Les suites numériques

1 Définitions générales

Définitions

On appelle **suite numérique** une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0.
L'image d'un entier naturel n est noté $u(n)$ ou bien u_n. Dans ce cas, n est appelé **l'indice** ou le **rang** du terme u_n.
La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Exemple

On considère la suite (u_n) des nombres entiers impairs. Le premier terme de cette suite est 1. On note alors $u_0 = 1$.
Le suivant est 3 : on va noter $u_1 = 3$ ou bien $u(1) = 3$.
Ainsi, les premiers termes de la suite (u_n) sont donc $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$ et ainsi de suite.
Le terme de rang 3 de la suite (u_n) est égal à 7.

Définition : suite définie par une formule explicite

Soit p un entier naturel.
On dit qu'une suite est définie par une **formule explicite** si pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[\, p\,;+\infty\,[$.

Exemples

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)^2$.

Pour calculer les termes de cette suite, on va remplacer n par des valeurs d'entiers naturels.
Le premier terme de cette suite est $u_0 = (0+1)^2 = 1$.
Le terme de rang 3 est $u_3 = (3+1)^2 = 16$.

Définition : suite définie par une relation de récurrence

Soit p un entier naturel.
Une suite (u_n) est définie par **récurrence** lorsque l'on donne la valeur du terme initial u_p et un procédé qui permet de calculer un terme à partir du précédent. Ce procédé est appelé **relation de récurrence**.

Exemples

Prenons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n - 4$.
Cela signifie que si on souhaite calculer un terme, il faut multiplier par 2 le précédent et soustraire 4 au résultat.

On a alors : $u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 1 - 4 = -2$
Puis : $u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times (-2) - 4 = -8$
Puis : $u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times (-8) - 4 = -20$
Et ainsi de suite

2 Représentation graphique d'une suite numérique

Définition

La représentation graphique d'une suite numérique est formée de l'ensemble des points de coordonnées (n ; u_n) avec les valeurs de n pour lesquelles la suite est définie. On parle de **nuage de points**.

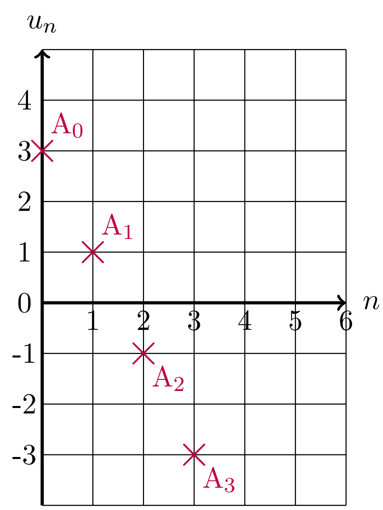
Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 3$.

Sa représentation graphique est le nuage des points de coordonnées (n ; u_n).

D'après l'expression explicite de la suite, $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = -3$.
Cela donne donc les points de coordonnées $A_0(0\,;\,3)$, $A_1(1\,;\,1)$, $A_2(2\,;\,-1)$ et $A_3(3\,;\,-3)$.

Il est possible de faire apparaître ce nuage de points à l'aide d'un tableur.



3 Sens de variation d'une suite numérique

Définitions

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et soit p un entier naturel.

- La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite (u_n) est **monotone** à partir du rang p si elle est soit croissante soit décroissante à partir du rang p.
- La suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Remarque

Lorsque l'on remplace les inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) par des inégalités strictes ($<$ ou $>$) on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthode : étude de variation dans le cas général

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence ou le quotient de deux termes consécutifs.

- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.

- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) est croissante à partir du rang p.

Exemples

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$. Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3 > 0$
Puisque, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$. Calculons les trois premiers termes de cette suite :

$v_0 = \dfrac{2 \times 0 + 1}{5 \times 0 + 2} = \dfrac{1}{2}$; $v_1 = \dfrac{2 \times 1 + 1}{5 \times 1 + 2} = \dfrac{3}{7}$; $v_2 = \dfrac{2 \times 2 + 1}{5 \times 2 + 2} = \dfrac{5}{12}$. On a $v_0 > v_1 > v_2$. Il semble que la suite (v_n) soit décroissante. Calculons le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(n+1)+1}{5(n+1)+2} \div \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2n+3}{5n+7} \times \frac{5n+2}{2n+1} = \frac{10n^2+19n+6}{10n^2+19n+7}$$

Or, $10n^2 + 19n + 6 < 10n^2 + 19n + 7$ donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. La suite (v_n) est donc strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Méthode : étude de variation dans le cas d'une suite définie de façon explicite

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant p$ par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[\, p\,; +\infty\, [$.

