

Intégrale d'une fonction continue

« Somme »

une « toute petite » quantité de x

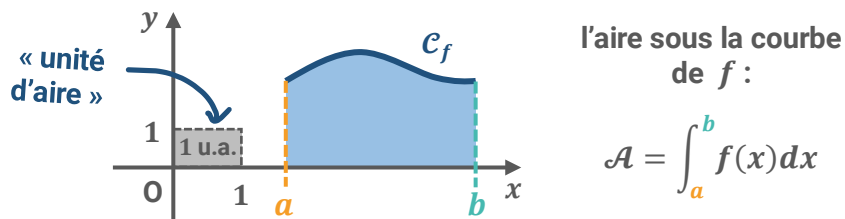
$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

« somme de tous les rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur dx entre a et b »

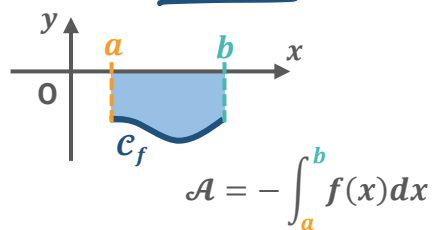
une primitive de f

Calcul d'aire

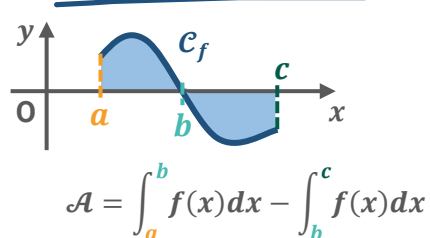
fonction continue et positive



négative



signe non constant



Propriétés

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \left| \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$f \leq g \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Intégration par parties (IPP)

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

dérivée de la fonction u

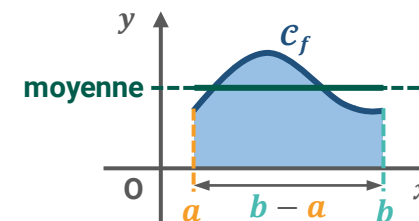
dérivée de la fonction v

Valeur moyenne

(la moyenne peut se noter \bar{f} , μ , m , etc.)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

avec $a < b$



Exercice 1

On considère les fonctions : $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x}$ et $h(x) = e^{4x}$

- (a) Calculer $\int_2^4 f(x)dx$; $\int_1^2 g(x)dx$; $\int_0^1 h(x)dx$.
 (b) Interpréter en terme d'aire, les intégrales précédentes, en supposant les fonctions positives sur les intervalles d'intégration.
- Calculer $\int_1^2 f(x)dx$; $\int_1^2 h(x)dx$.
- En déduire $\int_1^4 f(x)dx$ et $\int_1^2 \left(e^{4x} + 2x - 5 + \frac{1}{x} \right) dx$.
- Calculer la valeur moyenne de f , de g et puis de h sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

Exercice 2

Soit les fonctions f et F définies sur \mathbb{R} par : $F(x) = \frac{-6}{x^2 + 2}$ et $f(x) = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2}$.

- Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Trouver la primitive de f qui s'annule en 1.
- Calculer $\int_0^{10} f(x)dx$.

Exercice 3

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

$$\text{a) } I = \int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \quad \text{b) } J = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x} dx \quad \text{c) } K = \int_2^3 \frac{1}{1-x} dx \quad \text{d) } L = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Exercice 4

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

Exercice 1 : (2 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \cos(3x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 : (8 points)

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. (a) Montrer que $I_0 + I_1 = 1$.
(b) Calculer I_1 et en déduire I_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $I_n \geq 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} + I_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
(b) En déduire que pour tout entier non nul $I_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 3 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

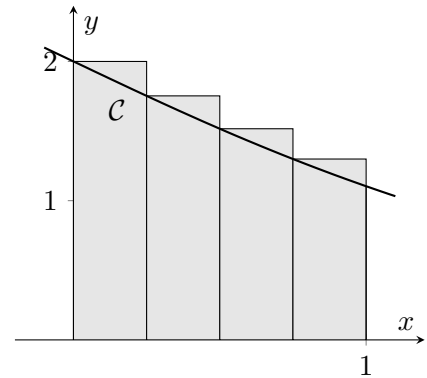
On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **Étude de la fonction f .**
 - (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec les axes du repère.
 - (b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe \mathcal{C} .
 - (c) Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. **Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.**

On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $[0; \frac{1}{4}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{1}{4})$.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{1}{2})$.
- Sur l'intervalle $[\frac{3}{4}; 1]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{3}{4})$.



Cette construction est illustrée ci-contre.

La fonction `valapp`, en python, ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat renvoyé par cette fonction.

```
from math import exp
def f(x) :
    return (x+2)*exp(-x)

def valapp() :
    S=0
    for i in range (0,4) :
        S=S+1/4*f(i/4)
    return S
```

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1.

On découpe l'intervalle $[0; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier la fonction `valapp` précédente afin qu'elle renvoie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Calculer l'aire A du domaine D , exprimée en unités d'aire à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 1 : (10 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 9x^2 + 4x$.

Déterminer la valeur moyenne M de la fonction f sur $[2; 5]$.

2. Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^2 x e^{x^2-3} dx$$

$$J = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x) - 1) dx$$

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10; 10]$ dont le tableau de variations est donné ci-contre :

Déterminer le meilleur encadrement possible de l'intégrale $S = \int_{-5}^3 g(x) dx$.

x	-10	-5	3	10
$g(x)$	7	2	4	-6

4. Déterminer, via une intégration par parties, l'intégrale suivante :

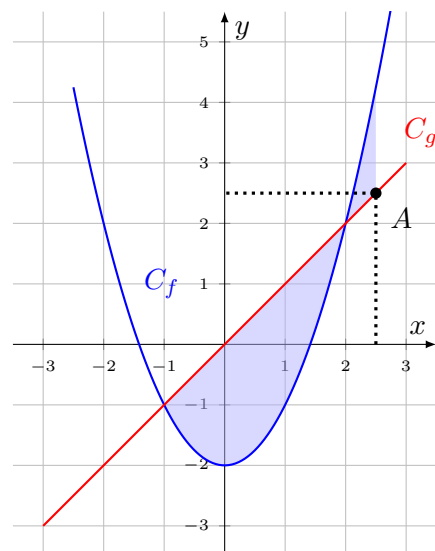
$$L = \int_{-1}^1 (t+3)e^{2t} dt$$

Exercice 2 : (4 points)

On a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$.

Le point A a pour coordonnées $A(2, 5; 2, 5)$.

Déterminer l'aire du domaine coloré en justifiant soigneusement la position relative des courbes.



Exercice 3 : (6 points)

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$.

1. Montrer que $I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.
2. Calculer $I_0 + I_1$. En déduire I_0 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$.
4. Calculer la valeur exacte de I_2 .
5. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t} dt$.
6. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .