

Fonctions à valeurs vectorielles – TD₁₆

Révisions de Sup'

Exercice 1

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in]0, 1[$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1. On notera encore f l'application ainsi prolongée.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
5. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

Réponse

1. Soit $x \in]0, 1[$. La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur le **segment** $[x^2, x]$. Donc, $-f(x) = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt$ existe. Donc, f est bien définie.
2. La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$, donc possède des primitives sur cet intervalle. Soit H l'une d'elle. On sait que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = H(x^2) - H(x)$.
Donc, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = 2x \times H'(x^2) - H'(x) = 2x \times h(x^2) - h(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

3. Étudions la limite en 0.

Soit $x \in]0, 1[$. Par croissance de la fonction $\ln$, on a : pour tout $t \in [x^2, x]$, $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$

D'où, par décroissance de la fonction inverse : pour tout $t \in [x^2, x]$, $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$.

D'où, par croissance de l'intégrale (penser à mettre les bornes dans le bon ordre), $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt \leq -f(x) \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt$.

Or, $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt = x \times (1-x) \times \frac{1}{\ln(x)}$. De plus, $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$. Donc, par opération sur les limites $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

De même, $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt = x \times (1-x) \times \frac{1}{2 \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc, par encadrement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R}$.

On peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.

Étudions la limite en 1.

Astuce : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t \times \ln(t)} dt$.

Soit $x \in]0, 1[$. Pour tout $t \in [x^2, x]$, on a $t \times \ln(t) < 0$. Donc, $\frac{x^2}{t \times \ln(t)} \leq \frac{t}{t \times \ln(t)} \leq \frac{x}{t \times \ln(t)}$.

D'où, par croissance de l'intégrale ($x^2 \leq x$),

$$\int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \times \ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x}{t \times \ln(t)} dt.$$

Or, $\int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \times \ln(t)} dt = x^2 \int_{x^2}^x \frac{1}{t \times \ln(t)} dt = x^2 [\ln(|\ln(t)|)]_{x^2}^x = x^2 (\ln(|\ln(x^2)|) - \ln(|\ln(x)|)) = x^2 \ln(2) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2)$. De même,

$\int_{x^2}^x \frac{x}{t \times \ln(t)} dt = x \ln(2) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2)$.

Donc, par théorème d'encadrement,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 et on pose $f(1) = \ln(2)$.

4. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

De plus,

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 \in \mathbb{R}.$$

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et en 1.

De plus, le théorème assure aussi que f' est continue en 0 et en 1.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

5. La fonction f' est continue sur le **segment** $[0, 1]$, donc est intégrable sur $[0, 1]$ et, par conséquent, sur $]0, 1[$. D'où,

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \int_0^1 f'(t) dt.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = \ln(2).$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2).$$

Exercice 2

Soient $a < b$ des réels et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ positive.

1. Justifier l'existence de $M = \max_{[a, b]} f$.

2. Montrer que $\sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

Réponse

1. La fonction f est continue sur le **segment** $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. D'où l'existence de M .
 2. Si f est la fonction nulle ($M = 0$), il n'y a rien à faire.

Dans la suite, on suppose que f n'est pas la fonction nulle. Donc, $M > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, pour tout $t \in [a, b]$, $(f(t))^n \leq M^n$.

Donc, par croissance de l'intégrale ($a < b$), $\int_a^b (f(t))^n dt \leq (b-a) \times M^n$.

D'où, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, on a $\sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} \leq (b-a)^{\frac{1}{n}} \times M$.

De plus, par le théorème des bornes atteintes, on sait qu'il existe $c \in I$, tel que $f(c) = M$.

Soit $\varepsilon \in]0, M[$. Par continuité de f en c , il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b] \cap [c-\eta, c+\eta]$, $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$.

On note $[\alpha, \beta]$ l'intervalle $[a, b] \cap [c-\eta, c+\eta]$.

Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a $f(x) \geq f(c) - \varepsilon > 0$. (c'est pour avoir cette dernière inégalité qu'on suppose $\varepsilon < M = f(c)$).