- Si f est (strictement) croissante sur $[\, p\,; +\infty\, [$ alors (u_n) est (strictement) croissante à partir du rang p.
- Si f est (strictement) décroissante sur $[\, p\,; +\infty\, [$ alors (u_n) est (strictement) décroissante à partir du rang p.

Démonstration

On se place dans le cas où f est croissante sur $[\ p : +\infty\ [$.

Pour tout entier $n \geqslant p$, on a $n+1 \geqslant n$.
Puisque f est croissante on a alors $f(n+1) \geqslant f(n)$.
Par définition, $u_n = f(n)$ et donc $u_{n+1} = f(n+1)$. On a alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et (u_n) est donc croissante sur $[\ p\,;+\infty\ [$.

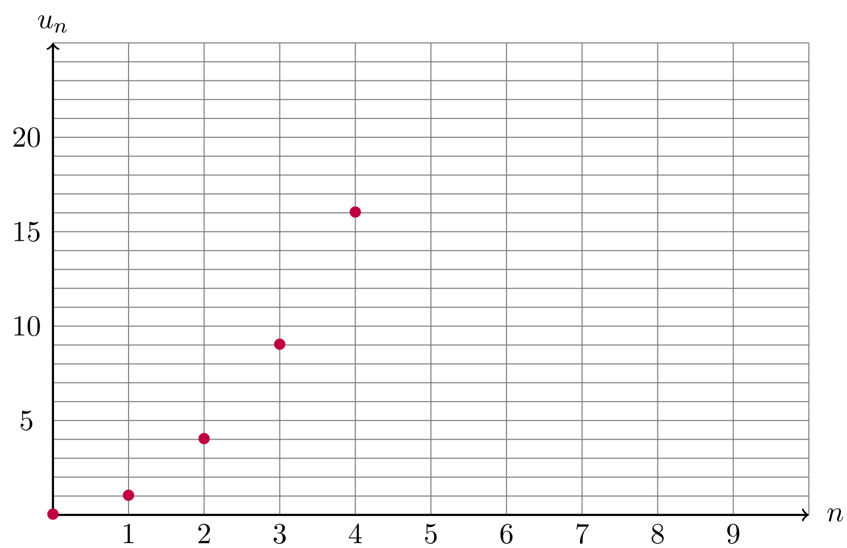
Le cas où f est décroissante se montre de la même façon.

Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

Soit f la fonction carrée. On peut donc écrire pour tout entier naturel n : $u_n = f(n)$. Or la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Ainsi, (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.



Les suites numériques

> Modéliser une situation à l'aide d'une suite

Exercice n°1 Modéliser la situation à l'aide d'une suite dans chacun des cas suivants :

1. Les nombres entiers positifs pairs.
2. Les multiplies de 3 positifs.
3. Les multiples de 7 négatifs.
4. Les carrés parfaits.

Exercice n°2 On considère la suite de nombres suivante :

$$7 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 15 \quad ; \quad 189 \quad ; \quad 562 \quad ; \quad 896 \quad ; \quad 78 \quad ; \quad -3 \quad ; \quad 678 \quad ; \quad -109$$

1. Quel est le terme de rang 0 de cette suite ?
2. Quel est le terme de rang 9 de cette suite ?
3. Quel est le premier terme de cette suite ? Est-il égal au terme de rang 1 ?
4. Quel est le troisième terme de cette suite ?

Exercice n°3 Pour chacune des suites « logiques » ci-dessous, donner les trois termes suivants :

a. $-10 \quad ; \quad -7 \quad ; \quad -4 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad ...$

b. $0 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 12 \quad ; \quad 16 \quad ; \quad ...$

c. $1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 15 \quad ; \quad 21 \quad ; \quad ...$

Exercice n°4 On souhaite étudier l'évolution d'une bactérie dans un milieu fermé.

Chaque heure, le nombre de bactérie est multiplié par 1,2. On souhaite utiliser un tableur :

1. Combien de bactéries y a-t-il au début de l'expérience ?
2. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B4 avant de l'étirer vers le bas ?
3. Répondre à l'aide d'un tableur : combien de bactérie y a-t-il au bout de 10 heures ?

