

Généralités sur les fonctions réelles

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions réelles	2
1.1	Définitions	2
1.2	Propriétés des fonctions	2
1.2.1	Parité, imparité	2
1.2.2	Périodicité	3
1.2.3	Fonctions majorées, minorées, bornées	3
1.2.4	Sens de variation	4
2	Les fonctions algébriques usuelles	5
2.1	La fonction valeur absolue	5
2.2	Les fonctions puissances entières	6
2.2.1	Cas où n est positif	6
2.2.2	Cas où n est négatif	8
2.3	Les fonctions polynomiales et rationnelles	9
2.4	Les fonctions racines	10
2.5	La fonction partie entière	11
3	Les fonctions exponentielle et logarithme népérien	12
3.1	La fonction logarithme népérien	12
3.2	La fonction exponentielle	13
3.3	Puissances à exposant réel	15
4	Les fonctions trigonométriques	16
4.1	La fonction sinus	17
4.2	La fonction cosinus	18
4.3	La fonction tangente	19
4.4	La fonction arctangente	20
4.5	Formulaire de trigonométrie	21

1 Généralités sur les fonctions réelles

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Fonction réelle

On appelle **fonction** de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, toute application f définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

D_f est appelé **l'ensemble de définition** de f . C'est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

Il ne faut pas confondre les notations f et $f(x)$.

f représente une fonction (que l'on peut aussi noter $x \mapsto f(x)$).

$f(x)$ représente l'image de x par f dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est un nombre réel.

Exemple 1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}_+$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Définition 1.2 : Courbe représentative de f

On appelle **courbe représentative de f** (ou **graphe de f**) l'ensemble

$$C_f = \{(x, f(x)) \text{ avec } x \in D_f\}.$$

Pour représenter la fonction f , on trace dans un repère orthogonal la courbe du plan formée de tous les points du graphe.

1.2 Propriétés des fonctions

1.2.1 Parité, imparité

Définition 1.3 : Fonction paire, impaire

Soit f une fonction telle que D_f soit centré en 0 ($\forall x \in D_f, -x \in D_f$).

- La fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si :

$$\forall x \in D_f, f(-x) = f(x).$$

- La fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si :

$$\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x).$$

Exemple 2. Reconnaître, parmi les fonctions suivantes, les fonctions paires et les fonctions impaires :

$$\begin{aligned} (i) \quad x &\mapsto x^2, & (ii) \quad x &\mapsto x^3, & (iii) \quad x &\mapsto |x|, & (iv) \quad x &\mapsto \frac{1}{x}, \\ (v) \quad x &\mapsto \cos(x), & (vi) \quad x &\mapsto \sin(x), & (vii) \quad x &\mapsto \tan(x). \end{aligned}$$

Solution.

Propriété 1.4 : Symétries de la courbe représentative

Si f est paire, alors C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Si f est impaire, alors C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1.2.2 Périodicité

Définition 1.5 : Fonction périodique

La fonction f est dite périodique si $\exists T > 0$ tel que

$$\forall x \in D_f, \quad x + T \in D_f \text{ et } f(x) = f(x + T).$$

On dit alors que la fonction f est **T -périodique** (ou de **période T**).

La première condition sert à vérifier que $f(x + T)$ a un sens. Elle est toujours vraie si $D_f = \mathbb{R}$.

Exemple 3. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.

1.2.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.6 : Fonctions majorées, minorées, bornées

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite :

- **majorée** sur A lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq M,$$

le réel M est alors un majorant de f sur A . Un majorant n'est pas unique.

- **minorée** sur A lorsqu'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq m,$$

m est alors un minorant de f sur A . Un minorant n'est pas unique.

- **bornée** sur A si elle est majorée et minorée sur A .

Un majorant qui est atteint est un **maximum**, un minorant atteint, un **minimum**, et un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Autrement dit, une fonction est majorée si l'ensemble $f(A)$ est majoré et minorée si $f(A)$ est minoré.

Proposition 1.7 : Fonction bornée

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad |f| \text{ est majorée.}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f \text{ est bornée} &\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in A, \quad m \leq f(x) \leq M \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad -K \leq f(x) \leq K \text{ avec } K = \max(|m|, |M|) \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq K \\ &\Leftrightarrow |f| \text{ est majorée.} \end{aligned}$$

Exemple 4. Préciser si les fonctions suivantes sont majorées, minorées et si elles possèdent un maximum ou un minimum.

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} f : [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \quad (ii) \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \quad (iii) \quad \begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 - x^4 \end{array}$$

Solution.

1.2.4 Sens de variation

Définition 1.8 : Variations des fonctions

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite :

— **constante** sur A lorsqu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) = c,$$

— **croissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'),$$

— **strictement croissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'),$$

— **décroissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'),$$

— **strictement décroissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'),$$

— **(strictement) monotone** sur A si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Propriété 1.9 : Composée de fonctions monotones

Si f est monotone sur A et g est monotone sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est monotone sur A . Pour être précis,

- (i) si f et g ont même sens de variation, $g \circ f$ est croissante,
- (ii) si f et g ont des sens de variation opposés, $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration. (i) On distingue deux cas :

- si f et g sont croissantes, alors pour $(x, x') \in A^2$ tels que $x \leq x'$,

$$f(x) \leq f(x').$$

Comme g est croissante sur $f(A)$, alors

$$g(f(x)) \leq g(f(x')).$$

Ainsi $g \circ f$ est croissante sur A .

- si f et g sont décroissantes, alors pour $(x, x') \in A^2$ tels que $x \leq x'$,

$$f(x) \geq f(x').$$

Comme g est décroissante sur $f(A)$, alors

$$g(f(x)) \leq g(f(x')).$$

Ainsi $g \circ f$ est croissante sur A

(ii) À démontrer en exercice.

□

Exemple 5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[2, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[2, +\infty[$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Exemple 6. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est définie et paire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est bornée par 0 et 1, mais que seul 1 est un extremum.
3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

2 Les fonctions algébriques usuelles

2.1 La fonction valeur absolue

Définition 2.1 : Fonction valeur absolue

La fonction $x \mapsto |x|$ est appelée **fonction valeur absolue** et elle est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriété 2.2 : Fonction valeur absolue

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De plus, f est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty.$$

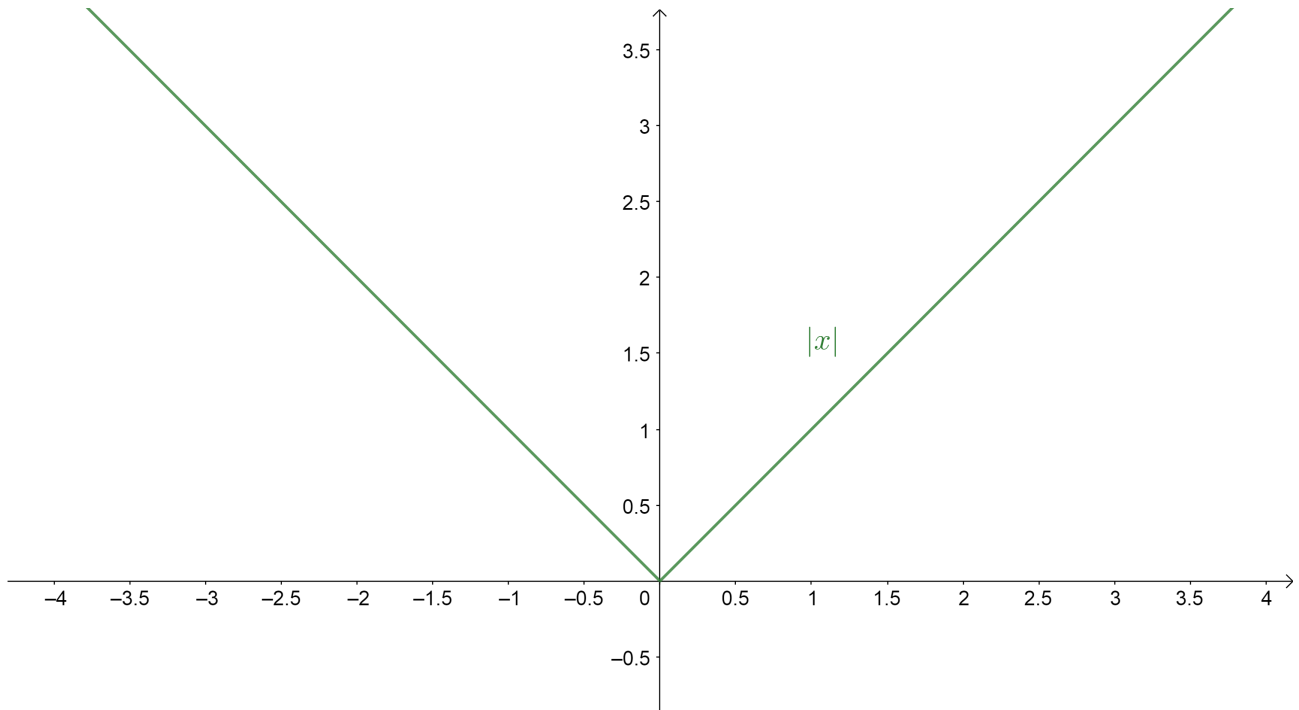
Exemple 7. Si $x \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, alors

