
I	Qu'est-ce qu'une équation différentielle?	3
II	Équations différentielles linéaires du premier d'ordre	4
II.1	Généralités	4
II.2	Ensemble des solutions de l'équation homogène associée	4
II.3	Ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre	7
II.4	Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre	7
II.5	Problème de Cauchy	10
III	Équations différentielles linéaires du second ordre	12
III.1	Généralités	12
III.2	Ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre	12
III.3	Cas particulier d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à COEFFICIENTS CONSTANTS	13
III.4	Problème de Cauchy	17
III.5	Utilisation des séries entières	19
IV	Résolution d'un système différentiel à coefficients constants	20
IV.1	Cadre	20
IV.2	Cas particulier où A est diagonale	20
IV.3	Cas particulier où A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$	21
IV.4	Cas particulier où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$	22
IV.5	Cas où A est triangulaire	23
IV.6	Cas où A est trigonalisable	23
IV.7	Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants : démonstration du théorème 20.7 page 13	23
V	Problème de raccord	25

Extrait du programme

A - Équations différentielles linéaires scalaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications. Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions.

I. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction $y : t \mapsto y(t)$ et dans laquelle peuvent figurer la variable t , la fonction y et ses dérivées successives y' , y'' , ...

On rencontre régulièrement des équations différentielles en physique et en chimie :

1. **Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.** On considère un circuit électrique composé d'un générateur de tension continue E , d'un condensateur C et d'une résistance R . La tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{R \times C} \times u = \frac{E}{R \times C}, \quad (\text{I.1})$$

où E , R et C sont des réels connus et où u est la fonction inconnue.

2. **Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension.** On considère un circuit électrique composé d'un générateur de tension continue E , d'un condensateur C , d'une bobine L et d'une résistance R . La tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \times \frac{du}{dt} + \frac{1}{L \times C} \times u = \frac{E}{L \times C}, \quad (\text{I.2})$$

où E , R , L et C sont des réels connus et où u est la fonction inconnue.

3. **Pendule simple.** Un objet de masse m est accroché à une tige inextensible, de longueur ℓ et de masse négligeable (devant celle du système tout entier).

Le pendule se déplace autour d'un axe horizontal fixe dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. L'angle θ entre la tige et sa position d'équilibre stable vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \times \sin(\theta) = 0. \quad (\text{I.3})$$

Nous ne sommes pas en mesure d'exprimer la fonction θ à l'aide des fonctions usuelles ; cependant, nous verrons en informatique qu'il est possible de tracer « approximativement » le graphe de la fonction θ à l'aide de la méthode d'Euler.

Sous l'approximation des « petits angles », c'est-à-dire lorsque les oscillations sont faibles, on remplace $\sin(\theta)$ par θ (nous verrons en mathématiques une justification de cette approximation). On obtient alors l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \times \theta = 0 \quad (\text{I.4})$$

qu'on apprendra à résoudre cette année.

4. **Système harmonique.** Un point matériel M_t de masse m est lié à un ressort horizontal. L'autre extrémité du ressort étant fixe en O . Le ressort a une longueur à vide ℓ_0 et une constante de raideur k .

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $x(t) = OM_t - \ell_0$ l'allongement du ressort.

Le principe fondamental de la dynamique montre que x est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \times x = 0. \quad (\text{I.5})$$

On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système.

5. La concentration c_A d'un réactif A durant une transformation chimique dont la loi de vitesse est d'ordre 1 vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{dc_A}{dt} = k \times c_A$$

où $k > 0$ est la vitesse de réaction.

On rencontre également des équations différentielles lors de l'étude de modèles épidémiologiques, de l'évolution de populations, des marchés financiers, ...

II. Équations différentielles linéaires du premier d'ordre

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, on considère un **intervalle** I de $\mathbb{R}$.

II.1. Généralités



Définition 20.1 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation de la forme

$$y' + a(t) \times y = b(t) \quad (\text{E})$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

- La **fonction** y est l'inconnue de l'équation différentielle.
- La fonction b est appelée le **second membre** de l'équation différentielle.

On dit que (E) est **homogène** (ou **sans second membre**) lorsque b est la fonction nulle.



Définition 20.2 – Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle **solution de (E) sur I** toute fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. f est dérivable sur I ;
2. pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t) \times f(t) = b(t)$.

Résoudre (E) sur I signifie : déterminer **toutes** les solutions de (E) sur I .

Remarque 20.1 – Une solution sur I d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

Soit f une solution de (E) sur I .

Par définition, f est dérivable sur I , donc continue sur I .

Or, pour tout $t \in I$, $f'(t) = -a(t) \times f(t) + b(t)$.

Donc, f' est continue comme somme et produit de fonctions continues.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Exemple 20.1 – Cas où a est la fonction nulle

Dans ce cas, l'équation différentielle (E) se réécrit : $y' = b(t)$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des primitives de b .

II.2. Ensemble des solutions de l'équation homogène associée



Définition 20.3 – Équation homogène associée

Avec les notations de la définition 20.1, on appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation différentielle

$$y' + a(t) \times y = 0. \quad (\text{H})$$

On note $\mathcal{S}_{(\text{H})}$ l'ensemble des solutions de (H) sur I .

