Utilisation des nombres complexes en géométrie

1 Rappels sur les modules et les arguments

Propriétés

On considère deux points M et N d'affixes respectives z_M et z_N.
On considère également deux vecteurs du plan $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$. On se donne k un réel.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.
- Le milieu du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{z_M + z_N}{2}$.

Propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Produit du module : $|zz'| = |z| \times |z'|$

Puissance : $|z^n| = |z|^n$

Inverse : $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

Quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

2 Utilisation des nombres complexes en géométrie

Propriétés

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
On considère trois points A, B et C dont les affixes respectives sont a, b et c.

- La distance AB est égale à $|b-a|$.
- L'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ est égal à $\arg(b-a)$.
- L'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$.

Propriétés : alignement et parallélisme

Soient $\mathrm{A}(z_A)$, $\mathrm{B}(z_B)$, $\mathrm{C}(z_C)$ et $\mathrm{D}(z_D)$ quatre points distincts deux à deux.

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un réel.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est un réel.

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires si et seulement si l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0\ [\pi]$.
On en déduit donc que $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = 0\ [\pi]$.

Le raisonnement est analogue pour montrer la deuxième propriété.

Propriétés : orthogonalité

Soient $\mathrm{A}(z_A)$, $\mathrm{B}(z_B)$, $\mathrm{C}(z_C)$ et $\mathrm{D}(z_D)$ quatre points distincts deux à deux.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ si et seulement si $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = ki$ où k est un réel.

Démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc que $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A} = ki$ où k est un réel.

3 Racine n-ième de l'unité

Définition

On considère l'équation $z^n = 1$ où z est un nombre complexe et où n est un entier naturel non nul.
Les solutions de cette équation sont appelées **racine n-ième de l'unité**.

Théorème

$\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Cet ensemble comporte exactement n éléments qui sont de la forme :

$$e^{i\dfrac{2k\pi}{n}}$$

où k est un entier compris entre 0 et $n-1$.

Démonstration

- Montrons l'existence d'une solution.

  Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.
  Les solutions sont donc de la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0\,;\,2\pi[$.

  $z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$.

  Il suffit de ne garder que les valeurs entières de k entre 0 et $n-1$.

- Montrons l'unicité des solutions.
  Supposons qu'il existe un autre entier k' compris entre 0 et $n-1$ tel que $w_k = w_{k'}$.
  On a alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ ce qui revient à dire que $\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$.
  Ce qui revient finalement)à $2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$ donc à $k - k' = ln$.

  Cela signifie que n divise $k - k'$. Or $k - k'$ est un entier compris entre 0 et $n-1$. Il est donc impossible que n divise $k - k'$.
  Ainsi, $l = 0$ et donc $k = k'$.

Exemple

En utilisant le précédent théorème, on obtient :

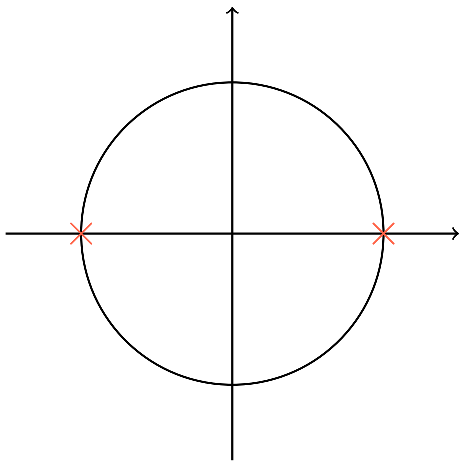
$\mathbb{U}_2 = \{1\,;\,e^{i\pi}\} = \{1\,;\,-1\}$

$\mathbb{U}_3 = \{1\,;\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

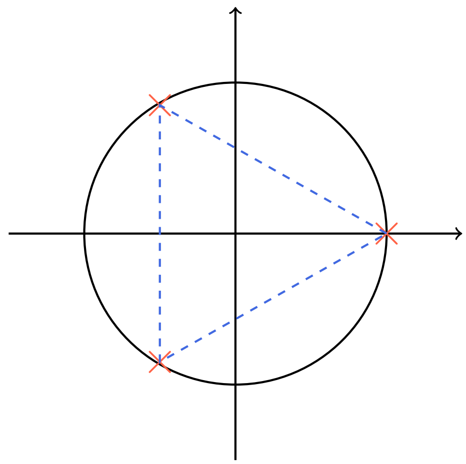
$\mathbb{U}_4 = \{1\,;\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,;\,e^{i\pi}\,;\,e^{i\frac{3\pi}{2}}\} = \{1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i\}$