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Propriété 2.3 : Règles de calcul

- Positivité de la valeur absolue : pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.
- Parité de la valeur absolue : pour $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
- Multiplication : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$.
- Division : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- Inégalité triangulaire : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.



2.2 Les fonctions puissances entières

Définition 2.4 : Fonction puissance entière

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est appelée **fonction puissance $n^{\text{ième}}$** .

2.2.1 Cas où n est positif

Propriété 2.5 : Fonction puissance entière positive

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n x^{n-1}.$$

De plus,

- si n est pair, alors f est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- si n est impair, alors f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

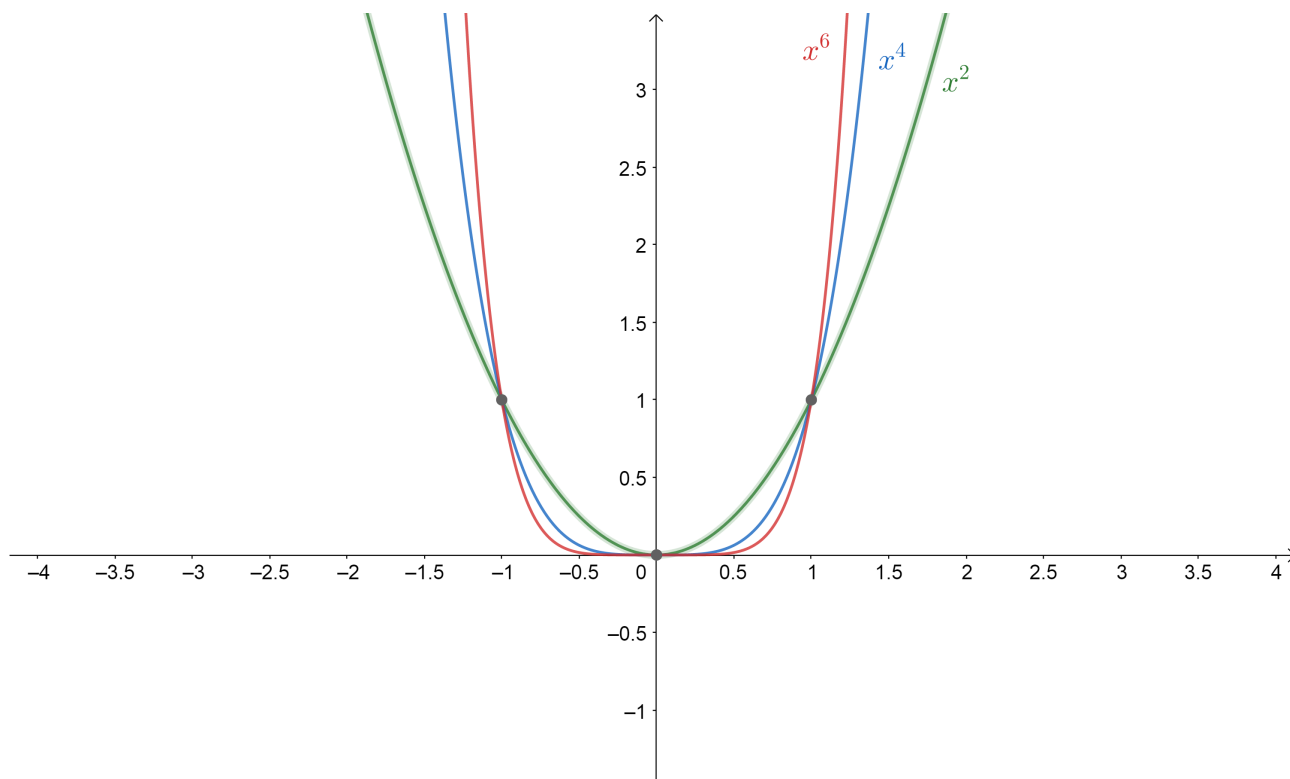
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exemple 8. Si $x \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, alors

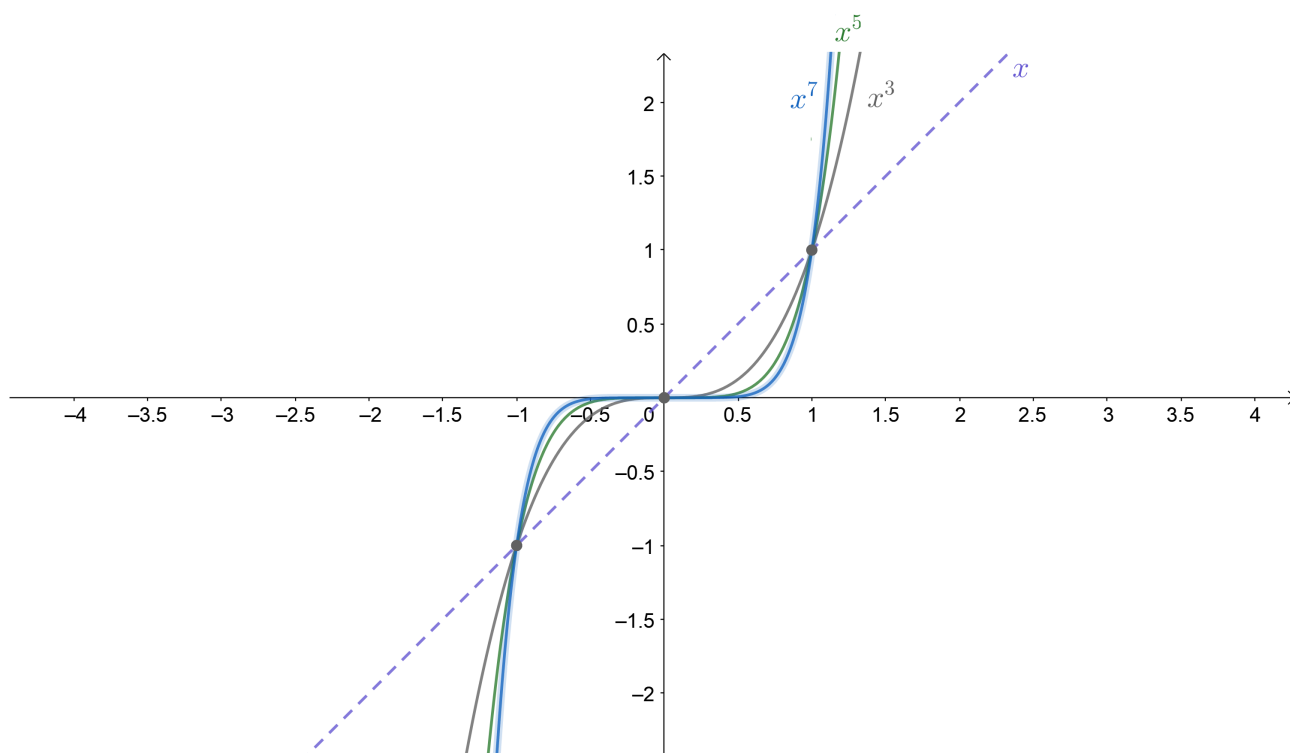
$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Cas pair



