

## Exercice 1 : Rayonnement dipolaire (*Oral Mines-Ponts*)

Soit  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \sin\theta \vec{u}_\varphi$  un champ électrique ou magnétique (où  $p$  est un moment dipolaire)

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer si  $\vec{A}$  est un champ électrique ou magnétique.
2. Quel est le domaine de validité de cette expression ?
3. Calculer l'autre champ ( $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ).
4. Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  et en discuter.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{p} \sin\theta \vec{u}_\varphi$$

1) Intuition : C'est un champ  $\vec{B}$  ?

Penchons du fait, pour un fil:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

$$[B] = \frac{[\mu_0][I]}{L} = \frac{[\mu_0] Q T^{-1}}{L}$$

$$[A] = \frac{[\mu_0]}{L [\text{vitesse}]} [p] T^{-2} \quad \text{or } p = qd$$

$$= \frac{[\mu_0] Q L T^{-2}}{L \times L \cdot T^{-1}} = \frac{[\mu_0] Q T^{-1}}{L} = [B]$$

$\vec{A}$  est un chm magnétique

2) Cette expression est issue du modèle du dipôle oscillant

3 approximations:

\* Approx dipolaire :  $r \gg a$

où  $p = q a \cos(\omega t)$   $a \sim$  taille du dipôle

\* Approx non-relativiste :  $a \ll \lambda$

\* Approx de la zone de rayonnement :  $r \gg \lambda$

3) l'onde rayonnée est localement plane. La  
relation de structure s'applique avec  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$

P-A:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  du vide

$\downarrow -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E}$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{e}_r \wedge \vec{B}$$

Donc  $\vec{E} = -c \vec{e}_r \wedge \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin \theta}{4\pi r c} \vec{u}_\varphi$

$$\vec{E} = + \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin \theta}{4\pi r} \vec{e}_\theta$$

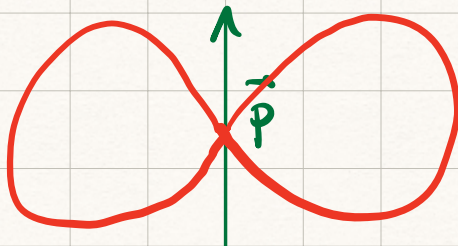
---

$$4) \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 r^2 c} \vec{u}_r$$

L'onde rayonnée transporte de l'énergie dans la direction de propagation ( $\vec{u}_r$ )

Le rayonnement n'est pas isotrope car  $\vec{\pi}$  est nul en  $\theta = 0$  ou  $\pi$  et maximal à  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Diagramme de rayonnement du dipôle :



Puissance rayonnée à travers une sphère de rayon  $R$

$$P = \iint \vec{\pi} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 \ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 r^2 c} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{16 \pi^2 c} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{4/3}$$

$$P = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$$

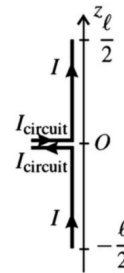
Puissance ne dépend pas  
du rayon de la sphère  
→ Traduction de la conservation  
de l'énergie

## Exercice 2 : Antenne assimilable à un dipôle oscillant

On considère une antenne hertzienne de taille  $l$  alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité  $I_{\text{circuit}}(t) = I_0 \cos \omega t$ .

Dans l'antenne, l'intensité  $I$  dépend de  $z$  et du temps. On suppose qu'elle est nulle aux deux extrémités de côté  $z = \pm \frac{l}{2}$ . D'après les hypothèses, le courant dans l'antenne vaut :

$$I(z, t) = I_{\text{circuit}}(t) \left( 1 - 2 \frac{|z|}{l} \right)$$



1. Quelle doit être la condition sur  $l$  pour que cette antenne puisse être étudiée dans le cadre des dipôles électriques oscillants ?
2. En utilisant la loi locale de conservation de la charge sous la forme  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0$ , déterminer la densité linéique de charge  $\lambda(z, t)$  le long du fil en  $z > 0$  et en  $z < 0$ .
3. En déduire que cette antenne est assimilable à un dipôle dont le moment dipolaire s'écrit  $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{u}_z$  avec  $p_0$  et  $\psi$  à exprimer.