Exemple : suite et fin

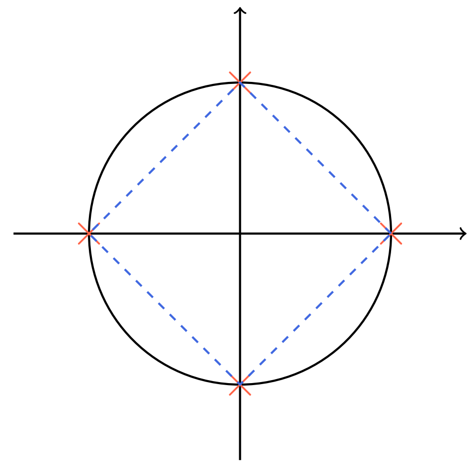
Si on représente les solutions dans un repère orthonormé, on obtient des polygones réguliers.



$\mathbb{U}_2$



$\mathbb{U}_3$



$\mathbb{U}_4$

Exercices sur les nombres complexes (4)

> Etudier des configurations du plan

Exercice n°1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et D d'affixes $z_A = 4 - \sqrt{3}i$, $z_B = 4 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$, $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = 2\sqrt{3} - 1$.

1. Montrer que $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice n°2

Soit $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$ les affixes de trois points A, B et C.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice n°3

On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2i\sqrt{3}$.

1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.
2. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice n°4

On se place dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

On considère quatre points A, B, C et H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.

1. Placer les points sur une figure.
2. On appelle J le point d'affixe i. Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de ce cercle.
3. Donner l'écriture algébrique du nombre $\dfrac{b - c}{h - a}$. Montrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice n°5

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer :

1. L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
2. L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
3. L'ensemble des points M tels que $\dfrac{|z - i|}{|z|} = 2$.

> Etudier les racines de l'unité

Exercice n°6

1. Factoriser $z^4 - 1$ en produit de facteurs premiers.
2. En déduire les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

Exercice n°7

1. Donner l'interprétation géométrique des racines 5-ième de l'unité.
2. Déterminer la longueur d'un côté d'un pentagone inscrit dans le cercle trigonométrique.
3. Montrer que le périmètre d'un tel pentagone est égal à $10\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Correction des exercices sur les nombres complexes (4)

> Etudier des configurations du plan

Exercice n°1

1. $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \dfrac{4-\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})-(4-\sqrt{3}i)}{2\sqrt{3}-1-(-1+2i)} = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}-2i} = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{-2(-\sqrt{3}+1)} = -\dfrac{1}{2}$.
2. Puisque $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice n°2

1. $\mathrm{AB} = |z_B - z_A| = |1-2i-(-2-i)| = |3-i| = \sqrt{10}$
   $\mathrm{AC} = |z_C - z_A| = |-1+2i-(-2-i)| = |1+3i| = \sqrt{10}$.

   On a donc AB = AC : le triangle ABC est isocèle en A.

2. $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
   $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+3i}{3-i} = \dfrac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{3+i+9i-3}{9+1} = \dfrac{10i}{10} = i$.
   Or $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. L'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est donc un angle droit : ABC est un triangle rectangle B.