**Proposition 20.1 – Structure de l'ensemble des solutions de (H)**

L'ensemble des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration

► Dans une remarque précédente, on a montré que $\mathcal{S}_{(H)} \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

► La fonction nulle est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $0 + a(t) \times 0 = 0$.

► Soient f et g deux solutions de (H) sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

La fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. De plus, pour tout $t \in I$,

$$(\lambda.f + \mu.g)'(t) + a(t) \times (\lambda.f + \mu.g)(t) = \lambda \times (f'(t) + a(t) \times f(t)) + \mu \times (g'(t) + a(t) \times g(t)) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$

Donc, $\lambda.f + \mu.g$ est solution de (H) sur I . □

**Théorème 20.1 – Forme générale des solutions de $y' + a(t) \times y = 0$ (H)**

Les solutions de

$$y' + a(t) \times y = 0 \quad (\text{H})$$

sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda \times e^{-A(t)},$$

définie sur I , où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I .

Autrement dit :

$$\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda \times e^{-A(t)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(t \mapsto e^{-A(t)} \right).$$

En particulier, l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

y est solution de (H) sur I	si, et seulement si,	y est dérivable sur I pour tout $t \in I$, $y'(t) + a(t) \times y(t) = 0$	
	si, et seulement si,	y est dérivable sur I pour tout $t \in I$, $e^{A(t)} \times (y'(t) + a(t) \times y(t)) = 0$	(exp ne s'annule pas)
	si, et seulement si,	y est dérivable sur I pour tout $t \in I$, $\frac{d}{dt}(e^{A(t)} \times y(t)) = 0$	
	si, et seulement si,	$t \mapsto e^{A(t)} \times y(t)$ est constante	(exp ne s'annule pas, exp et A sont dérivables sur I)
	si, et seulement si,	il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in I$, $e^{A(t)} \times y(t) = \lambda$	
	si, et seulement si,	il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in I$, $y(t) = \lambda \times e^{-A(t)}$	(exp ne s'annule pas). □

**Exemple 20.2**

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{1+t^2} \times y = 0.$$

La fonction $t \mapsto -\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) et une primitive de cette fonction est $-\text{Arctan}$.

Les solutions de $y' - \frac{1}{1+t^2} \times y = 0$ sont les fonctions de la forme : $t \mapsto \lambda \times e^{\text{Arctan}(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

 Attention

Il ne faut pas se tromper lorsque l'équation différentielle est écrite sous la forme $y' = a(t) \times y$. Dans ce cas, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \lambda \times e^{A(t)}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I .

Comment ne pas se tromper ? C'est simple ! On vérifie en dérivant au brouillon que les solutions données sont bien solutions.

 Remarque 20.3 – La seule solution de (H) qui s'annule au moins une fois est la fonction nulle.

En effet, si $t \mapsto \lambda \times e^{-A(t)}$ s'annule en $t_1 \in I$, alors $\lambda \times e^{-A(t_1)} = 0$.

Or, exp ne s'annule pas, donc $\lambda = 0$.

Donc, $t \mapsto \lambda \times e^{-A(t)} = 0$ est la fonction nulle.

 Théorème 20.2 – Cas particulier où a est une fonction constante

Soit $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y' + a \times y = 0$ est

$$\mathcal{S}_{(H)} = \left\{ \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda \times e^{-a \times t} \mid \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\}.$$

Démonstration

La fonction constante $t \mapsto a$ est continue et une primitive sur I de cette fonction est $t \mapsto a \times t$. □

 Exemple 20.3

► Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \times e^{2 \times t}, \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

► **Circuit RC : régime libre.** Les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation homogène associée à (I.1) page 3 sont les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \times e^{-\frac{t}{R \times C}}, \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.3. Ensemble des solutions d'une équation différentielle du premier ordre

Théorème 20.3

Soit φ une solution particulière de (E) sur I .

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$f_{(H)} + \varphi,$$

où $f_{(H)}$ est une solution de (H) sur I .

Démonstration

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

y est solution de (E) sur I

si, et seulement si,

y est dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $y'(t) + a(t) \times y(t) = b(t)$

si, et seulement si,

y est dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $y'(t) + a(t) \times y(t) = \varphi'(t) + a(t) \times \varphi(t)$ (φ solution de (E))

si, et seulement si,

$y - \varphi$ est dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $(y - \varphi)'(t) + a(t) \times (y - \varphi)(t) = 0$ (φ dérivable sur I)

si, et seulement si,

$y - \varphi \in \mathcal{S}_{(H)}$

si, et seulement si,

il existe $f_{(H)} \in \mathcal{S}_{(H)}$ telle que $y - \varphi = f_{(H)}$.

□

Méthode 20.1 – Plan de résolution de $y' + a(t) \times y = b(t)$ sur I

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + a(t) \times y = 0$. Il suffit pour cela de déterminer une primitive de a sur I .
2. On détermine une solution particulière de (E). Pour cela, plusieurs méthodes sont décrites dans le paragraphe suivant.
3. On conclut :

$$\begin{array}{l} \text{Solution générale} \\ \text{de (E)} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Solution générale de l'équation} \\ \text{homogène associée (H)} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Solution particulière} \\ \text{de (E)} \end{array}$$

II.4. Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre

Méthode 20.2 – « Intuition »

Parfois, on trouve une solution particulière évidente.

Par exemple, lorsque les fonctions a et b sont constantes, on cherche une solution constante.

