

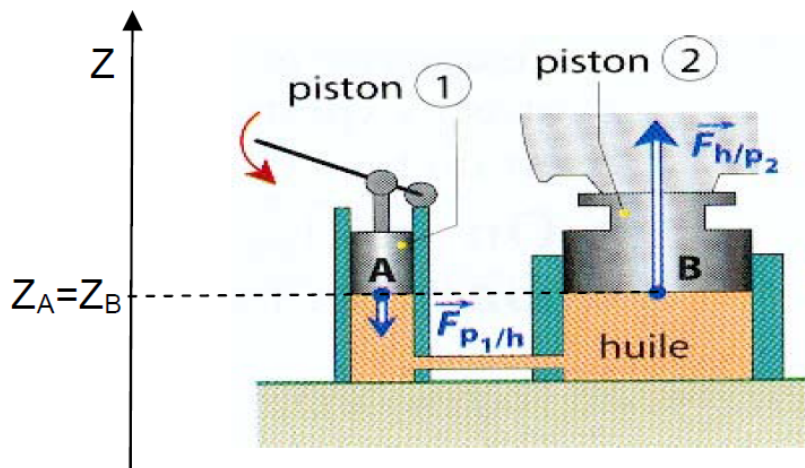
Corrigé du TD TH5 : Statique des fluides

Table des matières

1	Piston hydraulique	2
1.1	Pression P_A de l'huile au point A	2
1.2	Pression P_B de l'huile au point B	2
1.3	Calcul de $F_{h/P2}$	2
2	Baromètre de Huyghens	3
2.1	Expression de la hauteur barométrique H	3
2.2	Conservation des volumes	3
2.3	Sensibilité du baromètre de HUYGHENS	3
3	Bouchon d'évier	4
3.1	Condition sur h pour plaquer le bouchon au fond	4
4	Tube en U	4
4.1	Relations entre les pressions P_A , P_B et P_C	4
4.2	Relation entre h , H , ρ_1 et ρ_2	5
4.3	Calcul de la masse volumique ρ_2 de l'huile	5
5	Oscillations d'un bouchon de liège lesté	5
5.1	Relation liant h et les données de l'énoncé	5
5.2	Equation différentielle vérifiée par la cote $z(t)$	5
5.3	Période T des oscillations	6
6	Barrage	6
6.1	Cas d'une paroi plane	6
7	Résolution de problème : Face cachée de l'iceberg	7
7.1	Pourcentage immergé du volume total d'un iceberg	7
7.2	Volume occupé par l'iceberg fondu	7
8	Troposphère	7
8.1	Masse volumique $\rho(z)$ de l'air	7
8.2	Pression pour l'atmosphère isotherme	7
8.3	Calcul de H	8
8.4	Atmosphère à gradient de température	8
8.5	Calcul de λ	8
8.6	Pression dans l'atmosphère à gradient de T	8
8.7	Pression au sommet de l'EVEREST	9
9	Ascension d'un ballon sonde	9
9.1	Force ascensionnelle F_z	9
9.2	Condition de décollage du ballon	9
9.3	Altitude maximale atteinte par le ballon	9
9.4	Evolution de $n(z)$ lors de la phase d'échappement	10
9.5	Nouvelle expression de F_z	10

9.6 Altitude ultime atteinte z_2 10

1 Piston hydraulique

1.1 Pression P_A de l'huile au point A

La force $\vec{F}_{h/P1}$ exercée par l'huile sur le piston est une force de pression de la forme :

$$\vec{F}_{h/P1} = P_A S_1 \vec{u}_z$$

Le principe de l'action et de la réaction permet de déterminer la force $\vec{F}_{P1/h}$ exercée par le piston (1) sur l'huile :

$$\vec{F}_{P1/h} = -\vec{F}_{h/P1} = -P_A S_1 \vec{u}_z$$

On en déduit, en notant $\|\vec{F}_{P1/h}\| = F_{P1/h}$:

$$P_A = \frac{\|\vec{F}_{P1/h}\|}{S_1} = \frac{4F_{P1/h}}{\pi D_1^2} \quad \text{car} \quad S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$\Rightarrow P_A = \frac{4 \cdot 150}{\pi (10^{-2})^2} = 1,91 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 19,1 \text{ bar}$$