Exercice n°3

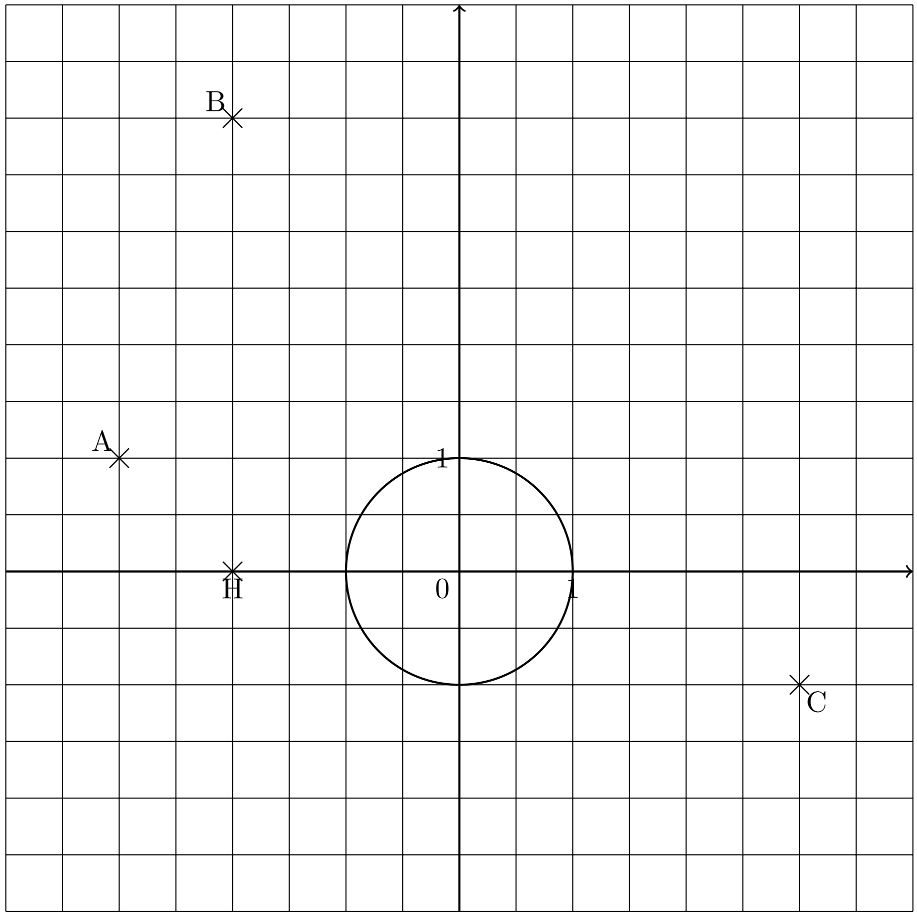
1. $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{2i\sqrt{3}-(3+i\sqrt{3})}{2-(3+i\sqrt{3})} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{(-1-i\sqrt{3})((-1+i\sqrt{3}))} = -\dfrac{4i\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}i$.
   $\arg(-\sqrt{3}i) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\pi}{2}$.

2. D'après la question précédente, le triangle ABC est rectangle en B.
   Le cercle circonscrit à ABC a pour centre le milieu du segment [AC]. L'affixe de ce milieu est :

   $\omega = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice n°4

1. Placement des quatre points :



2. $\text{JA} = |-3-i-i| = |-3-2i| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

   $\text{JB} = |-2+4i-i| = |-2+3i| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$.

   $\text{JC} = |3-i-i| = |3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

   Ainsi, les points A, B et C appartiennent au même cercle de centre J et de rayon $\sqrt{13}$.

3. $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{-2+4i-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \dfrac{-5+5i}{1+i} = \dfrac{(-5+5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-5+5i+5i-5i^2}{1^2+1^2} = \dfrac{10i}{2} = 5i$.

   Or $\arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}$: les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires.

Exercice n°5

1. Soir A le point d'affixe $2i$.
   $|z-2i| = 3$ s'écrit alors $\text{AM} = 3$.
   L'ensemble recherché est donc les points M tels que $\text{AM} = 3$, qui est un cercle de centre $\text{A}(2i)$ et de rayon 3.

2. $|\bar{z}-3+i| = |\overline{\bar{z}-3+i}| = |\bar{\bar{z}}-3-i| = |z-3-i| = |z-(3+i)|$
   Soit A le point d'affixe $3+i$ et soit B le point d'affixe 5.
   L'égalité $|\bar{z}-3+i| = |z-5|$ revient alors à $\text{AM} = \text{BM}$. L'ensemble des points M recherché est donc la médiatrice du segment [AB].

3. L'égalité revient à $|z-i| = 2|z|$ que l'on peut aussi écrire $|z-i|^2 = 4|z|^2$.
   Posons $z = x+iy$. L'équation revient à :
   $$\begin{aligned} & |z+iy-i|^2 = 4|x+iy|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & |x+i(y-1)|^2 = 4|x+iy|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+(y-1)^2 = 4(x^2+y^2) \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2+3y^2+2y = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+y^2+\frac{2}{3}y = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$
   Il s'agit du cercle de centre $\left(0\,;\,\frac{-1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

> Etudier les racines de l'unité

Exercice n°6

1. $z^4-1 = (z^2)^2-1^2 = (z^2+1)(z^2-1) = (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$.

2. Les solutions de $z^4-1=0$ sont donc $1\,;\,-1\,;\,i$ et $-i$, qui sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

Exercice n°7

1. Les images des racines 5-ième de l'unité sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

2. Notons w_0 et w_1 les deux sommets de ce pentagone tels que $w_0 = 1$ et $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

   $|w_1-w_0| = \left|e^{i\frac{2\pi}{5}}-1\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{10}}\right| \times \left|e^{i\frac{2\pi}{10}} - e^{-i\frac{2\pi}{10}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}}\right|$.

   On applique ensuite la formule d'Euler :

   $|w_1-w_0| = \left|2i\times\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3. Puisqu'un pentagone régulier possède ses cinq côtés de même longueur, son périmètre vaut $5b\times 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ soit $10\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.