Cas impair



2.2.2 Cas où n est négatif

Propriété 2.6 : Fonction puissance entière négative

Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = n x^{n-1}.$$

De plus,

- si n est pair, alors f est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
- si n est impair, alors f est impaire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

On peut aussi définir la fonction f par : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f : x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

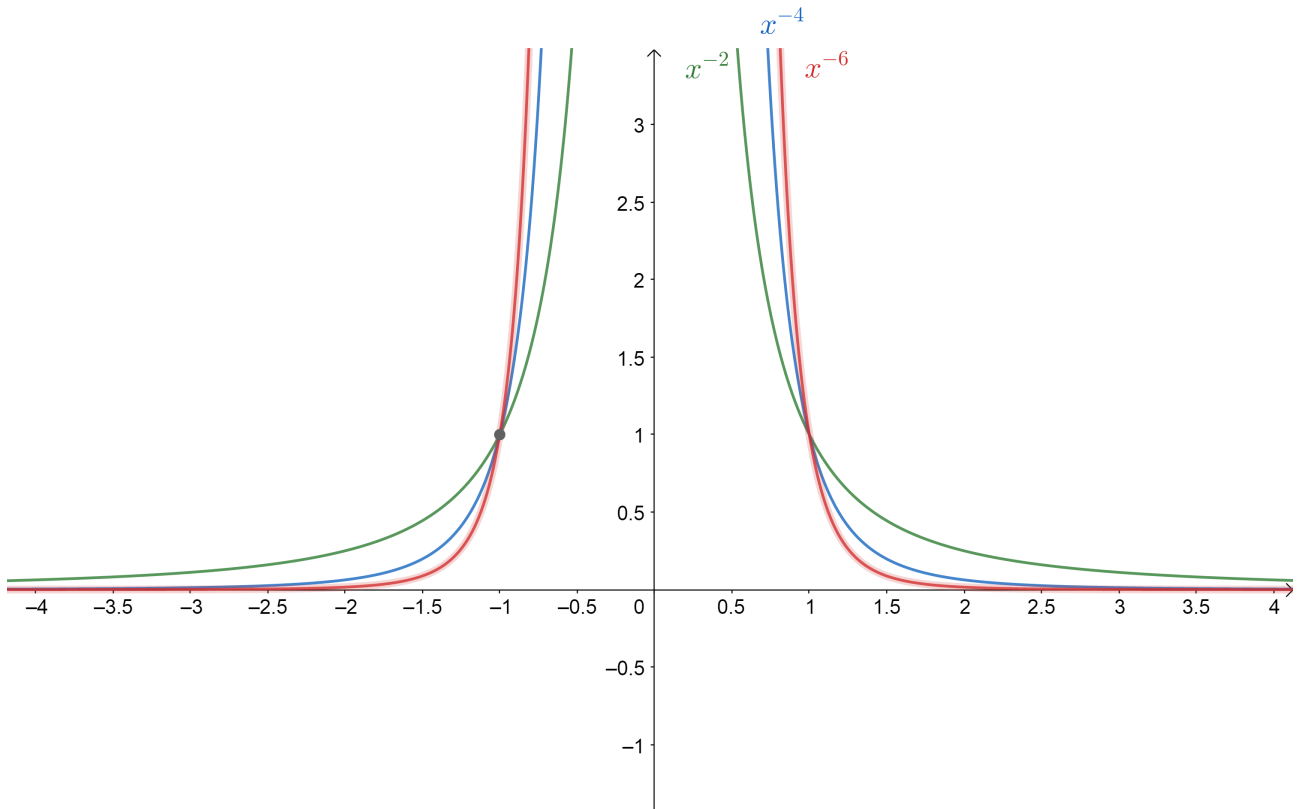
Exemple 9. La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

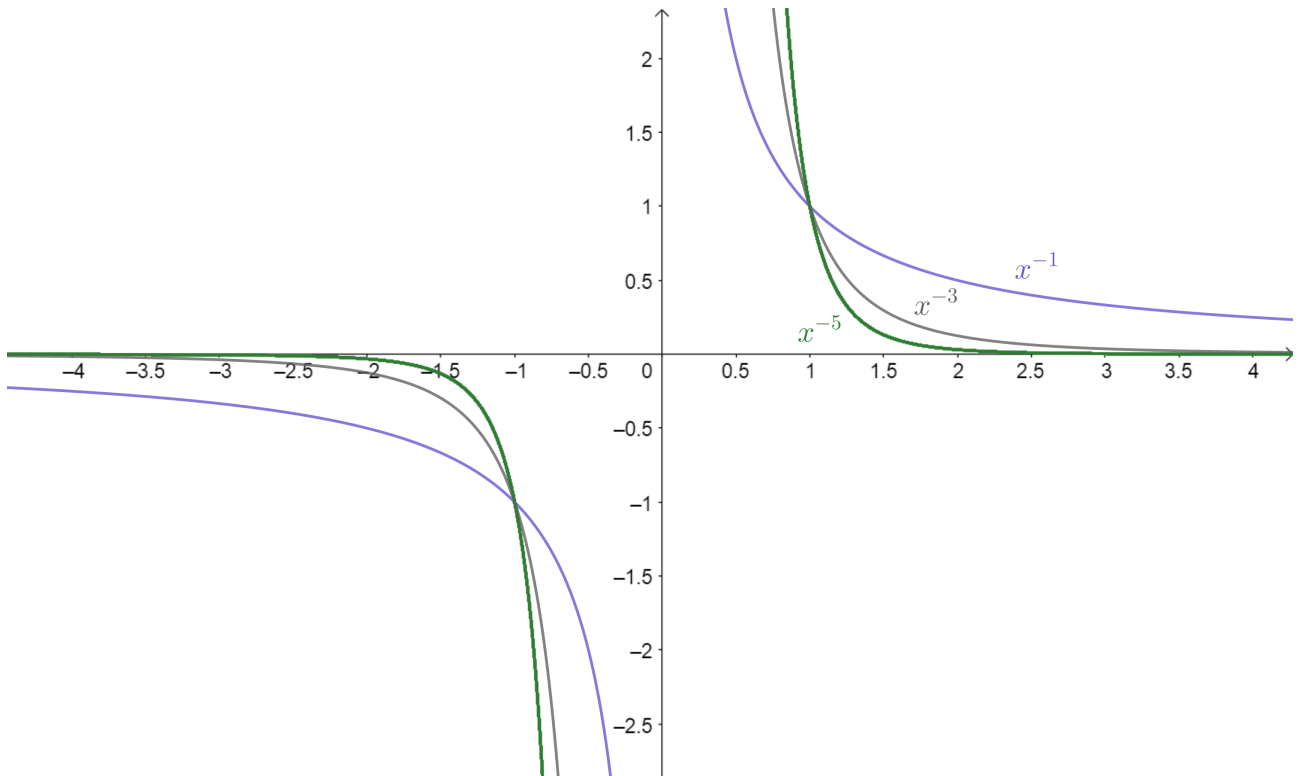
Il ne faut pas dire que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Ceci est faux car par exemple, -1 et 1 sont des éléments de $\mathbb{R}^*$ et pourtant

$$f(-1) \leq f(1).$$

Cas pair



Cas impair



2.3 Les fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 2.7 : Fonction polynomiale

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_p$ des réels avec $a_p \neq 0$. La fonction f suivante est appelée **fonction polynomiale** et elle est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p.$$

Propriété 2.8 : Fonction polynomiale

La fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^p k a_k x^{k-1}.$$

Elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \mapsto a_p x^p$.

