires.

Réponse :

Le point de fixation F décrit un cercle de centre O et de rayon $R = 30 \text{ m}$.

Le point bas B de la nacelle est situé à la verticale de F , à une distance constante $d = 2,5 \text{ m}$ en dessous :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} - d \vec{u}_z$$

Il décrit un cercle **de même rayon** $R = 30 \text{ m}$, mais **de centre décalé** : si C est le centre de la trajectoire de B , alors

$$\overrightarrow{OC} = -d \vec{u}_z$$

c'est-à-dire que le centre du cercle du point bas est situé **2,5 m plus bas** que O .

En résumé :

- F : cercle de centre O , rayon 30 m ;
- B : cercle de centre C , rayon 30 m .

2.3. Calculer la vitesse angulaire de la nacelle et la norme du vecteur vitesse des points de la nacelle.

Réponse :

$$\Delta t = 10 \text{ min} = 600 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \approx 1,05 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

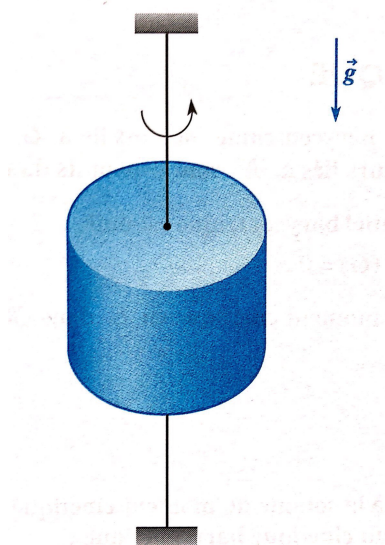
Pour un point en mouvement circulaire de rayon $R = 30 \text{ m}$:

$$v = \Omega R \approx 1,05 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \times 30 \text{ m} \approx 0,314 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le point de fixation F et le point bas B ont donc le **même vecteur vitesse de norme** :

$$v_F = v_B \simeq 0,314 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3 Pendule de torsion



Un fil métallique vertical dont les extrémités sont fixées, est lié à un cylindre homogène de masse m et de rayon R (figure 3). Le moment d'inertie de cylindre par rapport à son axe de symétrie est $J = \frac{1}{2}mR^2$. Le fil est tendu et il est confondu avec l'axe de symétrie du cylindre.

Lorsque le cylindre tourne d'un angle $\theta(t)$ par rapport à la position d'équilibre, le fil exerce un couple de rappel élastique avec une constante de torsion K . A l'instant initial, le pendule est relâché sans vitesse initiale avec un angle $\theta(0) = \theta_0$ par rapport à sa position d'équilibre.

Figure 3 – Pendule de torsion

3.1. Déterminer l'expression de la période des oscillations du cylindre.

Réponse :

Le couple de rappel est :

$$\mathcal{M} = -K\theta$$

Théorème du moment cinétique autour de l'axe (axe du fil) :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M} = -K\theta \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

C'est un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Donc la période est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}$$

En remplaçant $J = \frac{1}{2}mR^2$, on obtient :

$$T = \pi R \sqrt{\frac{2m}{K}}$$

3.2. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ et tracer son allure.

Réponse :

Solution générale :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow A = \theta_0$, et $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, donc :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Allure : cosinus de période T , amplitude θ_0 .

3.3. Que se passe-t-il si le fil n'est pas vertical ?

Réponse :

Même si le fil n'est pas vertical, le centre de masse du cylindre reste situé sur l'axe de rotation (axe du fil). Le poids $\vec{P}$ est donc appliqué sur cet axe. Son moment par rapport à l'axe de rotation est nul :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$$

Ainsi, l'équation du mouvement reste inchangée :

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

La période et la dynamique du pendule de torsion ne dépendent donc pas de l'orientation du fil dans l'espace.

4 Pendule solide

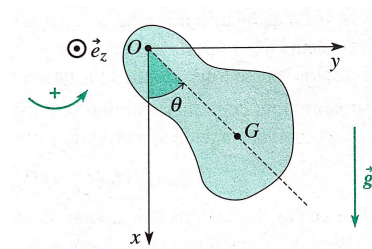


Figure 4 – Pendule solide

On considère un pendule solide (figure 4) qui peut osciller autour d'un axe $\Delta = (Oz)$ fixe par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du pendule par rapport à Δ et $b = OG$, O étant le projeté de G sur Δ . On appelle $\theta(t)$ l'angle $(\vec{u}_x, \vec{OG})$.

