

Techniques asymptotiques

★ **Exercice 1** — Déterminer les développements limités suivants :

$$\text{DL}_2(0) \text{ de } \ln(1+x+\sqrt{1+x}); \quad \text{DL}_2(0) \text{ de } e^{\cos(x)} - (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{DL}_3(0) \text{ de } \frac{x - \tan(x)}{1 - \cos(x)}; \quad \text{DL}_2(1) \text{ de } x \ln(1+x); \quad \text{DL}_{2n+1}(0) \text{ de } \arcsin(x)$$

★ **Exercice 2** — Déterminer un équivalent simple de :

$$\ln\left(\frac{1+\text{ch}(x)}{2}\right) \text{ en } 0; \quad \arcsin(e^{-\sqrt{n}}) \text{ en } +\infty; \quad \frac{\cos(x) - x^x}{e^x} \text{ en } 0$$

$$\frac{[x]}{\sqrt{x+1}} \text{ en } +\infty; \quad \frac{\ln(x^5+2)}{x^2+5e^x} \text{ en } +\infty; \quad \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

★ **Exercice 3** — Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n; \quad e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1} \cdot \pi\right); \quad \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$$

★ **Exercice 4** — Déterminer, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{n}\right)$.

★ **Exercice 5** — Soit la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = (1 + \sin x)^{1/x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

1. Déterminer l'unique réel λ tel que f soit dérivable sur I .
2. On suppose désormais λ égal à cette valeur. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente à l'origine.

★ **Exercice 6** — Montrer que $(x \mapsto \sin(x), x \mapsto x \sin(x), x \mapsto \cos(x), x \mapsto x \cos(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

★ **Exercice 7** — Établir, en calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(e^x - 1)^n$, que pour tout $0 \leq p \leq n$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^p}{p!} = \delta_{n,p}$.

★ **Exercice 8** — On note f la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x - 1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Trouver une CNS sur (a, b) pour que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
2. Montrer qu'alors, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ à préciser, $f(x) = \lambda x^2 + o(x^2)$.

★ **Exercice 9** — Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\sqrt{n})$.

Montrer que $\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{u_n}$.

★ **Exercice 10** — Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$. Montrer que :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1) + f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

★ **Exercice 11** — Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, supposée 1-périodique et $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

$$1. \text{ Montrer que } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Donner la nature de la série de terme général u_n .

★ **Exercice 12** — Donner un développement asympt. de $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

★★ **Exercice 13** — Former le dév. asymptotique en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

★★ **Exercice 14** — On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Trouver $\alpha > 0$ tel que $v_n = u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}$ admette une limite finie non nulle.
3. En déduire un équivalent simple de u_n .

★★ **Exercice 15** — Variations autour du lemme de Cesàro (A)

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite ℓ .

Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ puis que $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

a) On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

b) En déduire que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

★★★ **Exercice 16** — Variations autour du lemme de Cesàro (B)

1. *Lemme de Cesàro* – Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

2. *Lemme de convolution* – Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} = \ell_1 \ell_2$.

3. *Lemme de Kronecker* – Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

a) Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ .

Montrer que $\frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) s_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

b) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum x_n$ converge.

Déduire de la question précédente que $\frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★★ **Exercice 17** — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}}$.

- Prouver la convergence de la suite u . On note α sa limite.
- Écrire une fonction Python affichant les 15 premiers termes de la suite u .
- À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer un majorant de $|u_n - \alpha|$ dépendant de n . Comment calculer α à 10^{-4} près?
- Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une telle approximation.

★★ **Exercice 18** — Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Déterminer un équivalent de x_n en considérant $x_{n+1}^2 - x_n^2$.

★★ **Exercice 19** — Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{n+1}$.

★★★ **Exercice 20** — Étude d'un point attractif

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

- Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite notée ℓ .
- On pose désormais $v_n = |u_n - \ell|$.
 - À l'aide de v_{n+1}/v_n , prouver que $v_n = O(k^n)$ pour tout $k > |f'(\ell)|$.
 - Justifier alors la convergence de $(\ln(v_n f'(\ell)^{-n}))$ et en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|u_n - \ell| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha f'(\ell)^n$.

★★ **Exercice 21** — Suite définie implicitement (1)

- Pour tout $n \geq 3$, montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique racine dans $]0, 1[$ (notée x_n) et une unique racine dans $]1, +\infty[$ (notée y_n).
- Donner un équivalent de x_n .
- Donner la limite ℓ de y_n ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

★★ **Exercice 22** — Suite définie implicitement (2)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution notée u_n dans $\left[2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. On pose alors $x_n = u_n - 2n\pi$.
- Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ puis trouver un équivalent.