1) Approx non-relativiste :  $v \ll c$

De manière équivalente :

$$l \ll \lambda$$

Autres à l'échelle de l'antenne.

$$\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow l \ll \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{dq}{dz}$$

$$\text{Pour } z > 0 : |z| = +z \text{ d'où } I = I_0(t) \left( 1 - \frac{2z}{l} \right)$$

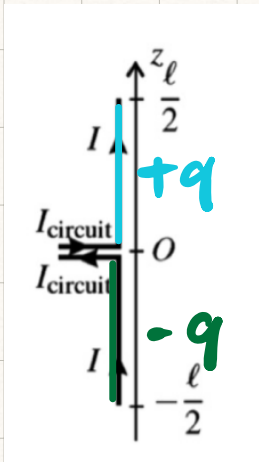
$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial z} = -I_0(t) \frac{2}{l} = -\frac{2I_0 \cos(\omega t)}{l} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda_+(z) = \frac{2I_0}{\ell\omega} \sin(\omega t)}$$

Pour  $z < 0$  :  $|z| = -z$ .

On aboutit à  $\boxed{\lambda_-(z) = -\frac{2I_0}{\ell\omega} \sin(\omega t)}$

3)



Pour  $0 < z < \frac{\ell}{2}$

$$q_+ = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \lambda_+ dz$$

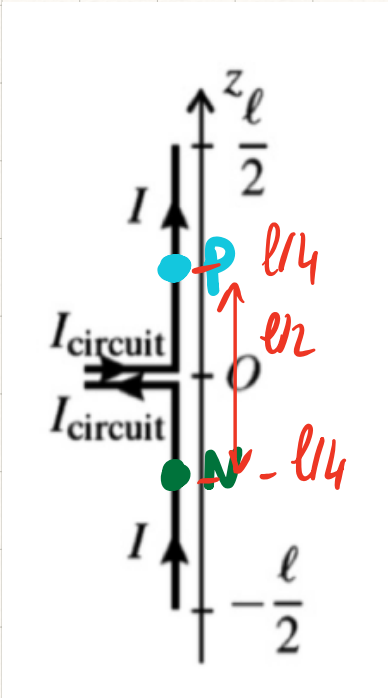
$$q_+ = \lambda_+ \times \frac{\ell}{2}$$

$$\boxed{q_+ = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

Pour  $-\frac{\ell}{2} < z < 0$  :  $q_- = \int_{-\frac{\ell}{2}}^0 \lambda_- dz = \lambda_- \frac{\ell}{2}$

$$\boxed{q_- = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

On a bien  $q_- = -q_+$  donc on peut modéliser l'antenne par un dipôle.



$$\vec{p} = q_+ \vec{NP}$$

$$= \frac{l}{2} q_+ \vec{e}_z$$

$$= \frac{l}{2\omega} I_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Soit

$$\vec{p} = \frac{l I_0}{2\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z$$

$p_0$

$\gamma$

### Exercice 3 : Dipôle magnétique oscillant (Oral CCINP)

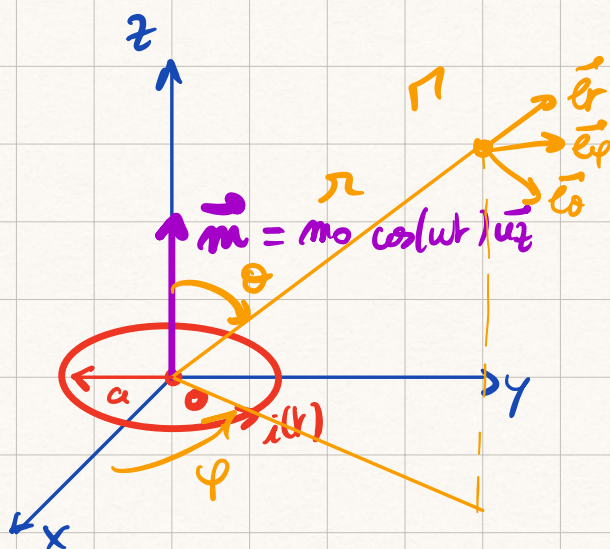
Une spire circulaire de centre O, de rayon  $a$  et d'axe ( $Oz$ ) est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et dont l'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  est la même en tout point du circuit. Cette spire possède un moment magnétique instantané  $\vec{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  avec  $m_0$  une constante. Elle crée dans sa zone de rayonnement un champ ayant dans le système de coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ) d'axe ( $Oz$ ) l'expression :