1.2 Pression P_B de l'huile au point B

Les deux surfaces S_1 et S_2 étant à la même altitude, la Relation Fondamentale de la Statique (RFS) des fluides, indique que :

$$P_B = P_A = 1,91 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 19,1 \text{ bar}$$

1.3 Calcul de $F_{h/P2}$

La force $\vec{F}_{h/P2}$ exercée par l'huile sur le piston est une force de pression de la forme :

$$\vec{F}_{h/P2} = P_B S_2 \vec{u}_z \Rightarrow F_{h/P2} = P_B S_2 \quad \text{avec} \quad P_B = P_A = \frac{F_{P1/h}}{S_1}$$

$$\Rightarrow F_{h/P2} = F_{P1/h} \cdot \frac{S_2}{S_1} = F_{P1/h} \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow F_{h/P2} = 150 \cdot \left(\frac{10^{-1}}{10^{-2}} \right)^2 = 15000 \text{ N}$$

2 Baromètre de Huyghens

2.1 Expression de la hauteur barométrique H

La RFS appliquée au mercure donne :

$$P(x_1) + \rho_1 g x_1 = \underbrace{P(x)}_{P_a} + \rho_1 g x \Rightarrow P(x_1) = P_a - \rho_1 g (x_1 - x)$$

La RFS appliquée à la glycérine donne :

$$P(x_1) + \rho_2 g x_1 = \underbrace{P(x_2)}_0 + \rho_2 g x_2 \Rightarrow P(x_1) = \rho_2 g (x_2 - x_1)$$

On écrit l'égalité des pressions dans le mercure et la glycérine en x_1 :

$$\begin{aligned} \underbrace{P_a - \rho_1 g (x_1 - x)}_{\text{dans Hg}} &= \underbrace{\rho_2 g (x_2 - x_1)}_{\text{dans la glycérine}} \\ \Rightarrow H = \frac{P_a}{\rho_1 g} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} (x_2 - x_1) + x_1 - x \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 Conservation des volumes

La variation du volume de mercure doit être nulle (fluide incompressible) :

$$dV_{Hg} = S dx + S_1 dx_1 = 0 \Rightarrow dx_1 = -\frac{S}{S_1} dx$$

La variation du volume de glycérine doit être nulle (fluide incompressible) :

$$dV_{gl} = -S_1 dx_1 + S_2 dx_2 = 0 \Rightarrow dx_2 = \frac{S_1}{S_2} dx_1 = -\frac{S}{S_2} dx$$

2.3 Sensibilité du baromètre de Huyghens

En différenciant l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(dx_2 - dx_1 \right) + dx_1 - dx \\ \Rightarrow dH &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(dx_2 - \frac{S_2}{S_1} dx_2 \right) + \frac{S_2}{S_1} dx_2 + \frac{S_2}{S} dx_2 \\ \Rightarrow dH &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) dx_2 + \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S} \right) dx_2 \\ \Rightarrow \frac{dx_2}{dH} &= \frac{1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) + \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S}} = \frac{1}{\frac{1050}{13600} \left(1 - \frac{0,25}{5} \right) + \frac{0,25}{5} + \frac{0,25}{50}} \approx 7,8 \end{aligned}$$

Ce baromètre est 7,8 fois plus sensible que le baromètre classique à mercure pour lequel $\frac{dx_2}{dH} = 1$.

