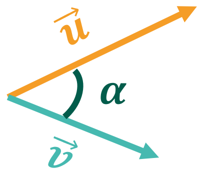
Géométrie dans l'Espace - 2

Produit Scalaire dans l'Espace



avec norme et angle :	avec les coordonnées :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \times \lVert\vec{v}\rVert \times \cos\alpha$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

formules de polarisation :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2\right)$$

RAPPELS

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Calculer les coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$$

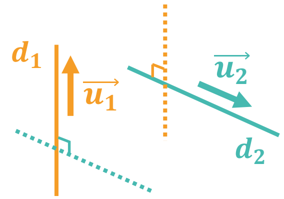
Norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Orthogonalité dans l'Espace

2 droites orthogonales

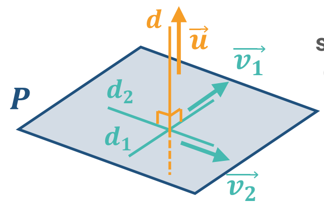
$d_1 \perp d_2$



$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = 0$

1 plan et 1 droite orthogonales

$P \perp d$



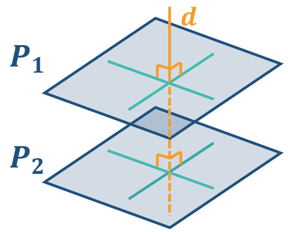
d_1 et d_2 2 droites sécantes du plan P, donc $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont non colinéaires.

$\vec{u}\cdot\vec{v_1} = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v_2} = 0$

2 plans parallèles

$P_1 \parallel P_2$



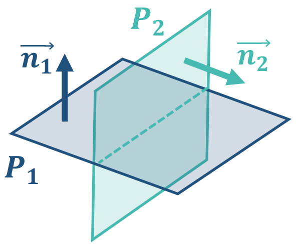
si $P_1 \perp d$

et $P_2 \perp d$

alors $P_1 \parallel P_2$

2 plans perpendiculaires

$P_1 \parallel P_2$



$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$

Galilee.ac

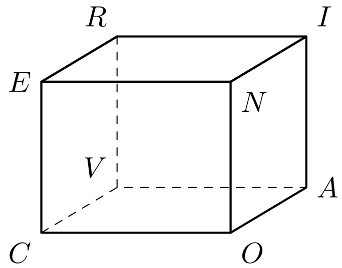
Exercice 1 (4 points)

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

On considère le pavé droit $COAVENIR$ tel que :
$CO = 5$, $CV = 3$ et $CE = 4$.

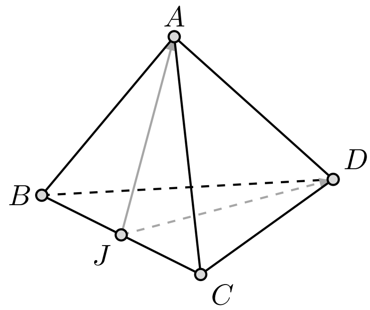
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO}$.



Partie B

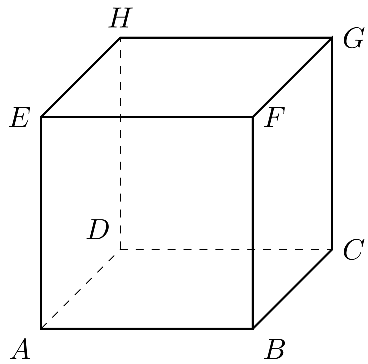
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a et J est le milieu de $[BC]$.

Calculer $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD}$ en fonction de a.



Exercice 2 (6 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$.



1. (a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
   (c) On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
   (c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Exercice 3 (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé où l'on considère :

- les points $A(2\,;\,-1\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ et $E(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. (a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   (c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2. (a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
   (d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide $ABCE$ est égal à $16,5$ unités de volume.