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \text{ et } -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

1. Exprimer  $m_0$  en fonction de  $I_0$  et  $a$ .
2. Identifier dans les deux expressions ci-dessus celle du champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et celle du champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$ .
3. Que vaut le rapport  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$  ? Décrire la structure du champ rayonné par le dipôle magnétique oscillant, la comparer au champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant.
4. Calculer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  ainsi que sa moyenne temporelle.
5. Calculer la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  rayonnée dans tout l'espace. La mettre sous la forme :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R_0 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde et  $R_0$  à exprimer en fonction de  $\mu_0$  et  $c$  uniquement. Faire l'application numérique pour  $R_0$ .



Spire  $\in xOy$

$$r \gg a$$

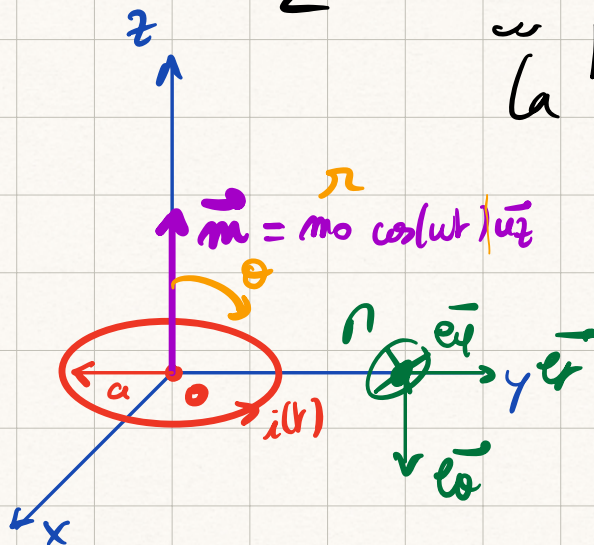
$$r \gg \lambda$$

$$a \ll \lambda$$

$$1) \quad \vec{m} = I \vec{S} = I_0 \cos(\omega t) \pi a^2 \vec{e}_z$$

$$m_0 = I_0 \pi a^2$$

2) En  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Le plan  $(n, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est  
 un plan de symétrie de  
 la distribution de courant  
 donc un plan  
 d'antisymétrie de  $\vec{B}$   
 donc  $\vec{B} \perp (n, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



$\Rightarrow \vec{B}(\theta = \frac{\pi}{2})$  porte par  $\vec{e}_\theta$ .

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \text{ et } -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

$\vec{E}$   $\vec{B}$

3)  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = c$  comme ds le vide pour  
 une OPPM

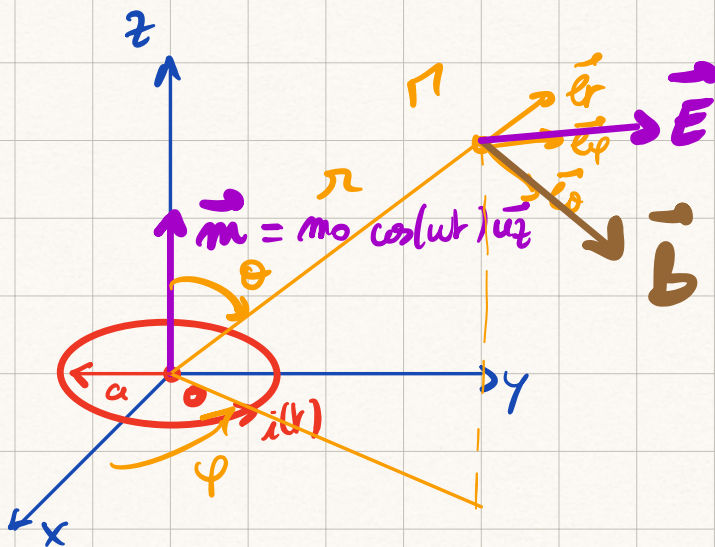
Le champ a la structure d'une onde plane  
 localement avec un vecteur  $\vec{k} = k \vec{u}_r = \frac{\omega}{c} \vec{u}_r$

On a bien  $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$

$$= \frac{\vec{u}_r \wedge E_\varphi \vec{u}_\varphi}{c} = -\frac{E_\varphi}{c} \vec{u}_\theta$$

Dépendance de l'amplitude en  $\frac{1}{r}$  et proportionnelle à  $\omega^2$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dépendent de  $\theta$ : rayonnement non isotrope : nul en  $\theta=0$  ou  $\theta=\pi$



Rappel pour dipôle oscillant  $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} p_0 \sin\theta \omega^2 \cos[\omega t - kr] \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} p_0 \sin\theta \omega^2 \cos[\omega t - kr] \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi rc} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \text{ et } - \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi rc^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

$$4) \frac{\vec{\pi}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2\theta \cos^2(\omega t - kr)}{16\pi^2 r^2 c^3} \vec{u}_r$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 r^2 c^3} \vec{u}_r$$

5) Calculons  $P = \iint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S}$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R_0 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

$$\text{dvec } d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 c^3} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta}_{\frac{4}{3}}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3}$$

$$\text{Or } m_0 = I_0 \pi a^2$$

$$\rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 \pi^2 a^4}{12 \pi c^3} \omega^4$$

$$\text{or } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\text{d'au} \quad \langle P \rangle = \mu_0 \frac{I_0^2 \pi^2 a^4}{12 \pi c^3} \frac{16 \pi^4 c^4}{\lambda^4}$$

$$= \frac{\mu_0 \pi^5 c^4}{3 \times 2} I_0^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{8}{3} \mu_0 \pi^5 c}_{R_0} \times \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 \times I_0^2$$

$$R_0 = \frac{8}{3} \mu_0 c \pi^5$$

A.N.  $R_0 = 3,1 \cdot 10^5 \Omega.$

## Exercice 4 : Antenne demi-onde (*Oral Mines-Ponts*)

Une antenne filiforme, colinéaire à  $(Oz)$ , de longueur  $l = \frac{\lambda}{2}$ , centrée à l'origine est le siège d'un courant sinusoïdal de la forme :

$$I(z, t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{i\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'origine  $O$  et d'axe  $(Oz)$ . On se place dans la zone de rayonnement  $r \gg \lambda$ . On admet que le champ magnétique total rayonné est :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{i\mu_0 I_0}{2\pi r \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{u}_\varphi$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation  $\vec{u}_r$ .

1. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting en M.
2. Dans quelle direction cette antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ? Représenter l'indicatrice de rayonnement.
3. Calculer la puissance moyenne  $P$  rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon  $r$ .
4. En déduire la résistance de rayonnement  $R$  de l'antenne, définie par  $P = RI_{eff}^2$ . Faire l'application numérique.

Donnée :  $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$ .

$$1) \vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Structure OPPN :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\downarrow$   $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 i\omega \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -c \vec{u}_r \wedge \vec{B}$$

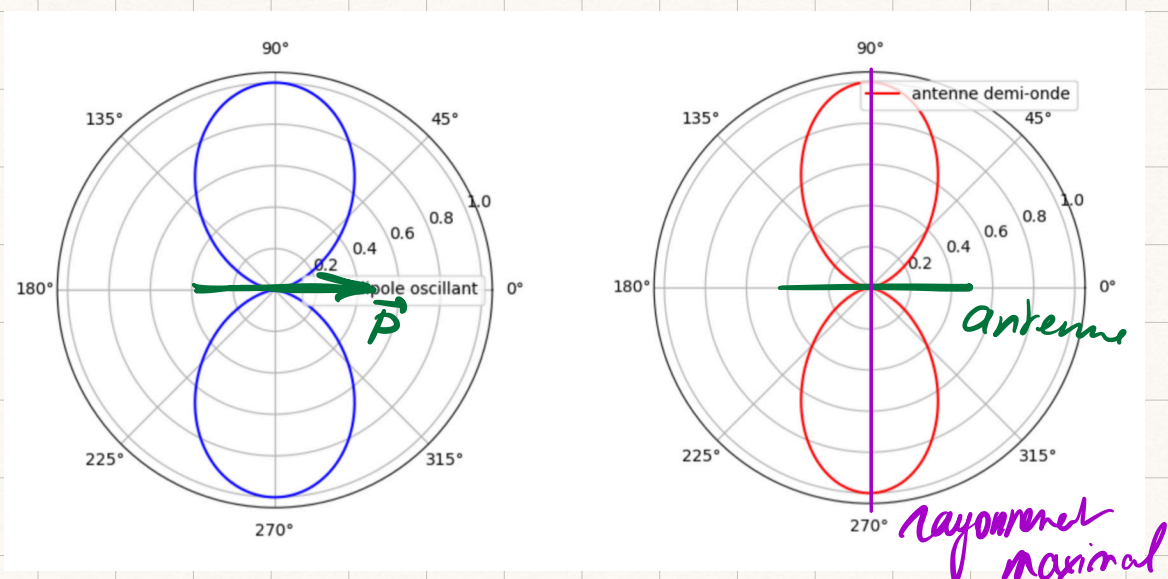
donc avec  $\vec{B} = \text{Re} [\vec{B}(r, t)]$

$$= - \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r \sin\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\phi$$

$$\vec{E} = -c \vec{u}_r \wedge \vec{B} = - \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r \sin\theta} c \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2 \sin^2\theta} c \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \vec{u}_r$$

2)  $\langle \vec{\pi} \rangle$  maximal en  $|\theta| = \frac{\pi}{2}$



Trace de  $\|\langle \vec{\pi} \rangle\|$  à  $r$  et  $\ell$  fixés

$$\rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \text{ pour } \theta \in [0; 2\pi]$$

Emission qui ressemble au dipôle oscillant.

$$3) \langle P \rangle = \iint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 \cancel{\sin^2\theta}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \cancel{\sin\theta} d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta}_{1,22}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi} \times 1,22}$$

4)  $I_0$  l'amplitude donc  $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

d'où  $I_0^2 = 2 I_{eff}^2$

↳  $\langle P \rangle = \frac{\mu_0 2 I_{eff}^2 c}{4\pi} \times 1,22$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \times 1,22 I_{eff}^2$$

$$R = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \times 1,22 = 73 \Omega$$

### Exercice 5 : Couleur du ciel (Oral CCINP MP)

On considère le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. On se place dans le référentiel cartésien dont l'origine O est le noyau d'un atome d'hydrogène et on étudie l'électron représenté par un point M de coordonnées  $(x, y, z)$ . Ce dernier est soumis à une force de rappel élastique  $\vec{F}_r = -k\vec{OM}$  et à une force dissipative modélisée par une force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ . De plus, on tient compte d'un champ électrique d'expression  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$ .

1. En supposant que le mouvement de l'électron n'est que selon  $\vec{e}_x$ , déterminer l'équation du mouvement. Faire apparaître la pulsation caractéristique  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$ . Calculer les valeurs de  $\omega_0$  et  $Q$ .
2. On suppose que le régime permanent est atteint.  $\underline{x}$  est de la forme  $\underline{x} = \underline{X_m}e^{i\omega t}$ . Déterminer le module et l'argument de  $\underline{X_m}$ .
3. Déterminer la pulsation  $\omega$  qui maximise le module de  $\underline{X_m}$ .
4. Le spectre du visible s'étendant du bleu au rouge, comparer les pulsations  $\omega$  associées au bleu et au rouge à  $\omega_0$ .
5. En déduire une expression simplifiée du module de  $\underline{X_m}$ .
6. On définit la puissance rayonnée :  $P_r = K|\ddot{x}|^2$  où K est une constante arbitraire. Calculer le rapport entre la puissance rayonnée par le bleu et celle rayonnée par le rouge.
7. Justifier pourquoi le ciel est bleu en l'absence de nuages.

#### Données :

- masse d'un électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg
- charge d'un proton :  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C
- Coefficient de frottement :  $h = 9,1 \times 10^{-23}$  kg.s<sup>-1</sup>.
- raideur :  $k = 3,6 \times 10^2$  N.m<sup>-1</sup>.