Donc, par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$ et croissance de l'intégrale,

$$\int_\alpha^\beta (f(t))^n dt \geq \int_\alpha^\beta (f(c) - \varepsilon)^n dt \geq (\beta - \alpha) \times (f(c) - \varepsilon)^n.$$

D'où,

$$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \times (f(c) - \varepsilon) \leq \sqrt[n]{\int_\alpha^\beta (f(t))^n dt} \leq (b-a)^{\frac{1}{n}} \times M$$

Or, pour tout $\mu > 0$, $\mu^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $(b-a)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{2\varepsilon}{M}$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{f(c)}.$$

Donc, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$.

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{f(c)}\right) \times (f(c) - \varepsilon) \leq \sqrt[n]{\int_\alpha^\beta (f(t))^n dt} \leq M \times \left(1 + \frac{2\varepsilon}{M}\right).$$

Or, $M = f(c) > 0$ et $\left(1 - \frac{\varepsilon}{f(c)}\right) \times (f(c) - \varepsilon) = M - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{M} \geq M - 2\varepsilon$. Donc,

$$M - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} \leq M + 2\varepsilon.$$

D'où, $\left| \sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} - M \right| \leq 2\varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon \in]0, M[$.

Donc, $\sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

Indication : on pourra calculer les premières dérivées de f sur $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$ et observer un phénomène intéressant.

Réponse

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables ($x \neq 0$)
 - En calculant les dérivées f' , f'' et f''' , on conjecture que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$.
- Pour montrer cette conjecture, on procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$ et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. »

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, le polynôme $P_0 = 1$ vérifie, pour tout $x \neq 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = P_0\left(\frac{1}{x}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$.

La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

De plus, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ et $\exp$ est continue en 0. Donc, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Donc f est continue (= de classe $\mathcal{C}^0$) sur $\mathbb{R}$.

Donc, $\mathcal{H}_0$

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

On en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \times P_n'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^3} \times P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

On pose alors, $P_{n+1} = -X^2 \times P_n' - 2X^3 \times P_n \in \mathbb{R}[X]$ et on a, pour tout $x \neq 0$, $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \times e^{-\frac{1}{x^2}}$.

On note $u = \frac{1}{x}$. Par croissances comparées, $P_{n+1}(u) \times e^{-u^2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$.

On a donc :

► $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

► $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\triangleright f^{(n+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathcal{H}_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0.$$

Exercice 5 : Trois applications du théorème des accroissements finis

- Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\operatorname{Arctan}(n)}{\operatorname{Arctan}(n+1)} \right)^{n^2}$.
- Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
- Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \times e^{\frac{1}{x+1}} - x \times e^{\frac{1}{x}} \right)$.

Réponse

1. On a :

$$u_n = \exp \left[-n^2 \times (\ln(\operatorname{Arctan}(n+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(n))) \right].$$

Soit $n \geq 1$. La fonction $f : x \mapsto \ln(\operatorname{Arctan}(x))$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. Donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que :

$$\ln(\operatorname{Arctan}(n+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(n)) = f(n+1) - f(n) = f'(c_n) \times (n+1 - n) = \frac{1}{1+c_n^2} \times \frac{1}{\operatorname{Arctan}(c_n)}.$$

Or, $n < c_n < n+1$, donc par théorème de minoration, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et, par encadrement, $c_n \sim n$.

Donc,

$$\ln(\operatorname{Arctan}(n+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(n)) \sim \frac{1}{n^2} \times \frac{2}{\pi}.$$

D'où,

$$-n^2 \times (\ln(\operatorname{Arctan}(n+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(n))) \sim -\frac{2}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\pi}.$$

Par composition des limites,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

2. Soit $x > 0$.

► On a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp \left[x \times \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \exp \left[x \times \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1) \right) \right].$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{x}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{1}{x}\right[$.

Donc par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in \left]0, \frac{1}{x}\right[$ tel que :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(0) = f'(c_x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+c_x} \times \frac{1}{x}.$$

$$\text{D'où, } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp \left(\frac{1}{1+c_x} \right).$$

Or, $c_x > 0$, donc $\frac{1}{1+c_x} < 1$, puis par stricte croissance de $\exp$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$.

► On a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \exp \left[(x+1) \times \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \exp \left[(x+1) \times \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1) \right) \right].$$

Comme précédemment, par l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in \left]0, \frac{1}{x}\right[$ tel que, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1) = \frac{1}{1+c_x} \times \frac{1}{x}$.