Exemple 10. *Suivant le degré p de la fonction polynomiale, on a les situations suivantes :*

- Si $p = 0$, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $p = 1$, f est une fonction affine sur $\mathbb{R}$.
- Si $p = 2$, f est un trinôme du second degré. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
 - Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.
 - Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

Définition 2.9 : Fonction rationnelle

On appelle **fonction rationnelle** tout quotient de deux fonctions polynomiales. Soient f_1 et f_2 deux fonctions polynomiales définies avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ par

$$f_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \sum_{k=0}^q b_k x^k.$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des racines de f_2 . La fonction rationnelle f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}, f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q}.$$

Propriété 2.10 : Fonction rationnelle

La fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ et elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$.

2.4 Les fonctions racines**Définition 2.11 : Fonction racine**

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La fonction $x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est appelée **fonction racine $n^{\text{ième}}$** et c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction $x \mapsto x^n$ à $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.12 : Fonction racine

Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{x^{-1+1/n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exemple 11. La fonction racine carrée $f : x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

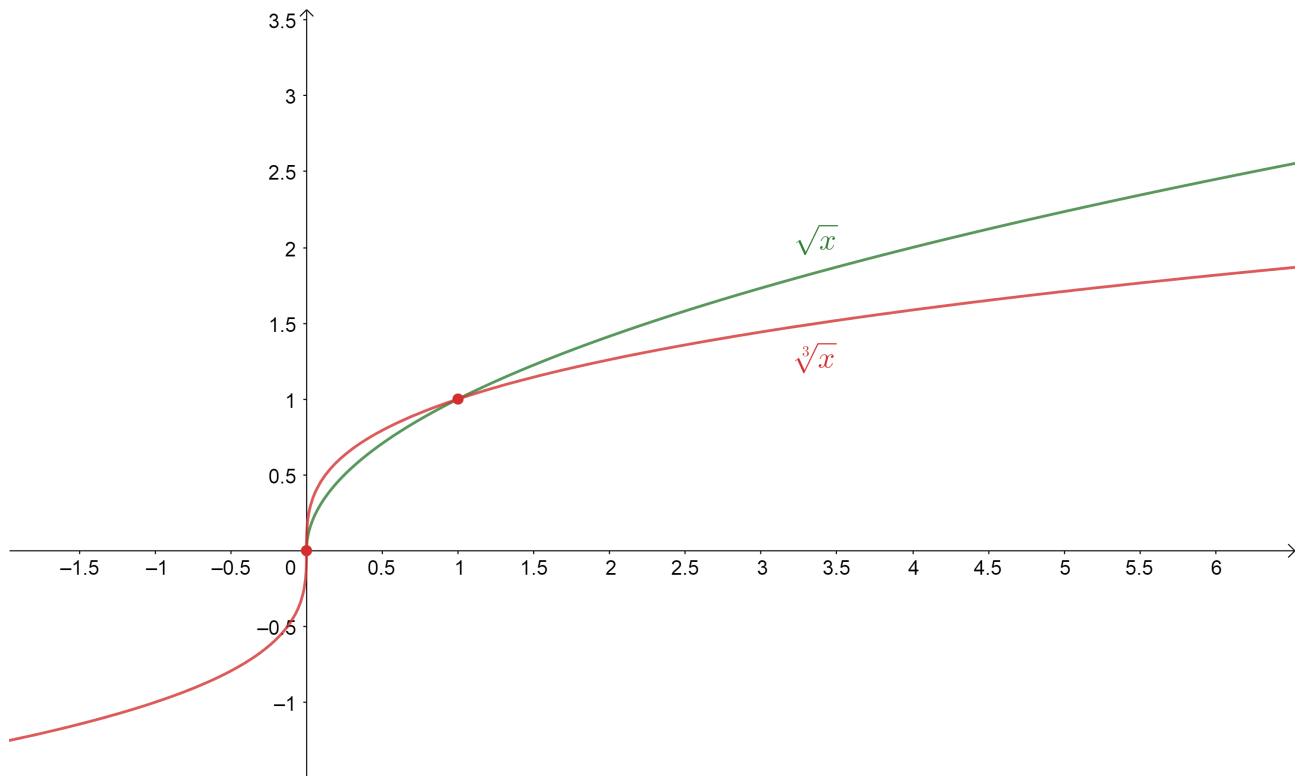
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Il peut être utile de connaître quelques valeurs remarquables de la racine carrée :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} \approx 1.41 \text{ et } \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Propriété 2.13 : Racine carrée d'un carré

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$



2.5 La fonction partie entière

Définition 2.14 : Fonction partie entière

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est appelée **fonction partie entière**. Pour $x \in \mathbb{R}$, elle associe le seul entier $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Proposition 2.15 : Fonction partie entière

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et constante sur chaque intervalle $[k, k + 1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

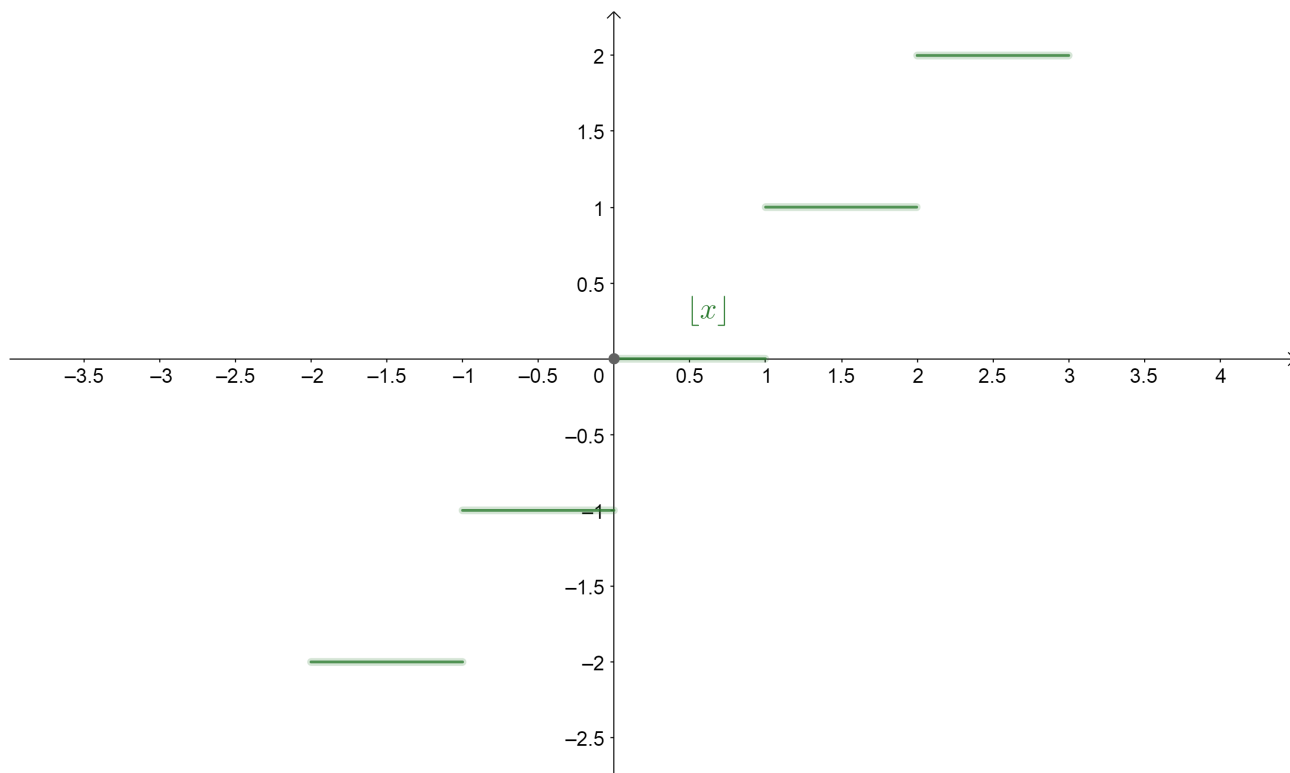
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

Remarque 2.16 : Fonction partie entière

On remarque que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

De plus, la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.