1) On applique la deuxième loi de Newton à l'e<sup>-</sup> ds le référentiel du noyau (supposé fixe) galiléen :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$= -e(\vec{E} + \cancel{\vec{v} \wedge \vec{B}}) + \cancel{m\vec{g}} - \cancel{k\vec{OM}} - h\vec{v}$$

Approximations : •  $\vec{p}$  négligé

•  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  négligé devant  $\vec{E}$

$$m\vec{a} + \hbar \vec{\omega} + \hbar \vec{v} = -e E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{on}}{dt^2} + \frac{\hbar}{m} \frac{d\vec{on}}{dt} + \frac{\hbar}{m} \vec{on} = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

F.C. (\*)  $\frac{d^2 \vec{on}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{on}}{dt} + \omega_0^2 \vec{on} = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t) \vec{e}_x$

$$\bullet \omega_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m}} = 2 \cdot 10^{10} \text{ rad. s}^{-1}$$

$$\bullet \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\hbar}{m} \Leftrightarrow Q = \frac{m}{\hbar} \omega_0 = 2 \cdot 10^8$$

2) On pose  $\vec{on} = x \vec{e}_x$   
 $\vec{on} = x \vec{e}_x = \underline{X_m} e^{i\omega t} \vec{e}_x$   
en RSE

$$(x): -\omega^2 \underline{x} + i \frac{\omega \omega_0}{Q} \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = -\frac{e E_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \underline{x_m} = \frac{-\frac{e E_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

$$|\underline{x_m}| = \frac{\frac{e E_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

$$\arg(\underline{x_m}) = \pi - \arg\left(\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2}_{\text{signe de la partie réelle variable}} + i \frac{\omega \omega_0}{Q}\right)$$

3) On cherche à maximiser  $|\underline{x_m}|$  et donc

$$\text{minimiser } D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}$$

On cherche  $\omega_r$  tel que  $D'(\omega_r) = 0$

$$D'(\omega) = -4\omega/(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2\omega\omega_0^2}{Q^2}$$

$\omega_r$  sol :

$$2\omega_r \left( \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 2/(\omega_0^2 - \omega_r)^2 \right) = 0$$

$\omega_r = 0$  pas solution souhaitée donc

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 2\omega_0^2 + 2\omega_r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right)$$

$Q$  très grand

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$$

4) bleu :  $\lambda_b = 400 \text{ nm}$

$$\omega_b = \frac{2\pi c}{\lambda_b} = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_r = \frac{2\pi c}{\lambda_r} = \frac{\omega_b}{2} = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda_r = 800 \text{ nm}$$

$$\text{et } \omega_0 = 2 \cdot 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_r \text{ et } \omega_b < \omega_0.$$

$$\text{Au camer : } \begin{aligned} \omega_0^2 &\approx 4 \cdot 10^{32} \text{ SI} \\ \omega_r^2 &\approx 5,8 \cdot 10^{30} \text{ SI} \end{aligned}$$

$$\omega_{vis}^2 \ll \omega_0^2$$

5)

$$|X_m| = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

$$\text{Donc } \omega_0^2 \gg \omega^2$$

$$\rightarrow |\underline{X_m}| = \frac{\frac{e E_0}{m}}{\sqrt{\omega_0^4 + \cancel{\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}} \text{ négligeable}}}$$

$$\rightarrow \boxed{|\underline{X_m}| = \frac{e E_0}{m \omega_0^2}}$$

$$6) P_r = k |\ddot{x}|^2$$

$$\text{or } \ddot{x} = (\underline{X_m} e^{i\omega t}) = -\omega^2 \underline{X_m} e^{i\omega t}$$

$$|\ddot{x}|^2 = (\omega^2 |\underline{X_m}|)^2$$

$$\text{Donc } P_r = k |\underline{X_m}|^2 \omega^4$$

$$P_r = k \frac{e^2 E_0^2}{m \omega_0^4} \omega^4 \rightarrow P_r \propto \omega^4$$

$$\rightarrow \frac{P_{\text{bleu}}}{P_{\text{rouge}}} = \frac{k' \omega_b^4}{k' \omega_r^4} = \left(\frac{\omega_b}{\omega_r}\right)^4 = 16$$

$\Rightarrow$  Ciel plus bleu.