3 Bouchon d'évier

3.1 Condition sur h pour plaquer le bouchon au fond

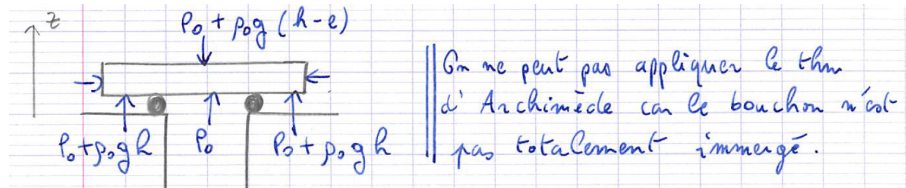
Le bouchon restera plaqué au fond si la résultante des forces qu'il subit est orientée vers le bas ($-\vec{u}_z$).

Il est soumis en l'occurrence à son poids :

$$\vec{P} = -\rho S e g \vec{u}_z$$

et aux forces de pression sur ses 3 faces (haut, bas, latérale).

En appliquant la RFSF dans l'eau, incompressible, on trouve rapidement les pressions au-dessus et en-dessous du bouchon, respectivement à des profondeurs $h - e$ et h , d'où le schéma suivant :



Sur les faces inférieure et supérieure, le bouchon est soumis à des pressions uniformes, on en déduit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{haut}} &= -(P_0 + \rho_0 g(h - e))S \vec{u}_z \\ \vec{F}_{\text{bas}} &= ((P_0 + \rho_0 g h)(S - S_0) + P_0 S_0) \vec{u}_z \\ &= (P_0 S - P_0 S_0 + \rho_0 g h(S - S_0) + P_0 S_0) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Les forces de pression sur la surface latérale s'annihilent par symétrie, et dans tous les cas n'ont pas de composante verticale.

Le bouchon reste plaqué au fond si la projection de la somme des forces suivant $\vec{u}_z$ est négative :

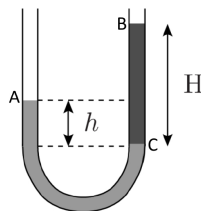
$$-\rho S e g - (P_0 + \rho_0 g(h - e))S + P_0 S + \rho_0 g h(S - S_0) < 0$$

$$-\rho S e g + \rho_0 g e S - \rho_0 g h S_0 < 0 \Leftrightarrow S e (\rho_0 - \rho) < \rho_0 h S_0 \Leftrightarrow h > \frac{S}{S_0} e \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

nb : cette condition est automatiquement réalisée si $\rho > \rho_0$, c'est-à-dire si le bouchon coule.

4 Tube en U

4.1 Relations entre les pressions P_A , P_B et P_C



L'huile étant moins dense, elle ne peut être qu'au dessus de l'eau, donc le point B est à la surface libre de droite.

Par continuité de la pression de part et d'autre d'une interface entre deux fluides au repos : $P_A = P_B = P_0$.

Poser un axe z ascendant. La RFSF donne pour l'eau et pour l'huile :

$$P_C = P_A + \rho_1 g h \quad \text{et} \quad P_C = P_B + \rho_2 g H$$

4.2 Relation entre h , H , ρ_1 et ρ_2

En réunissant les deux relations précédentes et grâce à $P_A = P_B = P_0$, on obtient :

$$\boxed{\rho_1 h = \rho_2 H}$$

4.3 Calcul de la masse volumique ρ_2 de l'huile

$$\boxed{\rho_2 = \rho_1 \frac{h}{H} = 1 \cdot \frac{18}{20} = 0,90 \text{ kg/L}}$$

5 Oscillations d'un bouchon de liège lesté

5.1 Relation liant h et les données de l'énoncé

◊ **Système** : On étudie le mouvement du centre de gravité du bouchon dans le référentiel $\mathcal{R}_g$ considéré galiléen.

