

Exercice 1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, bases et dimension

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = y = z\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(a - b, a + b, 2a - 3b) \text{ tels que } a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E , F et G sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension.
2. Déterminer les espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$, en déterminer une base et la dimension.

Exercice 2. Sous-espaces vectoriels, bases et dimension

Dans chacun des cas suivants, prouver que F est un espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.

1. F est l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = (a + b + c)X^3 + (2a - c)X^2 + b + c \quad \text{où } (a, b, c) \text{ décrit } \mathbb{R}^3$$

2. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } 3P(X) - XP'(X) + XP''(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}\}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = MA\}$

Exercice 3. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, somme

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (1, 1, 1, 3), \quad v_3 = (2, 1, 1, 1), \quad v_4 = (-1, 0, -1, 2), \quad v_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \text{Vect}(v_4, v_5)$, calculer les dimensions respectives de F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 4. Familles libres ou liées de $\mathbb{R}^3$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = (2, 1, 0) \quad ; \quad u_2 = (-1, 0, 1) \quad ; \quad u_3 = (1, 0, 1) \quad ; \quad u_4 = (1, 2, 3)$$

On considère les familles :

$$(u_1, u_2) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_3) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_4) \quad ; \quad (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Pour chacune d'elles, dire s'il s'agit d'une famille libre ou liée, d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non, d'une base de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Exercice 5. Familles libres ou liées de $\mathbb{R}[X]$

1. Les familles (P, Q, R) suivantes sont-elles libres ou liées ? Déterminer ensuite le rang de cette famille.

$$(a) \quad P(X) = (X - 1)(X - 2) \quad ; \quad Q(X) = (X + 1)(X + 2) \quad ; \quad R(X) = (X + 1)(X - 1)$$

$$(b) \quad P(X) = X^2 + 1 \quad ; \quad Q(X) = -X^2 - 1 \quad ; \quad R(X) = 3$$

$$(c) \quad P(X) = X^2 + 1 \quad ; \quad Q(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad ; \quad R(X) = 7X^3 + 2$$

2. Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes non nuls $(P_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de degrés échelonnés :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$$

Montrer par récurrence que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Exercice 6. Hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tels que } P(x_0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera une base.

Exercice 7. Rang d'une famille de vecteurs

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, -2, 3), \quad e_4 = (1, 1, 2, -2).$$

1. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle libre ?
2. Déterminer le rang de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) .
3. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) .

Exercice 8. Espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle

1. Montrer que l'ensemble $E = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' = 2f' - f\}$ est un espace vectoriel.
2. Vérifier que les fonctions $g_0 : x \mapsto e^x$ et $g_1 : x \mapsto xe^x$ forment une famille libre de E .
3. Soit $f \in E$. On pose $h : x \mapsto f(x)e^{-x}$. Calculer h'' . En déduire l'expression de h , puis de f .
4. En déduire une base et la dimension de E .

Exercice 9. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

On considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x = z + t \text{ et } y = x + t\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, 2x, 3y) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $C^0(\mathbb{R})$

On considère

$$A = \left\{f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tels que } \int_0^1 f(t) dt = 0\right\} \quad \text{et} \quad B = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)\}.$$

Vérifier que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(\mathbb{R})$ et montrer qu'ils sont supplémentaires dans $C^0(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Soient $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles, P l'ensemble des fonction paires et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 12. Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.$$

1. Montrer que $A \oplus B = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Soit $C = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(X) = P(-X)\}$. Montrer que $(A \oplus B) \oplus C = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 13. Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.
 (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.
 (c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.
 (d) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.