

Prénom :

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de

l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Durée du devoir : 4h. Le devoir est composé de 4 pages où se trouvent trois exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.



Bernhard Riemann (1826 -1866) est un mathématicien allemand à qui l'on doit notamment des innovations majeures en géométrie. Ses travaux se sont révélés d'une fécondité insoupçonnée lorsque Einstein les a repris pour fonder sa théorie de la relativité générale. Second d'une famille de six enfants, Bernhard Riemann reçoit une éducation rigoureuse et se destine, encouragé par son père qui est pasteur luthérien, à la théologie. A l'école, c'est un élève studieux et appliqué, qui fait preuve d'un intérêt particulier pour les mathématiques. Aussi le directeur du lycée l'autorise à consulter des ouvrages de mathématiques de sa propre bibliothèque, dont la Théorie des nombres de Legendre. Riemann en compulse les 900 pages en une semaine et en dira plus tard : « Das ist ja ein wundervolles Buch; ich weiss es auswendig (c'est un livre merveilleux; je le connais par cœur) ». Riemann entre à l'université de Göttingen en 1846, où il se détourne de la théologie pour étudier les mathématiques, avec le consentement de son père. Les idées brillantes de Riemann marquent le début d'une théorie nouvelle et extrêmement fertile de la géométrie. De santé fragile, Riemann souffrait chroniquement de dépression et d'hypocondrie. Malgré les voyages en Sicile et en Italie afin de profiter du climat plus doux, la maladie l'emporte sur les rives du Lac Majeur en 1866.

Exercice 1. d'après EML

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

- Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
 - Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
- Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.
 - Un exemple d'application des résultats précédents : soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Compléter le programme Python, en utilisant les commandes "`np.ones`" et "`np.zeros`" afin d'obtenir la matrice P :

```
P= .....
P[1,2]=.....
P[. , .]= np.zeros(1)
print( ... )
```

- Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
- En déduire une matrice diagonale D , dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $C = PDP^{-1}$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
Montrer : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
- Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
7. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ (on montrera que $M \in E_2(C) \iff N \in E_2(D)$) et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$. Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Exercice 2. d'après Éricome

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x)$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0; +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n , avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
- (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
- (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

- (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.
- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ϵ un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ϵ .
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \epsilon$, on répète les opérations suivantes.
On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) < n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n , appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ϵ près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif ϵ , et renvoyant une valeur approchée de u_n , à ϵ près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n,eps):
    a = 0
    b = 1
    while _____:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            _____
        else:
            _____
    return (a+b)/2
```

- (b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier N supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif ϵ et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à ϵ près.
On pourra faire appel à la fonction `approx_u` définie à la question précédente.

Exercice 3. d'après eml

1. Étude préliminaire

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0, 1[$ que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(a) Vérifier, pour tout réel x de $[0, 1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(b) On rappelle que la commande Python **np.prod(liste)** renvoie le produit des composantes de la liste prise en argument. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def c_bin(n,k)** : qui prend en argument deux entiers naturels n et k et renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

(c) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tels que $n < k$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(d) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0, 1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

(e) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

— On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

— Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n , on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N . Donner son espérance .

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[N=n]}(X = k)$.

(c) Vérifier que : $P(X = 0) = \frac{4}{9}$. (On utilisera le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.)

(d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

(e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

(f) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k.$