Exemple 20.4 – Circuit RC

La fonction constante égale à E est solution particulière de (I.1) page 3.

Les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (I.1) sont les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E, \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 20.3 – Variation de la constante

Le nom de cette méthode est étrange au premier abord, mais il est justifié.

On a déjà vu que les solutions de $y' + a(t) \times y = 0$ sont les fonctions de la forme : $t \mapsto \lambda \times e^{-A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I .

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\varphi : t \mapsto \lambda(t) \times e^{-A(t)}$ où λ est une fonction dérivable sur I . On applique ensuite les étapes suivantes.

1. On justifie que la fonction φ est dérivable.

Puis, comme $A' = a$, on a, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \lambda'(t) \times e^{-A(t)} - \lambda(t) \times A'(t) \times e^{-A(t)} = \lambda'(t) \times e^{-A(t)} - \lambda(t) \times a(t) \times e^{-A(t)}.$$

2. On injecte dans (E) : pour tout $t \in I$,

$\varphi(t)$	$=$	$\lambda(t) \times e^{-A(t)}$	$\times a(t)$
$\varphi'(t)$	$=$	$\lambda'(t) \times e^{-A(t)} - \lambda(t) \times a(t) \times e^{-A(t)}$	$\times 1$
$\underbrace{\varphi'(t) + a(t) \times \varphi(t)}_{=b(t)}$	$=$	$\lambda'(t) \times e^{-A(t)}$	

3. On en déduit que, pour tout $t \in I$, $\lambda'(t) = b(t) \times e^{A(t)}$.
4. On choisit alors λ une primitive de $t \mapsto b(t) \times e^{A(t)}$ sur I .

On n'apprendra pas les formules par cœur, on retiendra les différentes étapes.

Exemple 20.5

Déterminons l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

$$y' + \frac{1}{x} \times y = \frac{x}{x+1}.$$

► On résout d'abord l'équation homogène associée : $y' + \frac{1}{x} \times y = 0$.

Une primitive de $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A : x \mapsto \ln(x)$.

Donc, les solutions de $y' + \frac{1}{x} \times y = 0$ sont les fonctions :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}, \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

► On détermine une solution particulière $y' + \frac{1}{x} \times y = \frac{x}{x+1}$ par la méthode de **la variation de la constante**.

On en cherche une sous la forme : $\varphi : x \mapsto \lambda(x) \times e^{-A(x)}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{array}{lcl} \varphi(x) & = & \lambda(x) \times e^{-A(x)} \\ \varphi'(x) & = & \lambda'(x) \times e^{-A(x)} - a(x) \times \lambda(x) \times e^{-A(x)} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \times a(x) \\ \times 1 \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\varphi'(x) + a(x) \times \varphi(x)}_{= \frac{x}{x+1}} = \lambda'(x) \times e^{-A(x)}.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$\lambda'(x) = \frac{x}{x+1} \times e^{A(x)} = \frac{x^2}{x+1}.$$

Le problème est alors ramené au calcul d'une primitive de

$$x \mapsto \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{(x-1) \times (x+1)}{x+1} + \frac{1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

On choisit alors, $\lambda : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)$, qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Une solution particulière de $y' + \frac{1}{x} \times y = \frac{x}{x+1}$ est

$$x \mapsto \lambda(x) \times e^{-A(x)} = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right) \times \frac{1}{x} = \frac{x}{2} - 1 + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

► Ainsi, les solutions de $y' + \frac{1}{x} \times y = \frac{x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{\ln(1+x)}{x}. \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 20.4 – Principe de superposition

On suppose que le second membre b de l'équation différentielle $y' + a(t) \times y = b(t)$ s'écrit sous la forme d'une somme de $p \in \mathbb{N}^*$ fonctions continues : $b = b_1 + \dots + b_p$.

Si, pour tout $i \in [1, p]$, φ_i est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t) \times y = b_i(t)$, alors $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p$ est solution particulière de $y' + a(t) \times y = b(t)$.

Démonstration

La fonction $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivable sur I .

Pour tout $i \in [1, p]$ et $t \in I$, $\varphi_i'(t) + a(t) \times \varphi_i(t) = b_i(t)$.

En sommant les p équations, on a, pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) + a(t) \times \varphi(t) = b(t)$. □

Exemple 20.6

Déterminons une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-2x} - e^x \times \sin(x)$.

On a vu que $\varphi : x \mapsto 3x \times e^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-2x}$.

De plus, $\psi : x \mapsto \frac{e^x}{10} \times (\cos(x) - 3 \sin(x))$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 2y = -e^x \times \sin(x)$.

Par le principe de superposition $x \mapsto 3x \times e^{-2x} + \frac{e^x}{10} \times (\cos(x) - 3 \sin(x))$ est une solution particulière de

$$y' + 2y = 3e^{-2x} - e^x \times \sin(x).$$

II.5. Problème de Cauchy



Définition 20.4 – Problème de Cauchy

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$



Théorème 20.5 – Cauchy linéaire

Avec les notations précédentes, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une unique solution sur I .