	A	B
1	Heure	Nombre de bactéries (en milliers)
2	14 h 00	40
3	15 h 00	
3	16 h 00	

4. Modéliser la situation à l'aide d'une suite que l'on nommera u.
5. Que vaut $u(5)$? A quoi cela correspond-t-il ?
6. Déterminer la valeur de $u(24)$ et interpréter le résultat.

> Calculer un terme de rang donné

Exercice n°5 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = 2n^2 - n + 1$.

1. Comment est définie cette suite ?
2. Donner la valeur de $u(1)$ et de $u(2)$.
3. Quelle est la valeur du premier terme de cette suite ?
4. On souhaite calculer les termes de cette suite à l'aide du programme Python ci-dessous :

```
1 def u(...):
2     return(...)
```

Que doit-on mettre dans les lignes 1 et 2 à la place des « ... » ?

5. Vérifier, à l'aide de ce programme, les résultats trouvées aux questions 1 et 2.

Exercice n°6 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2,5$ et pour tout entier n non nul par $v_{n+1} = -2v_n + 2$.

1. Comment est définie cette suite ?
2. Calculer v_1 puis v_2.
3. On souhaite calculer les termes suivants à l'aide d'un tableur dont voici un extrait.
   Que doit-on saisir dans la cellule B3 comme formule avant de l'étirer vers le bas ?

	A	B	C
1	n	v_n	
2	0	$-2,5$	
3	1		
4	2		
5	3		

Exercice n°7 Soit la suite (u_n) définie sur pour tout entier $n \geqslant$ par $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

1. Comment est définie cette suite ?
2. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
3. Déterminer le dixième terme de cette suite.
4. Écrire le terme d'indice $n-1$ de cette suite.
5. Écrire le terme d'indice $n+1$ de cette suite.

Exercice n°8 On considère le programme Python ci-dessous :

```
def u(n):
  u=3
  for i in range (1, n+1):
    u=4*u-6
  return(u)
```

1. Comment est définie cette suite ?
2. Que vaut u_0 ?
3. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
4. A l'aide du programme, déterminer $u(10)$.

Exercice n°9 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 15$ et $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 5 - 3v_n$.

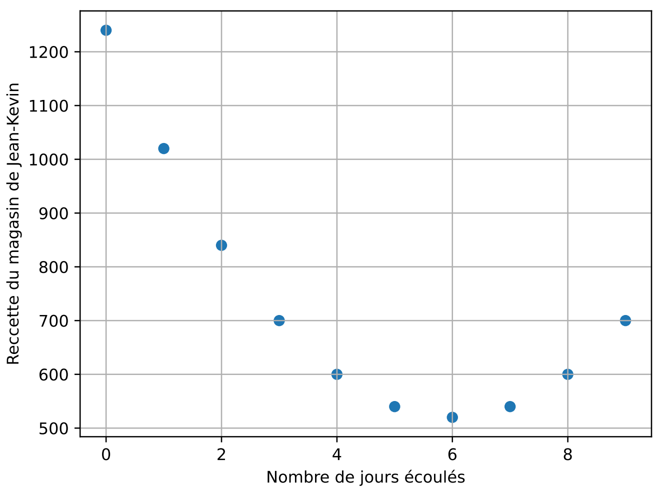
1. Comment sont définies ces deux suites ?
2. Calculer les trois premiers termes de ces deux suites.
3. On souhaite calculer les termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur :
   Que doit-on saisir comme formule dans la cellule B3 pour ensuite l'étirer vers le bas ?
4. Que doit-on saisir comme formule dans la cellule C3 pour ensuite l'étirer vers le bas ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	-15	4
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

> Représentation graphique et sens de variation

Exercice n°10 On donne ci-dessous la représentation graphique d'une suite (u_n).

Cette suite modélise l'évolution de la recette journalière du magasin de Jean-Kevin à partir du jour d'ouverture.