D'où, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \exp\left(\frac{x+1}{x} \times \frac{1}{1+c_x}\right)$.

Or, $0 < c_x < \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{1+c_x} > \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Or, $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$. Donc, par stricte croissance de exp, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > \underbrace{e^{\frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x+1}}}_{=e}$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $L_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)} \in \mathbb{R}[X]$.

- Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
- Montrer que L_n admet n racines simples et toutes dans $] -1, 1[$.

Réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $L_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)} \in \mathbb{R}[X]$.

- Par la formule du binôme de Newton, $(X^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k} = X^{2n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}}_{\text{de degré} < 2n}$.

Donc $(X^2 - 1)^n$ est de degré $2n \geq n$.

En dérivant n fois, il vient L_n est degré $2n - n = n$ et son coefficient dominant est $(2n) \times (2n-1) \times \dots \times (n+1) = \frac{(2n)!}{n!}$.

- On note $P_n = (X^2 - 1)^n$. On a $P_n = (X^2 - 1)^n = (X-1)^n \times (X+1)^n$. On en déduit que 1 est racine de P_n de multiplicité n et -1 est racine de P_n de multiplicité n .

On montre par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la propriété $\mathcal{H}_k$: « $P_n^{(k)}$ possède k racines simples dans $] -1, 1[$ ».

Initialisation. $k = 1$.

On sait alors que 1 est racine de P_n' de multiplicité $n-1$ et -1 est racine de P_n' de multiplicité $n-1$.

De plus, la fonction $x \mapsto P_n(x)$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$ car polynomiale. De plus, $P_n(1) = P_n(-1) = 0$. Donc, par le théorème de Rolle, il existe $c \in] -1, 1[$ tel que $P_n'(c) = 0$.

Or, P_n est de degré $2n$, donc P_n' est de degré $2n-1$. De plus, $n-1 + n-1 + 1 = 2n-1$. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_n' = \alpha \times (X-1)^{n-1} \times (X+1)^{n-1} \times (X-c).$$

Ainsi, $c \in] -1, 1[$ est racine simple de P_n' ($\mathcal{H}_1$).

Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, il existe k racines simples de $P_n^{(k)}$ toutes dans $] -1, 1[$. On note $c_1 < \dots < c_k$ ces racines. On note aussi $c_0 = -1$ et $c_{k+1} = 1$.

On sait que 1 est racine de $P_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k \geq 1$ et -1 est racine de $P_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k \geq 1$.

Soit $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. La fonction $P_n^{(k)}$ est continue sur $[c_i, c_{i+1}]$ et dérivable sur $]c_i, c_{i+1}[$ (car polynomiale), et $P_n^{(k)}(c_i) = P_n^{(k)}(c_{i+1}) = 0$.

Donc, par le théorème de Rolle, il existe $d_i \in]c_i, c_{i+1}[$ tel que $P_n^{(k+1)}(d_i) = 0$.

On a $1 = c_0 < d_0 < c_1 < d_1 < \dots < c_{k-1} < d_{k-1} < c_k < d_k < 1$. Donc, $d_0, \dots, d_k$ sont $k+1$ racines distinctes de $P_n^{(k+1)}$ toutes dans $] -1, 1[$.

De plus, 1 est racine de $P_n^{(k+1)}$ de multiplicité $n-k-1$ et -1 est racine de $P_n^{(k+1)}$ de multiplicité $n-k-1$ (NB : lorsque $n-k-1 = 0$, alors 1 et -1 ne sont pas racines de $P_n^{(k+1)}$. On utilise la convention : dire que μ est racine de multiplicité 0 signifie que μ n'est pas racine de P).

Or, $P_n^{(k+1)}$ est de degré $2n-k-1 = (n-k-1) + (n-k-1) + k+1$. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_n^{(n-k-1)} = \alpha \times (X-1)^{n-k-1} \times (X+1)^{n-k-1} \times (X-d_0) \times \dots \times (X-d_k).$$

On en déduit que les racines $d_0, \dots, d_k$ sont simples.

Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Donc, $\mathcal{H}_n$. Autrement dit $L_n = P_n^{(n)}$ possède n racines simples dans $] -1, 1[$. De plus L_n est de degré n , donc on a trouvé toutes les racines de L_n .

Exercice 7

Calculer les dérivées successives de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que tout $y \in \mathbb{R}$ possède au plus deux antécédent par f . Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que y_0 possède exactement un antécédent par f .

Réponse

Cas 1 : tout $y \in \mathbb{R}$ possède au plus deux antécédent par f (autrement dit f est injective).

Dans ce cas, tout y dans l'image de f convient.

Cas 2 : f n'est pas injective.

Dans ce cas, il existe $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$.

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. Donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tels que $f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Sous-cas 1 : $c = a$ ou $c = b$. Montrons que d ne possède qu'un seul antécédent par f .

On ne peut pas avoir $d = a$ ou $d = b$, sinon, $f(c) = f(a) = f(b) = f(d)$ et, donc, pour tout $x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d) = f(c)$. D'où, $f(c)$ possède une infinité d'antécédent. Contradiction.

Donc, $d \in]a, b[$. En particulier $f(a) < f(d)$ et $f(b) < f(d)$.

Si d possède un second antécédent d' dans $[a, b]$, par définition du max, pour tout x entre d et d' , $f(x) = f(d) = f(d')$ et d possède une infinité d'antécédent. Contradiction.

Montrons que d ne possède pas d'autre antécédent sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Par l'absurde, on suppose que c'est le cas : il existe $d'' < a$ (le cas $d'' > b$ se traite de la même manière) tel que $f(d'') = f(d)$.

Prenons $y \in]f(a), f(d)[$.

— Comme f est continue sur $[d'', a]$ et $f(a) < y < f(d) = f(d'')$, par le Théorème de Valeurs Intermédiaires, il existe $c_1 \in]d'', a[$ tel que $y = f(c_1)$.

— Comme f est continue sur $[a, d]$ et $f(a) < y < f(d)$, par le Théorème de Valeurs Intermédiaires, il existe $c_2 \in]a, d[$ tel que $y = f(c_2)$.

— Comme f est continue sur $[d, b]$ et $f(b) = f(a) < y < f(d)$, par le Théorème de Valeurs Intermédiaires, il existe $c_3 \in]d, b[$ tel que $y = f(c_3)$.

Donc, y possède au moins 3 antécédents par f , contradiction.

Donc, d ne possède pas d'autre antécédent sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Sous-cas 2 : $c \neq a$ et $c \neq b$. Montrons par l'absurde que $d = a$ ou $d = b$.

On suppose que $d \in]a, b[$. Pour fixer les idées et $c < d$.

On a $f(c) < f(a) < f(d)$. Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe $x_0 \in]c, d[$ tel que $f(a) = f(x_0)$.

Donc, $f(a)$ possède au moins 3 antécédents. Contradiction.

Donc, $d = a$ ou $d = b$. On raisonne ensuite comme dans le cas précédent.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Réponse

La résolution suit la démonstration du théorème qui permet de résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

On note $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Par le théorème fondamental de l'analyse, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $F' = f$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq F'(x) \leq k \times F(x).$$

On multiplie par $e^{-k \times x} > 0$, on a :

$$0 \leq F'(x) \times e^{-k \times x} \leq k \times F(x) \times e^{-k \times x}.$$

D'où,

$$F'(x) \times e^{-k \times x} - k \times F(x) \times e^{-k \times x} \leq 0.$$

On reconnaît la dérivée de $G : x \mapsto F(x)e^{-k \times x}$.

Cette dérivée est négative, donc, G est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $G(0) = F(0) = 0$.

Donc, pour tout $x \geq 0$, $G(x) = F(x)e^{-k \times x} \leq 0$.

Comme $\exp > 0$, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \leq 0$.

De plus, par hypothèse, pour tout $x \geq 0$, $kF(x) \geq 0$. Comme $k > 0$, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \geq 0$.

Donc,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, F(x) = 0, \text{ puis par conséquent, } f(x) = 0.$$

Dérivation de fonctions à valeurs vectorielles**Exercice 10**

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(t) = \left(t^3 \times \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^3 \right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on appelle encore f le prolongement obtenu.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}_{(n)}$$

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$.
2. En déduire l'expression de $D_n(x)$ en fonction de n et x .

