

Exercice 1. Applications linéaires

Soit f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, x - y + z)$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
- (b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de f .
- (c) En déduire si f est injective, surjective, bijective.
2. Mêmes questions avec :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad i : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longmapsto (x, 2x, 3x) \quad (x, y, z) \longmapsto x - 3y + 2z \quad P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1))$$

Exercice 2. Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est un endomorphisme de E et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 3. Isomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ (pour $n \geq 4$) et f, g les applications définies par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P' \quad \text{et} \quad g(P) = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)} = \sum_{i=0}^n P^{(i)}$$

1. Vérifier que f et g sont des endomorphismes de E .
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
En déduire que f est bijective et trouver f^{-1} .
3. Soit $Q(X) = 3X^2 + X - 6$.
Déterminer l'unique polynôme P de E tel que $f(P) = Q$.

Exercice 4. Application linéaire donnée par l'image d'une base

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
2. Déterminer si u est injectif. u peut-il être surjectif?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 5. Noyau ?

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}.$$

Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

Exercice 6. Dérivation

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\phi(f) = f'.$$

1. Déterminer $\text{Ker}(\phi)$.
2. Déterminer $\text{Im}(\phi)$.
3. Déterminer si ϕ est injective ou surjective.

Exercice 7. Composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g).$$

Exercice 8. Endomorphisme nilpotent et famille libre

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant

$$f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

Exercice 9. Quelques résultats théoriques

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f).$$

2. Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E.$$

Exercice 10. Fonctions paires et impaires

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P le sous-espace des fonctions paires et I le sous-espace des fonctions impaires. On a vu dans le TD n°20 que $E = P \oplus I$. Donner l'expression du projecteur sur P parallèlement à I .

Exercice 11. Projection dans $\mathbb{R}^3$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(x, y, z) = (x + z, y + z, 0).$$

Montrer que f est un projecteur et préciser son support et sa direction.

Exercice 12. Projection dans $\mathbb{R}^3$ (bis)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on définit $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 2, 3)$ et on pose

$$F = \text{Vect}(u, v) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(w).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
2. Donner l'expression de la projection p sur F parallèlement à G et de la projection q sur G parallèlement à F .