

Séries de fonctions – TD₁₃

Exercice 1 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I .

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est convexe sur I .

Exercice 2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S possède une limite en $+\infty$.
4. Donner un équivalent simple de S en $+\infty$.

Exercice 3 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \times x + 1}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la limite ℓ de S en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de $S(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 4 :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f .
2. Montrer que f est continue sur I .
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
4. Montrer que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et déterminer cette limite.
5. Déterminer un équivalent de $f(x) - \ell$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$.

1. Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. Dans la suite, on note S la somme de la série.
2. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
3. Calculer $S'(1)$.

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note $f_n(x) = \text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n)$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

On pourra montrer que, pour tout $x > 0$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 7 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 \times x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S .
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 8 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{n \times x})}{n^3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S .
2. Démontrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. La fonction S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition?

Exercice 9 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n \times x}}{1+n^2}$.

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer, pour tout $x > 0$, $S''(x) + S(x)$.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 10 :

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(n \times x)}{n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de S .
2. Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \setminus \{0\}$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S'\left(\frac{1}{p}\right) \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{2n}$.

La fonction S est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?

Exercice 11 :

On considère la série des fonctions $f_n(x) = n \times x^2 \times e^{-x \times \sqrt{n}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de cette série de fonctions.
2. Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[a, +\infty[$ de cette série de fonctions.

Exercice 12 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note $f_n(x) = n^\alpha \times x^n \times (1-x)$.

Discuter selon les valeurs de α de la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.