A l'instant initial, le pendule est dans sa position d'équilibre et on lui communique une vitesse $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

4.1. Par application du théorème du moment cinétique en projection sur Δ , trouvez l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Réponse :

Le seul moment extérieur autour de Δ (dans le modèle usuel) est celui du poids. On a :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgb \sin \theta$$

Théorème du moment cinétique projeté sur Δ :

$$J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgb \sin \theta$$

Donc :

$$J\ddot{\theta} + mgb \sin \theta = 0$$

4.2. Retrouvez ce résultat par application du théorème de l'énergie cinétique.

Réponse :

Énergie cinétique de rotation :

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

En prenant l'origine de l'énergie potentielle en O :

$$E_p = -mgx_G = -mgb \cos(\theta)$$

L'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ est conservée (pas de frottements) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgb \cos(\theta) \right) = 0$$

On dérive :

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgb \sin(\theta) \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \left(J\ddot{\theta} + mgb \sin(\theta) \right) = 0$$

Sachant que $\dot{\theta} \neq 0$, on retrouve bien :

$$J\ddot{\theta} + mgb \sin \theta = 0$$

4.3. Quelle est l'expression de la période des petites oscillations du pendule ?

Réponse :

Petites oscillations : $\sin \theta \simeq \theta$. L'équation devient :

$$J\ddot{\theta} + mgb \theta = 0$$

d'où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J}}, \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgb}}$$

4.4. Trouver l'expression de $\theta(t)$ et celle de la vitesse du point G notée $\vec{v}_G(t)$.

Réponse :

Dans l'approximation des petites oscillations, la solution est harmonique :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{J}}.$$

Conditions initiales : $\theta(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \Rightarrow B = \dot{\theta}_0 / \omega_0$, donc :

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Le point G décrit un cercle de rayon b autour de l'axe Δ . Sa vitesse a pour norme :

$$v_G = b|\dot{\theta}|$$

Vectoriellement (base polaire autour de l'axe) :

$$\vec{v}_G(t) = b \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \cos(\omega_0 t)$$

4.5. Tracer l'allure de $\theta(t)$.

Réponse :

$\theta(t)$ est une sinusoïde (ici un sinus) de pulsation ω_0 , d'amplitude $\dot{\theta}_0 / \omega_0$:

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Elle démarre à 0 avec une pente initiale $\dot{\theta}_0$.

5 Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur H et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle $\theta(t)$ qu'il fait avec la verticale (figure 5).

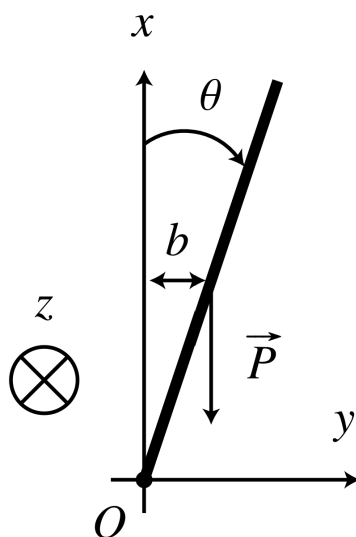


Figure 5 – Chute d'un arbre

À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5,0^\circ$ avec la verticale et est immobile. Le moment d'inertie par rapport à son extrémité vaut :

$$J = \frac{1}{3}mH^2$$

5.1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.

Réponse :

On applique le théorème scalaire du moment cinétique à l'arbre considéré comme un solide en rotation autour de l'axe fixe (Oz) dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\text{forces}).$$

Le moment de la réaction du sol est nul car cette force s'applique sur l'axe de rotation.

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est appliqué au centre de masse situé à la distance $H/2$ de O . Le bras de levier vaut :

$$b = \frac{H}{2} \sin \theta.$$

Le moment du poids (sens positif correspondant à l'augmentation de θ) est donc :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(P) = mg \frac{H}{2} \sin \theta.$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) vaut :

$$L_{(Oz)} = J\dot{\theta}$$

On obtient alors :

$$J\ddot{\theta} = mg \frac{H}{2} \sin \theta$$

En remplaçant $J = \frac{1}{3}mH^2$:

$$\frac{1}{3}mH^2\ddot{\theta} = mg \frac{H}{2} \sin \theta$$

soit, après simplification :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2H} \sin \theta.$$

5.2. Montrer que la vitesse angulaire vérifie

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{H} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

Réponse :

On multiplie l'équation différentielle par $\dot{\theta}$:

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg \frac{H}{2} \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Or :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right), \quad \sin(\theta) \dot{\theta} = \frac{d}{dt} (-\cos \theta)$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{J}{2} \dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-mg \frac{H}{2} \cos \theta \right)$$

En intégrant entre $t = 0$ et t quelconque, sachant que $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$:

$$\frac{J}{2} \dot{\theta}^2 = mg \frac{H}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

En remplaçant $J = \frac{1}{3}mH^2$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{H} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

Comme $\dot{\theta} > 0$ pendant la chute :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{H} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

5.3. Montrer que cette relation peut s'écrire

$$\sqrt{\frac{3g}{H}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

Réponse :

On écrit simplement :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

On sépare les variables :

$$\sqrt{\frac{3g}{H}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

5.4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de hauteur $H = 30 \text{ m}$. On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On donne :

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$$

Réponse :

On intègre entre θ_0 et $\pi/2$:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{H}{3g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

Donc :

$$\Delta t = 5,1 \sqrt{\frac{H}{3g}}$$

Avec $H = 30 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$\Delta t = 5,1 \sqrt{\frac{30}{30}} = 5,1 \text{ s}$$