Démonstration

Les solutions de l'équation $y' + a(t) \times y = b(t)$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f_\lambda : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \lambda \times e^{-A(t)} + \varphi(t) \end{aligned}$$

où φ est une solution particulière de $y' + a(t) \times y = b(t)$, A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

La fonction f_λ est solution du problème de Cauchy si, et seulement si, $\lambda \times e^{-A(t_0)} + \varphi(t_0) = y_0$. Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, cela est encore équivalent à $\lambda = (y_0 - \varphi(t_0)) \times e^{A(t_0)}$.

Ainsi, il existe bien une et une seule solution au problème de Cauchy. □



Méthode 20.4 – Résoudre un problème de Cauchy

Pour résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = b(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

on procède de la manière suivante :

1. On résout l'équation homogène associée $y' + a(t) \times y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \lambda \times e^{-A(t)} \end{aligned}$$

où A est une primitive de a sur I .

2. On détermine une solution particulière φ de l'équation différentielle $y' + a(t) \times y = b(t)$.
3. Les solutions de $y' + a(t) \times y = b(t)$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \lambda \times e^{-A(t)} + \varphi(t) \end{aligned}$$

Il reste alors à déterminer la constante λ . Pour cela, il suffit de résoudre l'équation :

$$\varphi(t_0) + \lambda \times e^{-A(t_0)} = y_0.$$

💡 **Exemple 20.7 – Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension (charge d'un condensateur)**

À l'instant initiale, on suppose le condensateur déchargé : $u(0) = 0$.

On note u l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \frac{1}{R \times C} \times u = \frac{E}{R \times C} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $u(t) = E + \lambda \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$.

On détermine λ à l'aide de la condition initiale : $0 = E + \lambda \times e^{-\frac{0}{R \times C}}$. Donc, $\lambda = -E$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $u(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R \times C}}\right)$

🔍 **Remarque 20.4 – Isomorphisme**

L'application

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{S}_{(H)} &\rightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto y(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme :

- La linéarité est claire :

$$\Psi(\lambda \cdot y_1 + y_2) = (\lambda \cdot y_1 + y_2)(t_0) = \lambda \times y_1(t_0) + y_2(t_0) = \lambda \times \Psi(y_1) + \Psi(y_2).$$

- La bijectivité est une conséquence de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy : pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution de

$$\begin{cases} y' + a(t) \times y = 0 & (H) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Autrement dit, il existe un unique $y \in \mathcal{S}_{(H)}$ tel que $\Psi(y) = y_0$.

En particulier, on retrouve que :

$$\dim(\mathcal{S}_{(H)}) = 1.$$

III. Équations différentielles linéaires du second ordre

Dans cette partie, on considère un **intervalle** I de $\mathbb{R}$.

III.1. Généralités



Définition 20.5 – Équation différentielle linéaire du second ordre

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** toute équation de la forme

$$y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = c(t) \quad (\text{E})$$

où $a : I \rightarrow \mathbb{K}$, $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

- La **fonction** y est l'inconnue de l'équation différentielle.
- La fonction c est appelée le **second membre** de l'équation différentielle.

On dit que (E) est **homogène** (ou **sans second membre**) lorsque c est la fonction nulle.



Définition 20.6 – Solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

On appelle **solution de (E) sur I** toute fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. f est deux fois dérivable sur I ;
2. pour tout $t \in I$, $f''(t) + a(t) \times f'(t) + b(t) \times f(t) = c(t)$.

Résoudre (E) sur I signifie : déterminer **toutes** les solutions de (E) sur I .

Remarque 20.5 – Une solution sur I d'une équation différentielle linéaire du second ordre est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I

Soit f une solution de (E) sur I .

Par définition, f est deux fois dérivable sur I , donc f et f' sont continues sur I .

Or, pour tout $t \in I$, $f''(t) = -a(t) \times f'(t) - b(t) \times f(t) + c(t)$.

Donc, f'' est continue comme somme et produit de fonctions continues.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I .

III.2. Ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre



Théorème 20.6

Soit φ une solution particulière de (E) sur I .

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$f_{(H)} + \varphi,$$

où $f_{(H)}$ est une solution de (H) sur I .

Démonstration

y est solution de (E) sur I

si, et seulement si,

y est deux fois dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $y''(t) + a(t) \times y'(t) + b(t) \times y(t) = c(t)$

si, et seulement si,

y est deux fois dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $y''(t) + a(t) \times y'(t) + b(t) \times y(t) = \varphi''(t) + a(t) \times \varphi'(t) + b(t) \times \varphi(t)$ (φ solution de (E))

si, et seulement si,

$y - \varphi$ est deux fois dérivable sur I
pour tout $t \in I$, $(y - \varphi)''(t) + a(t) \times (y - \varphi)'(t) + b(t) \times (y - \varphi)(t) = 0$ (φ deux fois dérivable sur I)

si, et seulement si,

$y - \varphi \in \mathcal{S}_{(H)}$

si, et seulement si,

il existe $f_{(H)} \in \mathcal{S}_{(H)}$ telle que $y - \varphi = f_{(H)}$

□



Méthode 20.5 – Plan de résolution de $y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = c(t)$ sur I

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = 0$.
2. On détermine une solution particulière de (E).
3. On conclut :

$$\begin{array}{l} \text{Solution générale} \\ \text{de (E)} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Solution générale de l'équation} \\ \text{homogène associée (H)} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Solution particulière} \\ \text{de (E)} \end{array}$$

III.3. Cas particulier d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans ce paragraphe, on considère a et b des constantes.