3 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 3.1 : Fonction logarithme népérien

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ (ou parfois $\log(x)$) est appelée **logarithme népérien** et définie par

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Le logarithme népérien est donc l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1 de la fonction inverse.

Propriété 3.2 : Fonction logarithme népérien

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus, f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Remarque 3.3 : Signe du logarithme népérien

Attention la fonction logarithme népérien n'est pas toujours positive ! Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

si $x \leq 1$, alors $\ln(x) \leq 0$. Si $x \geq 1$, alors $\ln(x) \geq 0$.

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y.$$

$$\ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow x \leq y.$$

$$\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y.$$

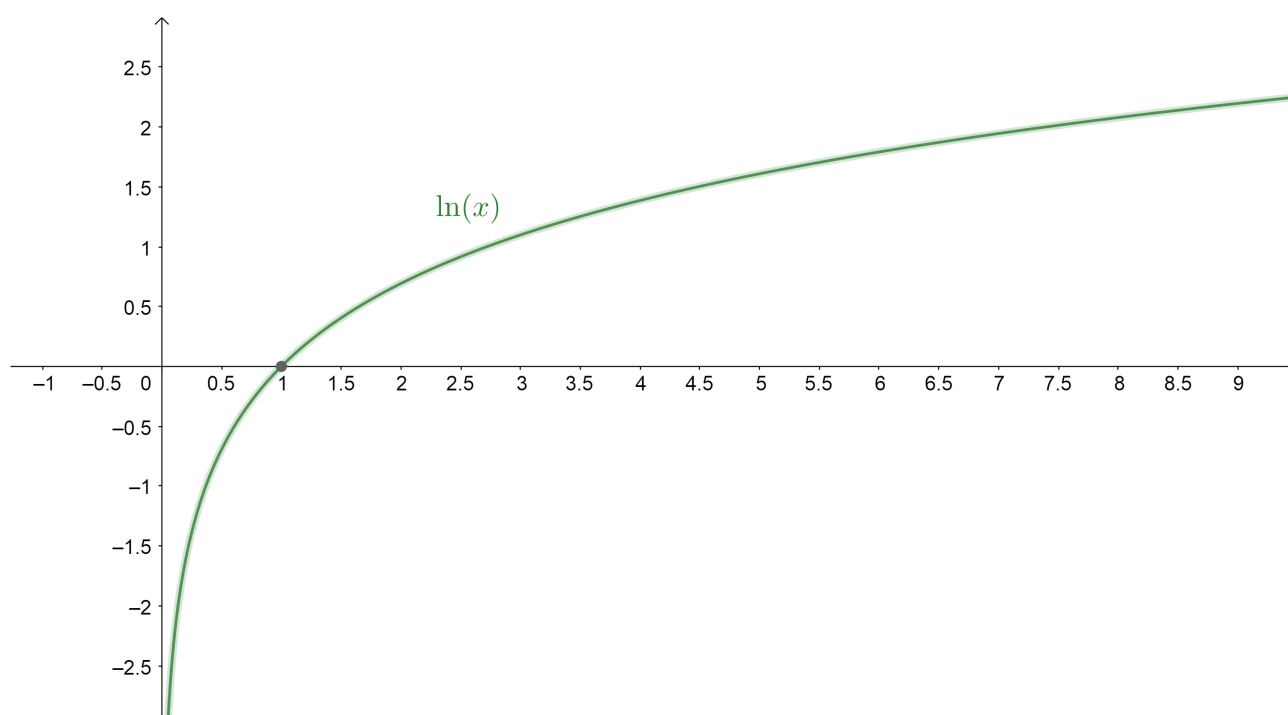
Exemple 12. Il peut être utile de connaître les valeurs suivantes :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(2) \approx 0.69$$

Propriété 3.4 : Règles de calcul

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln(x^n) = n \ln(x) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$



3.2 La fonction exponentielle

Définition 3.5 : Fonction exponentielle

La fonction $f : x \mapsto e^x$ (ou $\exp(x)$) est appelée **exponentielle** et c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. De ce fait,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

Ainsi on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(y)} = y.$$

Propriété 3.6 : Fonction exponentielle

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x.$$

De plus, f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$e^x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

$$e^x \leq e^y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y.$$

$$e^x < e^y \quad \Leftrightarrow \quad x < y.$$

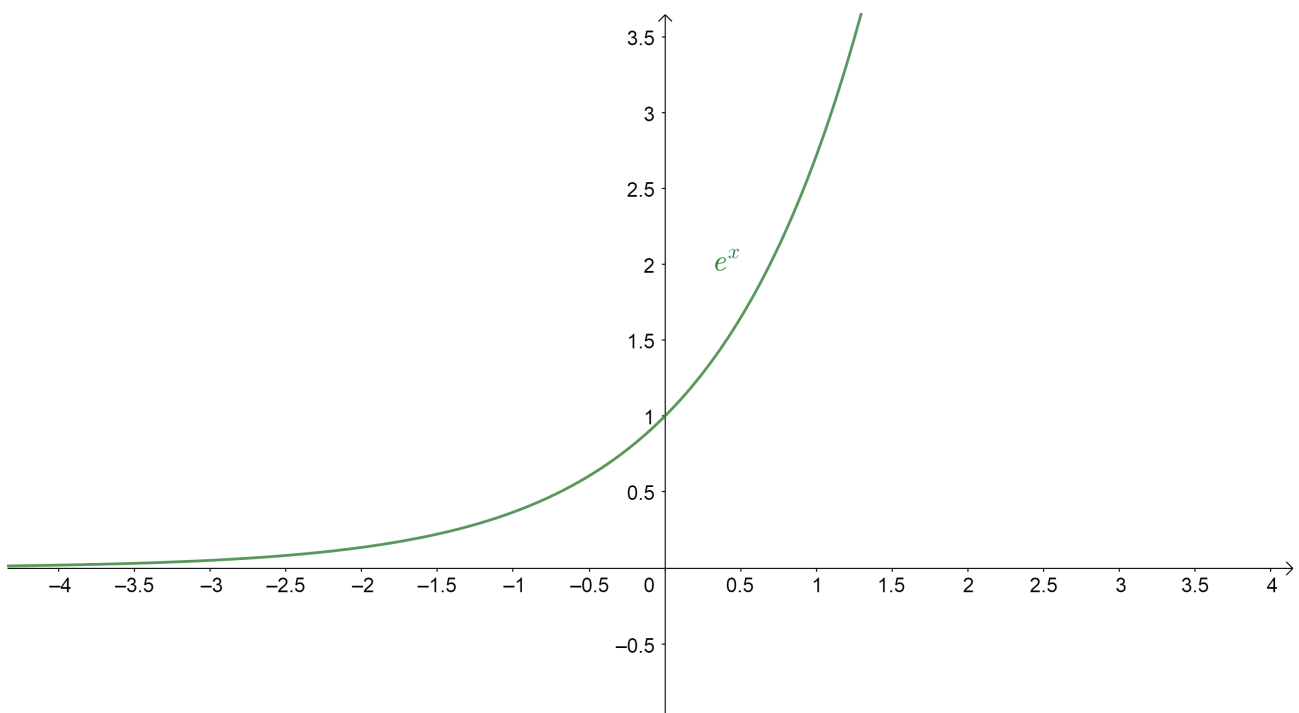
Exemple 13. Il peut être utile de connaître les valeurs suivantes :

$$e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^1 = e \approx 2.72$$

Propriété 3.7 : Règles de calcul

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (e^x)^n = e^{nx} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$



3.3 Puissances à exposant réel

Définition 3.8 : Puissance à exposant réel

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est appelée **fonction puissance** α et elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$$