Exercice 12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que f est à valeurs dans un plan.
2. Montrer que f est à valeurs dans un cercle.
3. Montrer que $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Exercice 13

On considère point M qui se déplace dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $f(t) = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position de M à l'instant $t \in I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que M se déplace à vitesse constante si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $f'(t) \perp f''(t)$.
2. Montrer que M accélère si, et seulement si, l'angle entre $f'(t)$ et $f''(t)$ est compris entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que M décélère si, et seulement si, l'angle entre $f'(t)$ et $f''(t)$ est compris entre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 14

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable ne s'annulant pas sur I . On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Justifier que la fonction $u : t \mapsto \frac{1}{\|f(t)\|} \cdot f(t)$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires. Montrer que, f est à valeurs dans une droite vectorielle.

Exercice 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . On suppose que, pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$ et les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires.

Montrer que la fonction f est à valeurs dans un plan vectoriel.

Indication : on pourra considérer la fonction $u : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ et calculer sa dérivée (si cela a un sens bien sûr!).

Réponse

La fonction $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire et les fonctions f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , donc u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

De plus, pour tout $t \in I$, $u'(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = f(t) \wedge f''(t)$.

Or, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires donc, $u'(t) = 0$.

On en déduit que u est constante sur l'intervalle I .

Donc, en prenant $a \in I$ quelconque on a, pour tout $t \in I$, $u(t) = u(a)$.

D'où, pour tout $t \in I$, $f(t)$ est orthogonal $f(t) \wedge f'(t) = u(t) = u(a)$.

Cas 1 : $u(a) \neq 0$. Dans ce cas, pour tout $t \in I$, $f(t) \in (\text{Vect}(u(a)))^\perp$.

Or, comme $u(a) \neq 0$, $(\text{Vect}(u(a)))^\perp$ est l'orthogonal d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un plan vectoriel.

Cas 2 : $u(a) = 0$. Dans ce cas, pour tout $t \in I$, $f(t) \wedge f'(t) = u(t) = u(a) = 0$.

Donc, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires. On est alors ramené à l'exercice 10 et f est à valeurs dans une droite vectorielle, donc dans tout plan vectoriel contenant cette droite.

Dans les deux cas, f est à valeurs dans un plan vectoriel.

Exercice 16

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée usuelle (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$)

On considère trois fonctions e_1, e_2 et e_3 de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telles que, pour tout $t \in I$, $\mathcal{B}_t = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ est une base orthonormée directe.

1. Montrer que, pour tout $t \in I$, la matrice $M_t = \text{Mat}_{\mathcal{B}_t}(e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t))$ est antisymétrique.
2. Montrer que, pour tout $t \in I$, il existe un unique vecteur $\Omega(t)$ tel que $e'_i(t) = \Omega(t) \wedge e_i(t)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
3. On suppose de plus les fonctions e_1, e_2 et e_3 de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Montrer que la fonction Ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer e''_i en fonction de Ω, Ω' et e_i .

Exercice 17

Soient $a < b$ des réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On considère la fonction $\Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer $\Delta'(x)$, pour tout $x \in]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a)) \times f'(c) = (f(b) - f(a)) \times g'(c)$.

Réponse

1. On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\Delta(x) = f(x) \times \begin{vmatrix} g(a) & g(b) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - g(x) \times \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = f(x) \times (g(a) - g(b)) - g(x) \times (f(a) - f(b)) + f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

Par opération sur les fonctions continues et dérivables,

$$\Delta \text{ est continue sur } [a, b] \text{ et dérivable sur }]a, b[.$$

De plus, pour tout $x \in]a, b[$,

$$\Delta'(x) = f'(x) \times (g(a) - g(b)) - g'(x) \times (f(a) - f(b)).$$

2. On remarque que $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$ (deux colonnes sont égales). De plus, Δ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Donc, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\Delta'(c) = 0$.

Donc,

$$f'(c) \times (g(a) - g(b)) - g'(c) \times (f(a) - f(b)) = 0.$$

Autrement dit,

$$f'(c) \times (g(b) - g(a)) = g'(c) \times (f(b) - f(a))$$