Théorème 20.7 – Solution de l'équation homogène $y'' + a \times y' + b \times y = 0$ (H)

On considère l'équation caractéristique :

$$r^2 + a \times r + b = 0. \quad (\text{EC})$$

► Si (EC) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors une base de l'ensemble des solutions de (H) est $(t \mapsto e^{r_1 \times t}, t \mapsto e^{r_2 \times t})$.

Autrement dit, les solutions de (H) sont de la forme :

$$t \mapsto \lambda \times e^{r_1 \times t} + \mu \times e^{r_2 \times t}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

► Si (EC) possède une racine double r dans $\mathbb{K}$, alors une base de l'ensemble des solutions de (H) est $(t \mapsto e^{r \times t}, t \mapsto t \times e^{r \times t})$.

Autrement dit, les solutions de (H) sont de la forme :

$$t \mapsto \lambda \times e^{r \times t} + \mu \times t \times e^{r \times t}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (EC) possède deux racines complexes conjuguées $z = \alpha + i\beta$ et $\bar{z}$, alors une base de l'ensemble des solutions de (H) est $(t \mapsto e^{\alpha \times t} \times \cos(\beta \times t), t \mapsto e^{\alpha \times t} \times \sin(\beta \times t))$.

Autrement dit, les solutions de (H) sont de la forme :

$$t \mapsto e^{\alpha \times t} \times (\lambda \times \cos(\beta \times t) + \mu \times \sin(\beta \times t))$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Dans tous les cas $\mathcal{S}_{(H)}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration

Pour une démonstration élémentaire de ce théorème, vous pouvez fouiller dans votre cours de première année. Une démonstration basée sur la réduction des matrices est donnée dans un paragraphe ultérieur. $\square$

Exemple 20.8

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ dans $\mathbb{C}$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$, dont les solutions sont $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.

Les solutions de $y'' + 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \lambda \times e^{(-1+i)t} + \mu \times e^{(-1-i)t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Remarque 20.6

En factorisant par $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ dans le cas réel où (EC) possède deux racines complexes conjuguées, on peut mettre $\lambda \times \cos(\beta \times t) + \mu \times \sin(\beta \times t)$ sous la forme $A \times \cos(\beta \times t + \varphi)$ où $A \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Voir le chapitre NOMBRES COMPLEXES de première année.

Exemple 20.9 – Système harmonique I.5

L'équation caractéristique de l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 \times x = 0$ est $r^2 + \omega_0^2 = 0$ (EC).

Les solutions de (EC) sont complexes conjuguées : $r_1 = i\omega_0$ et $r_2 = -i\omega_0$.

On en déduit que les solutions de l'équation I.5 sont de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda_1 \times \cos(\omega_0 \times t) + \lambda_2 \times \sin(\omega_0 \times t) \end{aligned}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ces solutions s'écrivent aussi sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto A \times \cos(\omega_0 \times t + \varphi) \end{aligned}$$

où $(A, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Le réel A est appelé l'amplitude du mouvement et φ est appelé la phase du mouvement.

Exemple 20.10 – Circuit RLC série : régime libre

L'équation homogène associée à I.2 est $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \times \frac{du}{dt} + \frac{1}{L \times C} \times u = 0$.

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} > 0$ (pulsation propre) et $\lambda = \frac{R}{2L} > 0$ (facteur d'amortissement).

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$. Son discriminant est alors $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Il y a 3 cas :

- **Régime aperiodique** : $\lambda > \omega_0$.

Dans ce cas $\Delta > 0$ et $\Delta = \left(2 \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)^2$.

De plus, $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ et $r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ sont les solutions de l'équation caractéristique.

Les solutions de l'équation homogène associée à I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda_1 \times e^{r_1 \times t} + \lambda_2 \times e^{r_2 \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, donc les fonctions précédentes tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$. C'est cohérent d'un point de vue physique.

- **Régime critique** : $\lambda = \omega_0$.

Dans ce cas $\Delta = 0$ et $r = -\lambda$ est l'unique solution de l'équation caractéristique.

Les solutions de l'équation homogène associée à I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 \times t) \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Régime pseudo-périodique** : $\lambda < \omega_0$.

Dans ce cas $\Delta < 0$ et $\Delta = -4(\omega_0^2 - \lambda^2) = \left(2i \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)^2$.

On pose $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Alors, $r_1 = -\lambda - i\omega$ et $r_2 = -\lambda + i\omega$ sont les solutions de l'équation caractéristique.

Les solutions de l'équation homogène associée à I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto [\lambda_1 \times \cos(\omega \times t) + \lambda_2 \times \sin(\omega \times t)] \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode 20.6 – Déterminer une solution particulière de (E) : « Intuition »

Parfois, on trouve une solution particulière évidente. C'est le cas, par exemple, lorsque le second membre est une fonction constante.

Exemple 20.11 – Circuit RLC série : régime forcé

La fonction constante égale à E est solution évidente de I.2. Il y a 3 cas :

- **Régime aperiodique** : $\lambda > \omega_0$.

Les solutions de I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + \lambda_1 \times e^{r_1 \times t} + \lambda_2 \times e^{r_2 \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Régime critique** : $\lambda = \omega_0$.