Propriété 3.9 : Puissance à exposant réel

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De plus,

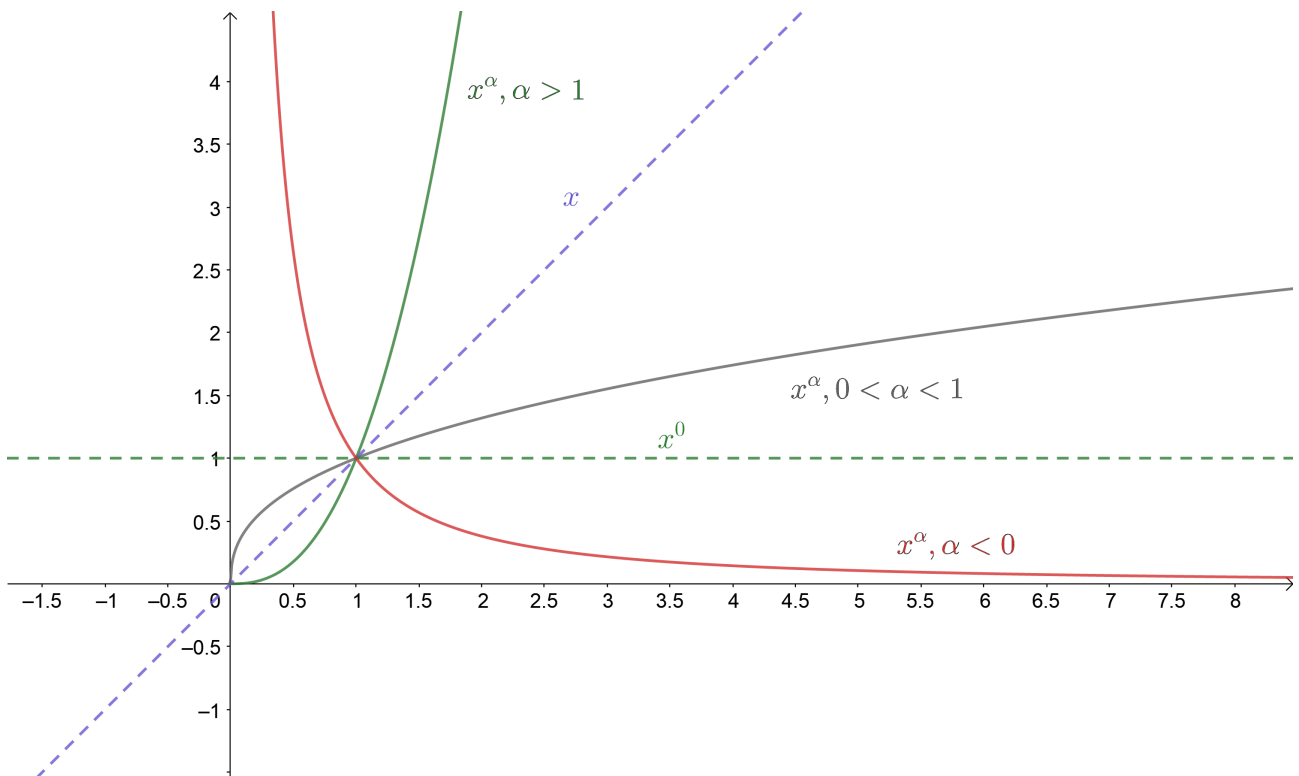
- si $\alpha > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
- si $\alpha < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$

Propriété 3.10 : Règles de calcul

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

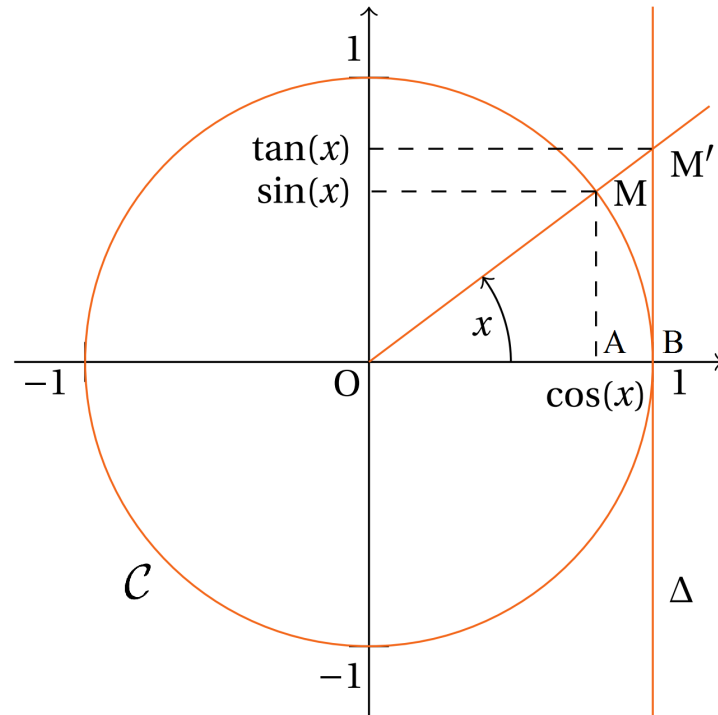
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$



4 Les fonctions trigonométriques

On considère la représentation suivante du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct). Chaque point M du cercle $\mathcal{C}$ peut être associé à un angle x dont la valeur en radian (dans $[0, 2\pi[$) correspond à la longueur de l'arc BM (B étant le point $(1, 0)$).

Le cosinus de l'angle x (noté $\cos(x)$) est l'abscisse du point M , le sinus de l'angle x (noté $\sin(x)$) est l'ordonnée du point M . La tangente de l'angle x (notée $\tan(x)$) est l'ordonnée du point M' , intersection de la droite (OM) avec la droite Δ tangente en B au cercle $\mathcal{C}$. Comme il n'y a pas d'intersection entre (OM) et Δ pour les angles $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$, la tangente de ces angles n'est pas définie.



Les fonctions cosinus et sinus sont ensuite prolongées sur $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité. La fonction tangente est prolongée sur $\mathbb{R}$ par π -périodicité.

Théorème 4.1 : Pythagore

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration. On note A le point $(\cos(x), 0)$. On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle OAM . □

Corollaire 4.2 : Bornes

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.1, comme $\cos^2(x) \geq 0$, alors

$$\sin^2(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

De même,

$$\cos^2(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

□

Théorème 4.3 : Thalès

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration. On note A le point $(\cos(x), 0)$ et B le point $(1, 0)$. Les points O, M, M' et O, A, B sont alignés, les droites (AM) et (BM') sont parallèles. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\tan(x)}{1} = \tan(x).$$

□

4.1 La fonction sinus**Définition 4.4 : Fonction sinus**

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est appelée **fonction sinus**.