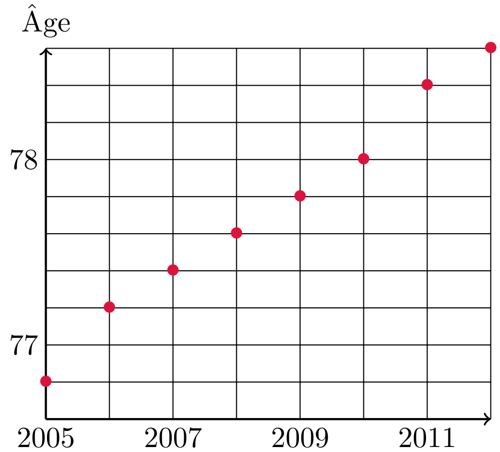
1. Donner la valeur de u_0 et interpréter ce résultat.
2. Donner la recette, en €, du magasin de Jean-Kevin. jours après l'ouverture.
3. Existe-t-il deux termes u_n et $u_{n'}$ de la suite (u_n) pour lesquels on a $u_n = u_{n'}$?
4. En utilisant la représentation graphique, conjecturer les variations de la suite (u_n).
5. Peut-on dire que les recettes du magasin de Jean-Kevin vont continuer d'augmenter ?

Exercice n°11 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Construire le nuage de points associé à cette suite. On fera apparaître les cinq premiers termes de (u_n).
3. Que peut-on dire des variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$?

Exercice n°12

Le graphique ci-dessous représente l'espérance de vie des hommes en France entre 2005 et 2012.
Pour tout entier n, on note e_n l'espérance de vie des hommes en France en $2005 + n$.



1. Lire e_0, e_2 puis e_4 et interpréter les résultats.
2. Quel est le rang du terme de la suite (e_n) associé à l'année 2007 ? Et à l'année 2012 ?
3. Quel est le rang du terme de la suite (e_n) égale à 77,2 ?
4. Conjecturer le sens de variation de la suite (e_n).

Exercice n°13 Jean-Kevin désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.

En 2025, il estime qu'il y a 1 000 singes sur l'île.

On admet que l'évolution du nombre de singes sur cette île est modélisée par la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 0,9v_n + 150\,;\, n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1\ 000 \end{cases}$$

	A	B
1	n	v_n
2	0	1000
3	1	1050
4	2	1095
5	3	1136
6	4	1172
7	5	1205
8	6	1234
9	7	1261
10	8	1285
11	9	1306
12	10	1326
13	11	1343
14	12	1359
15	13	1373
16	14	1386
17	15	1397
18	16	1407
19	17	1417
20	18	1425
21	19	1432

1. Quelle sera la population de singes en 2026 ? Détailler le calcul.
2. La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs arrondies à l'unité des premiers termes de la suite (v_n).

   Quelle formule, destinée à être étirée vers le bas, faut-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les termes de la suite (v_n) ?
3. D'après ce tableur, quelle sera la population de singes en 2030 ?
4. Indiquer en quelle année la population de singes dépassera pour la première fois les 1 400 individus.
5. Recopier ce tableur pour afficher le nuage de points correspondant. Conjecturer alors le sens de variation de la suite (v_n) et interpréter le résultat.

Exercice n°14 Jean-Kevin ouvre un compte épargne qui rapporte 2% à la fin de chaque année.

1. S'il place 1 000€ sur ce livret au premier Janvier 2025, quelle est la somme qu'il aura au premier Janvier 2026 ?
2. On note u_n la somme d'argent sur le livret de Jean-Kevin pour l'année $2025 + n$ où n est un entier naturel. Que vaut u_0 ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. A l'aide d'un tableur ou du programme Python ci-dessous, donner la somme d'argent sur le livret de Jean-Kevin en 2030.

```python
def u(n):
  u=1000
  for i in range (1, n+1):
    u=1.02*u
  return(u)
```

5. En complétant le précédent programme, ou à l'aide d'un tableur, dire au bout de combien d'année Jean-Kevin aura au moins 3 000€ sur son livret.
6. Voyant que cela va lui prendre du temps, il décide d'ajouter 50€ par mois chaque année en plus des 1 000€ placés le premier Janvier 2025.

   On note v_n la somme sur le compte de Jean-Kevin pour l'année $2025 + n$. On a ainsi pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} v_{n+1} = 1,02v_n + 600\,;\, n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1\ 000 \end{cases}$$
   Calculer v_1.
7. Avec cette nouvelle méthode, dire au bout de combien de temps Jean-Kevin aura au moins 3 000€ sur son compte.
8. Afficher le nuage de points correspondant à la suite (v_n). Au bout de combien d'année a-t-on $u_n > 10\ 000$?