Les solutions de I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + (\lambda_1 + \lambda_2 \times t) \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Régime pseudo-périodique** : $\lambda < \omega_0$.

Les solutions de I.2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + [\lambda_1 \times \cos(\omega \times t) + \lambda_2 \times \sin(\omega \times t)] \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Méthode 20.7 – Déterminer une solution particulière : second membre exponentiel

On suppose que le second membre est de la forme $d : t \mapsto \mu \times e^{K \times t}$ où $(K, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- Lorsque K n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto C \times e^{K \times t}$ où $C \in \mathbb{K}$ est à déterminer.
- Lorsque K est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto C \times t \times e^{K \times t}$ où $C \in \mathbb{K}$ est à déterminer.
- Lorsque K est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto C \times t^2 \times e^{K \times t}$ où $C \in \mathbb{K}$ est à déterminer.

Exemple 20.12

Déterminons les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 3y' + 2y = e^t$ (E).

► **Résolution de l'équation différentielle homogène associée :** $y'' - 3y' + 2y = 0$ (H).

L'équation caractéristique de (H) est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 1$. L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes : 1 et 2.

Par théorème, les solutions générales de (H) sont les fonctions :

$$\begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda_1 \times e^t + \lambda_2 \times e^{2t} \end{cases}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

► **Recherche d'une solution particulière de (E).**

Le second membre est $d(t) = e^{1 \times t}$ et 1 est racine simple de l'équation caractéristique.

On cherche une solution particulière φ de (E) sous la forme $\varphi(t) = C \times t \times e^t$ où $C \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer C , on injecte φ dans (E) et on identifie avec le second membre.

$$\begin{array}{rcl} 2 \times \left(\varphi(t) \right) & = & C \times t \times e^t \\ (-3) \times \left(\varphi'(t) \right) & = & C \times e^t + C \times t \times e^t \\ \varphi''(t) & = & 2C \times e^t + C \times t \times e^t \\ \hline \varphi''(t) - 3\varphi'(t) + 2\varphi(t) & = & -C \times e^t. \end{array}$$

Pour que φ soit une solution de (E), il suffit donc que $-C = 1$, c'est-à-dire, $C = -1$.

Ainsi, une solution particulière de (E) est :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto -t \times e^t. \end{cases}$$

► Ainsi, les solutions de (E) sont :

$$\begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \lambda_1 \times e^t + \lambda_2 \times e^{2t} - t \times e^t. \end{cases}$$

où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

 Remarque 20.7

La méthode précédente s'applique encore lorsque les coefficients de l'équation différentielle sont réels et le second membre est de la forme $t \mapsto \gamma \times e^{\alpha \times t} \times \cos(\beta \times t)$ ou $t \mapsto \gamma \times e^{\alpha \times t} \times \sin(\beta \times t)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour cela, on utilise les nombres complexes : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma \times e^{\alpha \times t} \times \cos(\beta \times t) = \operatorname{Re} \left(\gamma \times e^{(\alpha + i\beta) \times t} \right) \quad \text{et} \quad \gamma \times e^{\alpha \times t} \times \sin(\beta \times t) = \operatorname{Im} \left(\gamma \times e^{(\alpha + i\beta) \times t} \right).$$

**Proposition 20.2 – Principe de superposition**

On suppose que le second membre d de l'équation différentielle $y'' + a \times y' + b \times y = c(t)$ s'écrit sous la forme d'une somme de $p \in \mathbb{N}^*$ fonctions continues : $c = c_1 + \dots + c_p$.

Si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, φ_i est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + a \times y' + b \times y = c_i(t)$, alors $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p$ est solution particulière de $y'' + a \times y' + b \times y = c(t)$.

Démonstration

La fonction $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_p$ est deux fois dérivable sur I comme somme de fonctions deux fois dérivable sur I .

Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $t \in I$, $\varphi_i''(t) + a \times \varphi_i'(t) + b \times \varphi_i(t) = c_i(t)$.

En sommant les p équations, on a, pour tout $t \in I$, $\varphi''(t) + a \times \varphi'(t) + b \times \varphi(t) = c(t)$. □

III.4. Problème de Cauchy**Définition 20.7 – Problème de Cauchy**

Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

**Théorème 20.8 – Cauchy linéaire**

Avec les notations précédentes, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

possède une unique solution sur I .

Démonstration

Admis.

 Remarque 20.8 – Isomorphisme

L'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S}_{(H)} &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\mapsto (y(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme :

- La linéarité est claire :

$$\Psi(\lambda.y_1 + y_2) = ((\lambda.y_1 + y_2)(t_0), (\lambda.y_1 + y_2)'(t_0)) = \lambda.(y_1(t_0), y_1'(t_0)) + (y_2(t_0), y_2'(t_0)) = \lambda.\Psi(y_1) + \Psi(y_2).$$

- La bijectivité est une conséquence de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy : pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution de

$$\begin{cases} y'' + a(t) \times y' + b(t) \times y = 0 & \text{(H)} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Autrement dit, il existe un unique $y \in \mathcal{S}_{(H)}$ tel que $\Psi(y) = (y_0, y_1)$.

En particulier, on retrouve que :

$$\dim(\mathcal{S}_{(H)}) = 2.$$

💡 Exemple 20.13 – Système harmonique I.5

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 \times x = 0 \\ x(0) = x_0 > 0 \\ \dot{x}(t_0) = 0. \end{cases}$$

À l'instant initial, l'allongement du ressort est égal à x_0 . Le ressort est lâché sans vitesse initiale.

On sait que ce problème de Cauchy possède une unique solution notée x . On sait aussi qu'il existe $(A, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} x(t) : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto A \times \cos(\omega_0 \times t + \varphi). \end{aligned}$$

Déterminons l'amplitude et la phase du mouvement à l'aide des conditions initiales.

On a $x(0) = x_0$. D'où, $A \times \cos(\varphi) = x_0 (> 0)$. Comme $A \geq 0$, on en déduit que $A > 0$ et $\cos(\varphi) > 0$.

De plus, $\dot{x}(0) = 0$. D'où, $-A \times \omega_0 \times \sin(\varphi) = 0$. Or, A et ω_0 sont non nuls, donc $\sin(\varphi) = 0$.

Ainsi, $\varphi \equiv 0[2\pi]$, $A = x_0$ et

$$\begin{aligned} x(t) : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x_0 \times \cos(\omega_0 \times t). \end{aligned}$$

💡 Exemple 20.14 – Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension

À l'instant initial, on suppose le condensateur déchargé et l'intensité nulle : $u(0) = u'(0) = 0$.

On note u l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \times \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \times u = \frac{E}{L \times C}, \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

- **Régime apériodique** : $\lambda > \omega_0$.

La fonction u est de la forme :

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + \lambda_1 \times e^{r_1 \times t} + \lambda_2 \times e^{r_2 \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant en $t = 0$ et en dérivant puis évaluant en $t = 0$, il vient

$$\begin{cases} E + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ r_1 \times \lambda_1 + r_2 \times \lambda_2 &= 0. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par r_1 et en lui retranchant la deuxième, il vient : $\lambda_2 = \frac{E \times r_1}{r_2 - r_1}$.

En multipliant la deuxième ligne r_2 et en lui retranchant la première, il vient : $\lambda_1 = -\frac{E \times r_2}{r_2 - r_1}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E \times \left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1} \times e^{r_1 \times t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \times e^{r_2 \times t} \right), \end{aligned}$$

- **Régime critique** : $\lambda = \omega_0$.

La fonction u est de la forme :

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + (\lambda_1 + \lambda_2 \times t) \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant en $t = 0$ et en dérivant puis évaluant en $t = 0$, il vient :

$$\begin{cases} E + \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda \times \lambda_1 &= 0. \end{cases}$$

Donc, $\lambda_1 = -E$ et $\lambda_2 = -E \times \lambda$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E - E \times (1 + \lambda \times t) \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

- **Régime pseudo-périodique** : $\lambda < \omega_0$.

La fonction u est de la forme :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E + [\lambda_1 \times \cos(\omega \times t) + \lambda_2 \times \sin(\omega \times t)] \times e^{-\lambda \times t}, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant en $t = 0$ et en dérivant puis évaluant en $t = 0$, il vient :

$$\begin{cases} E + \lambda_1 &= 0 \\ \omega \times \lambda_2 - \lambda \times \lambda_1 &= 0. \end{cases}$$

Donc, $\lambda_1 = -E$ et $\lambda_2 = -E \times \frac{\lambda}{\omega}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} u : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E - E \times \left[\cos(\omega \times t) + \frac{\lambda}{\omega} \times \sin(\omega \times t) \right] \times e^{-\lambda \times t}. \end{aligned}$$

III.5. Utilisation des séries entières

Pour déterminer **des** solutions de

$$x'' + a(t) \times x' + b(t) \times x = c(t) \quad (\text{E})$$

lorsque les fonctions a , b et c sont développables en séries entières, on peut en chercher sous la forme d'une somme de série entière $\sum a_n \times x^n$ de rayon de convergence R . Pour tout $t \in]-R, R[$, on note $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times t^n$.

On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[\cap I$.

On injecte S dans (E) et par unicité du développement en séries entières lorsqu'il existe, on détermine les coefficients a_n . On détermine ensuite R .

Cette méthode est classique!

IV. Résolution d'un système différentiel à coefficients constants

IV.1. Cadre

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul et on identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des fonctions réelles dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{K}$, on écrira alors :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse au système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$X' = A \times X \tag{H}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (la matrice A ne dépend pas de t , c'est pourquoi on dit que ce système est à coefficients constants).

IV.2. Cas particulier où A est diagonale

Dans ce cas, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x'_i = \lambda_i \times x_i$. Les solutions de cette équation sont de la forme $t \mapsto \mu_i \times e^{\lambda_i \times t}$ où $\mu_i \in \mathbb{K}$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 20.9 – A est diagonale

Les solutions de $X' = A \times X$ sont de la forme :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix}$$

où $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 20.9

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix} = \underbrace{\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \times t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} + \dots + \underbrace{\mu_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix}}_{=\varphi_n(t)}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{S}_{(H)} = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, on vérifie que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre.

Donc, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H)}$ et $\mathcal{S}_{(H)}$ est de dimension n .

IV.3. Cas particulier où A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ **Exercice 20.1**

Soient $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

On note $Y = P^{-1} \times X : t \mapsto P^{-1} \times X(t)$.