Propriété 4.5 : Fonction sinus

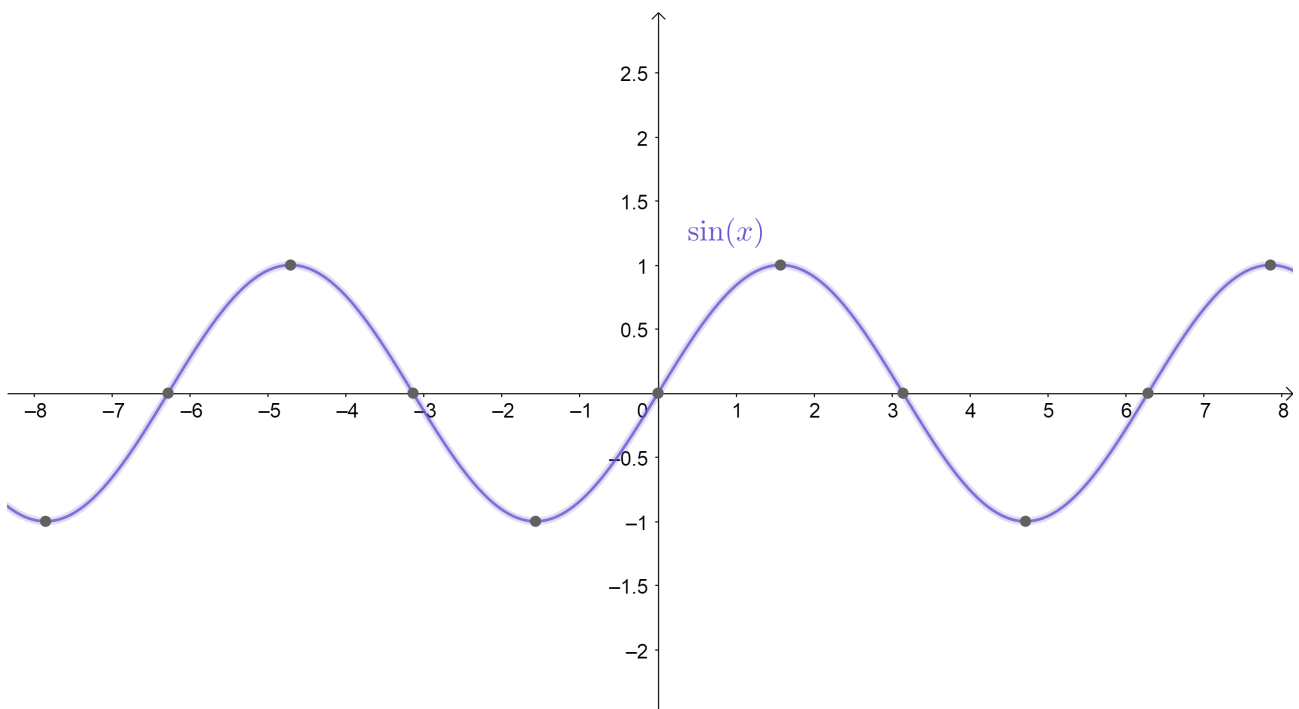
La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x).$$

De plus, f est impaire, 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.



4.2 La fonction cosinus

Définition 4.6 : Fonction cosinus

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est appelée **fonction cosinus**.

Propriété 4.7 : Fonction cosinus

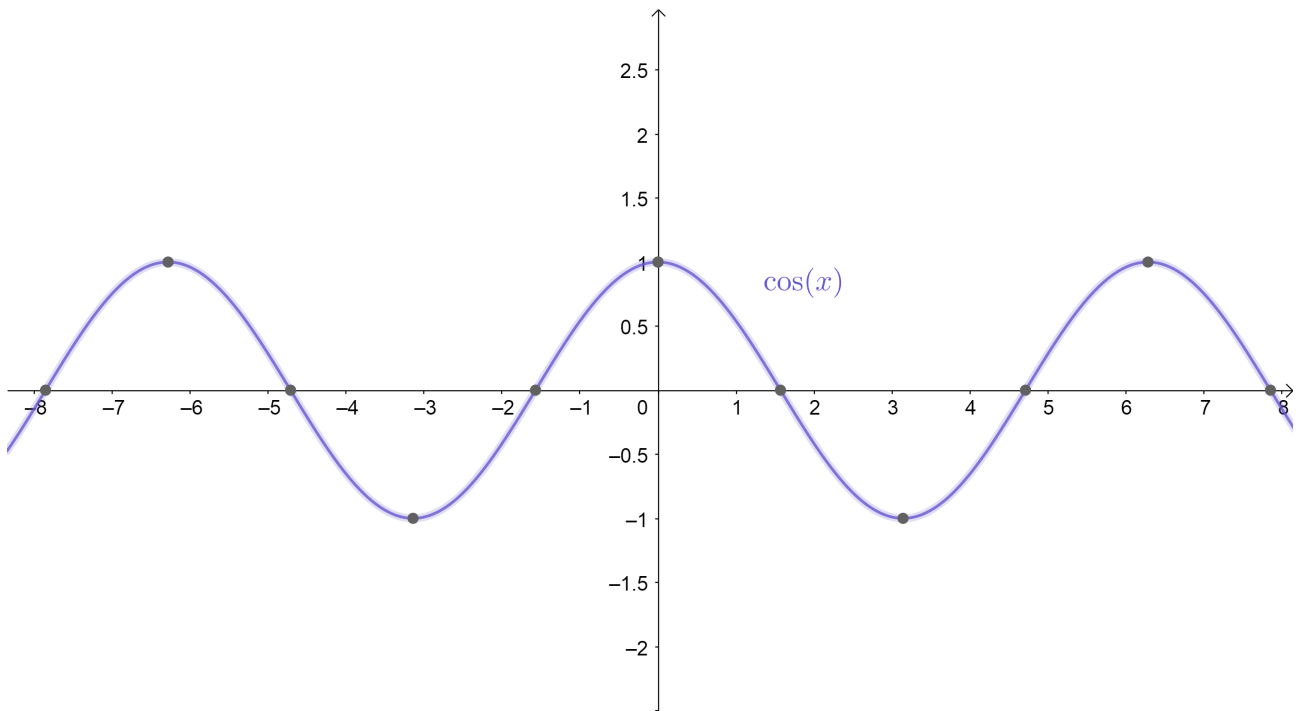
La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin(x).$$

De plus, f est paire, 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.



Exemple 14. Résolvons l'équation $4\cos^2(2x) = 3$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 4\cos^2(2x) = 3 &\Leftrightarrow \cos^2(2x) = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Certaines solutions se retrouvent deux fois et on obtient l'ensemble des solutions suivant :

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \dots, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \dots \right\}.$$

4.3 La fonction tangente

Définition 4.8 : Fonction tangente

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est appelée **fonction tangente** et elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

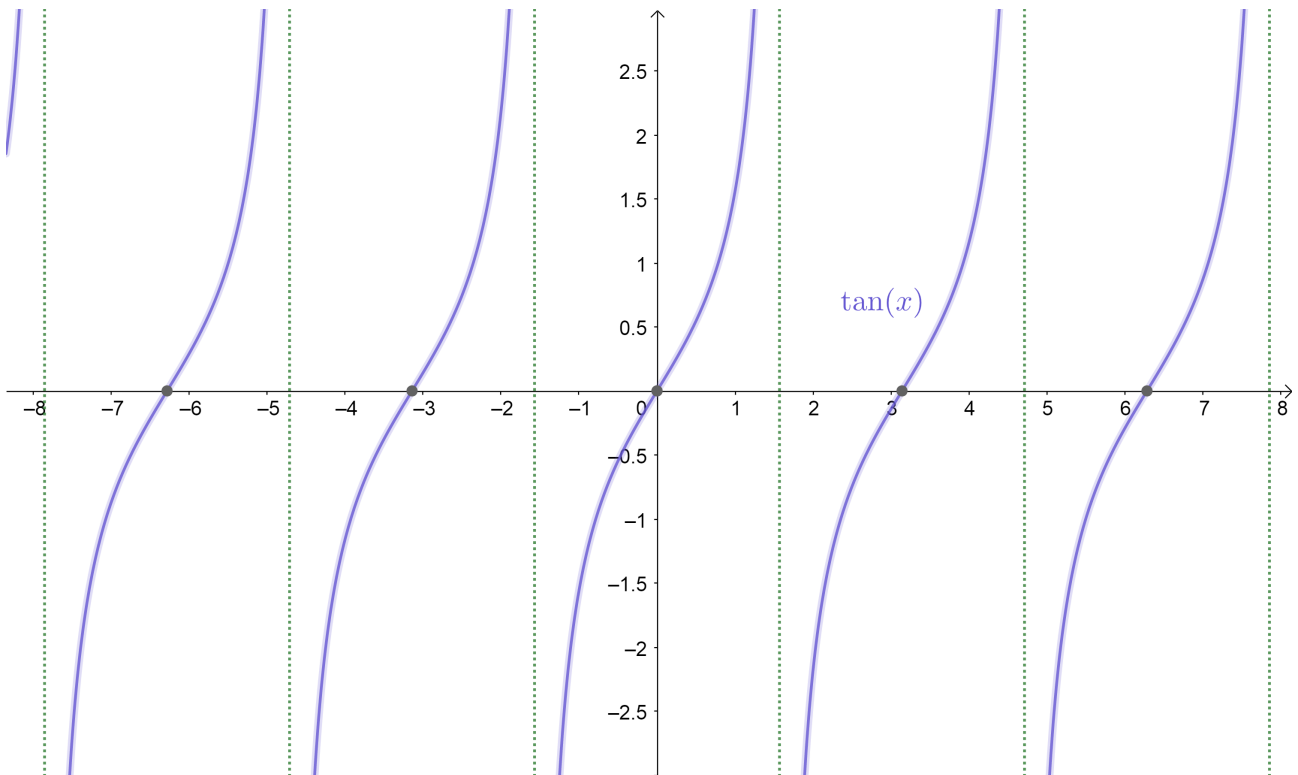
Propriété 4.9 : Fonction tangente

La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

De plus, f est impaire, π -périodique sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$.