Montrer que X est dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, Y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Résolution

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

($\Rightarrow$) On suppose que X est dérivable sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, $x_1, \dots, x_n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $i \in [1, n]$, $y_i = \sum_{j=1}^n q_{i,j} x_j$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Donc, Y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) On suppose que Y est dérivable sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, $y_1, \dots, y_n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $X = PY$.

Pour tout $i \in [1, n]$, $x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} y_j$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Donc, X est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$: il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et on écrit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On pose $Y = P^{-1} \times X$, autrement dit, $X = P \times Y$.

► Comme P est inversible et à coefficients constants, X est dérivable sur I si, et seulement si, Y est dérivable sur I .

► Dans ce cas, comme P est à coefficient constant, on a : $Y' = P^{-1} \times X'$ et

$$X' = A \times X \iff X' = P \times D \times P^{-1} \times X \iff P^{-1} \times X' = D \times P^{-1} \times X \iff Y' = D \times Y.$$

Par le paragraphe précédent, $Y' = D \times Y$ si, et seulement si, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que, pour tout $t \in I$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, X est solution de $X' = A \times X$ si, et seulement si, il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que, pour tout $t \in I$,

$$X(t) = P \times Y(t) = P \times \begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 20.10 – A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$**

Les solutions de $X' = A \times X$ sur I sont de la forme :

$$t \mapsto P \times \begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{\lambda_n \times t} \end{pmatrix}$$

où $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 20.10 – À retenir

Lorsque A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il suffit de diagonaliser A : autrement dit, déterminer D diagonale et P inversible telles que, $A = P \times D \times P^{-1}$.

Il est **inutile** de calculer P^{-1} !

Remarque 20.11

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$P \times \begin{pmatrix} \mu_1 \times e^{-\lambda_1 \times t} \\ \vdots \\ \mu_n \times e^{-\lambda_n \times t} \end{pmatrix} = \underbrace{\mu_1 \cdot P \times \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \times t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} + \cdots + \underbrace{\mu_n \cdot P \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{-\lambda_n \times t} \end{pmatrix}}_{=\varphi_n(t)}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{S}_{(H)} = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Comme P est inversible et la fonction exponentielle ne s'annule pas, on vérifie que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre. Donc, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{(H)}$ et $\mathcal{S}_{(H)}$ est de dimension n .

Exemple 20.15

On résout le système différentiel d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 4y. \end{cases} \quad (\text{E})$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable et $A = P \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$t \mapsto P \times \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \times e^{2t} + \mu \times e^{3t} \\ -\lambda \times e^{2t} - 2\mu \times e^{3t} \end{pmatrix}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

IV.4. Cas particulier où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Dans ce cas, on diagonalise A sur $\mathbb{C}$ et on applique le cas précédent.

On obtient les solutions complexes de $X' = A \times X$. Pour obtenir les solutions réelles de $X' = A \times X$, on prend les parties réelles des solutions complexes trouvées.

IV.5. Cas où A est triangulaire

Il n'y a pas de résultat général à connaître dans ce cas. Traitons un exemple : on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On cherche alors à résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \end{cases} \iff \exists \mu_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2 \times \mu_2 \times e^t \\ x_2(t) = \mu_2 \times e^t \end{cases}$$

Il reste à résoudre $x_1' = x_1 + 2 \times \mu_2 \times e^t$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto \mu_1 \times e^t$ avec $\mu_1 \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de $x_1' = x_1 + 2 \times \mu_2 \times e^t$ par la méthode de variation de la constante. La fonction $t \mapsto K(t) \times e^t$ est solution si, et seulement si, $K'(t) = 2\mu_2$.

Il suffit de prendre $K : t \mapsto 2\mu_2 \times t$. Les solutions de $x_1' = x_1 + 2 \times \mu_2 \times e^t$ sont donc de la forme $t \mapsto 2\mu_2 \times t \times e^t + \mu_1 \times e^t$ où $\mu_1 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de $X' = A \times X$ sont de la forme :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 2\mu_2 \times t \times e^t + \mu_1 \times e^t \\ \mu_2 \times e^t \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 2t \times e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

IV.6. Cas où A est trigonalisable

On suppose que A est trigonalisable sur $\mathbb{K}$: il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telle que $A = P \times T \times P^{-1}$. On pose $Y = P^{-1} \times X$.

► Comme P est à coefficients constants, X est dérivable sur I si, et seulement si, Y est dérivable sur I .

► Dans ce cas, on a : $Y' = P^{-1} \times X'$ et

$$X' = A \times X \iff X' = P \times T \times P^{-1} \times X \iff P^{-1} \times X' = T \times P^{-1} \times X \iff Y' = T \times Y.$$

On est alors ramené au cas du paragraphe précédent. Les solutions de $X' = A \times X$ sont alors de la forme $P \times Y$ où Y est une solution de $Y' = T \times Y$.



Exercice 20.2

Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x_1' = -4x_2 \\ x_2' = x_1 - 4x_2 \end{cases}$

IV.7. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants : démonstration du théorème 20.7 page 13

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' + a \times y' + b \times y = 0 \quad (\text{H})$$

où a et b sont des constantes dans $\mathbb{K}$.

En notant $X : t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, l'équation (H) est équivalente au système différentiel d'ordre 1 :

$$X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=A} \times X(t). \quad (\text{H}')$$