4.4 La fonction arctangente

Définition 4.10 : Fonction arctangente

La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est appelée **fonction arctangente** et c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \tan(\arctan(x)) = x.$$

Propriété 4.11 : Fonction arctangente

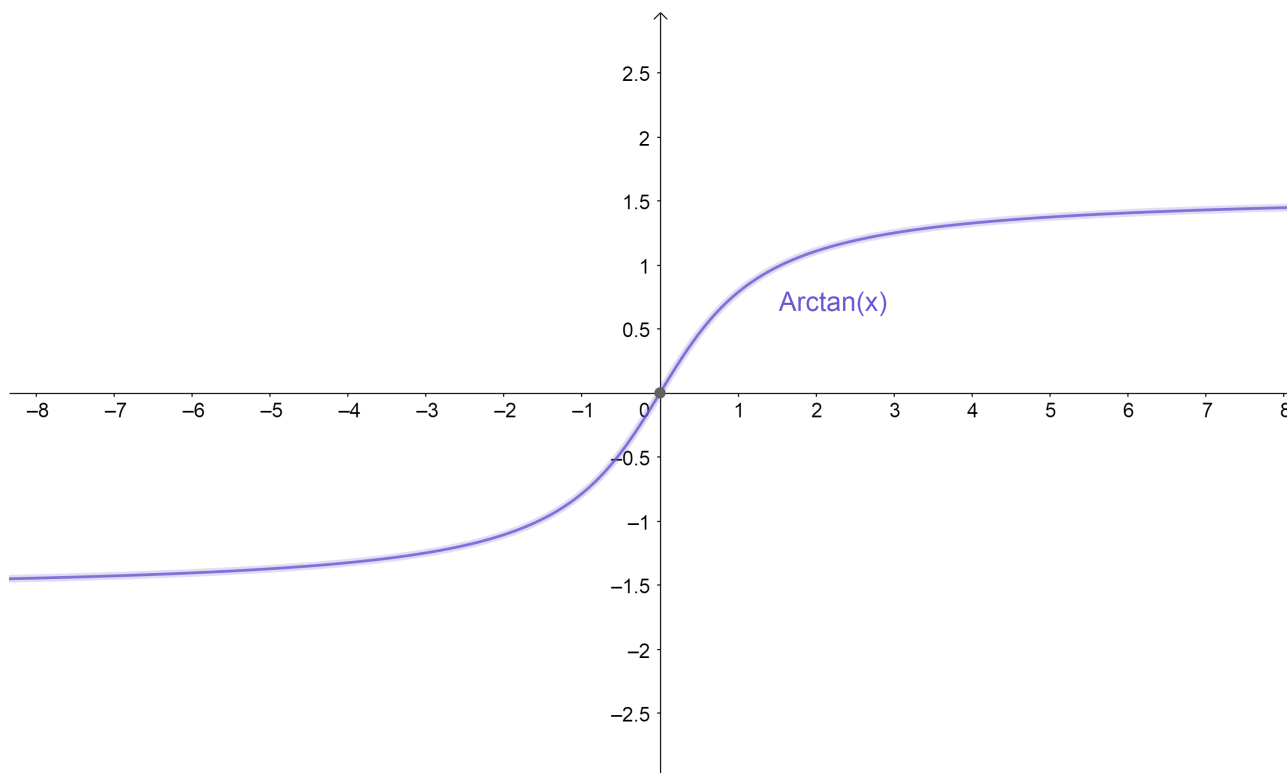
La fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée de la fonction arctan sera calculée dans le chapitre Dérivabilité.



4.5 Formulaire de trigonométrie

Soient x et y deux réels.

$$\begin{array}{llll} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 & (\text{théorème de Pythagore}) & \cos(-x) = \cos(x) & (\text{cosinus est paire}) \\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} & (\text{théorème de Thalès}) & \sin(-x) = -\sin(x) & (\text{sinus est impaire}) \end{array}$$

Formules d'addition

$$\begin{array}{ll} \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) & \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \end{array}$$

Les formules ci-dessous ne sont pas exigibles par le programme. Elles sont des conséquences des formules d'addition.

Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \cos(x)\cos(y) &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \end{aligned}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Formules de factorisation

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

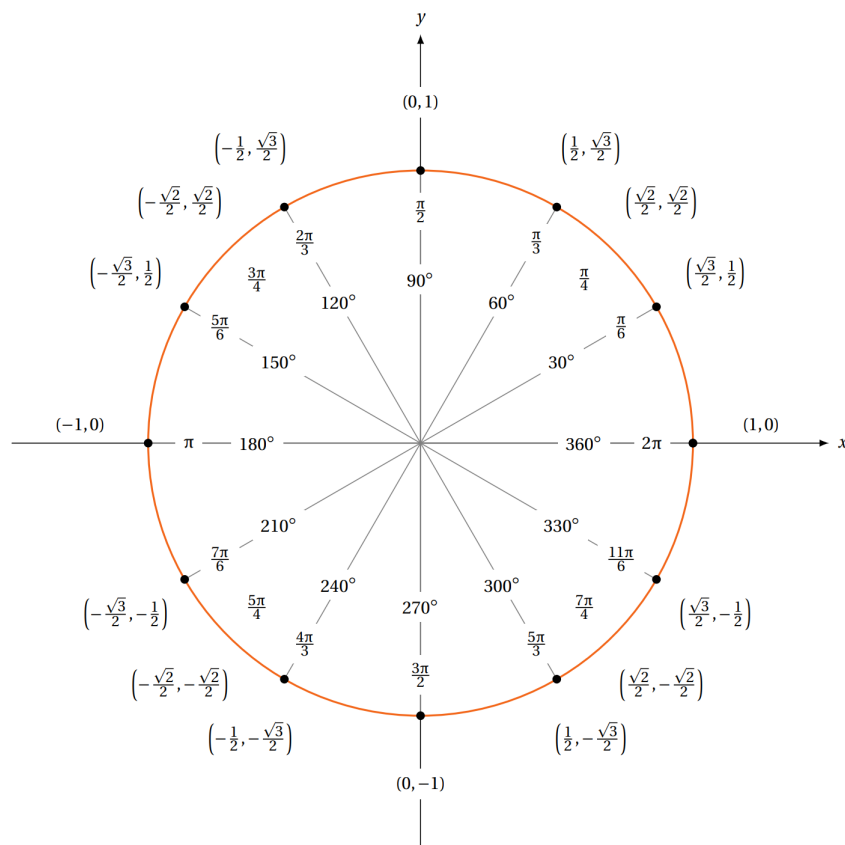
Exemple 15. *Il peut être utile de connaître plus particulièrement les formules suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) & \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} \cos(x + \pi) = -\cos(x) & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \cos(x - \pi) = -\cos(x) & \sin(x - \pi) = -\sin(x) \end{array}$$

Valeurs remarquables



On en déduit le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0

La fonction arctangente est la bijection réciproque de la fonction tangente de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	limite en $+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les valeurs remarquables négatives de ces fonctions s'obtiennent par parité ou imparité.