◊ **Bilan des forces** :

- le poids : $\vec{P} = Mg \vec{u}_z$ avec $M = m + \rho_b HS$ la masse totale du bouchon lesté de hauteur totale H
- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_e h S g \vec{u}_z$ où h est la hauteur immergée du bouchon à l'équilibre

◊ **Principe fondamental de la statique** : le système n'étant pas en mouvement, on obtient

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0} \Leftrightarrow Mg - \rho_e h S g = 0 \Leftrightarrow \boxed{h = \frac{M}{\rho_e S} = \frac{m + \rho_b HS}{\rho_e S}}$$

5.2 Equation différentielle vérifiée par la cote $z(t)$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre de gravité du bouchon dans $\mathcal{R}_g$:

$$M \vec{a} = M \vec{g} - \rho_e S (h + z) \vec{g}$$

En projection suivant la verticale descendante :

$$M \ddot{z} = Mg - \rho_e S (h + z) g = \underbrace{Mg - \rho_e S h g}_0 - \rho_e S g z = -\rho_e S g z$$

$$\Leftrightarrow \rho_e S h \ddot{z} + \rho_e S g z = 0$$

$$\boxed{\ddot{z} + \underbrace{\frac{g}{h}}_{\omega_0^2} z = 0}$$

5.3 Période T des oscillations

On reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique non amorti de pulsation ω_0 telle que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Le bouchon oscille alors à la pulsation ω_0 : $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

La période des oscillations de cet oscillateur harmonique est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

6 Barrage

6.1 Cas d'une paroi plane

Lorsque la pression est homogène sur toute une surface S , en notant $\vec{n}$ la normale à la surface dirigée à l'opposé du fluide, la force de pression exercée par un fluide sur cette surface S est donnée par :

$$\vec{F}_{press} = PS\vec{n}$$

Si la pression n'est pas homogène, il faut faire la somme (intégrale) de toutes les forces élémentaires de pression s'exerçant sur chaque élément de surface dS :

$$\vec{F}_{press} = \iint_{M \in S} P(M) d\vec{S}_M = \iint_{M \in S} P(M) dS_M \vec{n}$$

Le point M est le point qui va parcourir toute la surface du barrage. L'intégrale nous permet de faire la somme de toutes les forces de pression s'exerçant sur chaque surface élémentaire dS_M pour toutes les positions possibles du point M sur la surface $\mathcal{S}$ considérée.

La pression au niveau de la paroi $\mathcal{S}_e$ en contact avec l'eau s'écrit :

$P(z) = P_a + \rho g z$ avec (Oz) axe vertical descendant et $z = 0$ au niveau de la surface de l'eau.

Le vecteur surface élémentaire s'écrit en un point $M \in \mathcal{S}_e$ est :

$$d\vec{S}_M = dy dz \vec{u}_x$$

On en déduit la résultante $\vec{F}_e$ des forces de pression s'exerçant sur la paroi $\mathcal{S}_e$ en contact avec l'eau :

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H (P_0 + \rho g z) dy dz \vec{u}_x \\ &= \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H P_0 dy dz \vec{u}_x + \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H \rho g z dy dz \vec{u}_x \\ &= \left(P_0 h L + \rho g L \frac{H^2}{2} \right) \vec{u}_x \end{aligned}$$

La résultante $\vec{F}_a$ des forces de pression s'exerçant sur la paroi $\mathcal{S}_a$ en contact avec l'air :

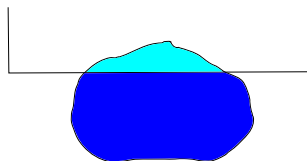
$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H P_0 \times (-dy dz \vec{u}_x) \\ &= - \int_{y=0}^L \int_{z=0}^H P_0 dy dz \vec{u}_x \\ &= -P_0 H L \vec{u}_x \end{aligned}$$

On en déduit la résultante de forces de pression sur l'ensemble du barrage :

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_e = \rho g L \frac{H^2}{2} \vec{u}_x$$

7 Résolution de problème : Face cachée de l'iceberg

7.1 Pourcentage immergé du volume total d'un iceberg



On note V le volume total de l'iceberg de masse m , V_i le volume de la partie immergée de l'iceberg et $x = \frac{V_i}{V}$.

L'iceberg étant à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0} \Rightarrow \rho_1 V g - \rho_2 V_i g = 0 \Rightarrow \rho_1 V = \rho_2 V_i$$

On en déduit le pourcentage de volume total de l'iceberg qui est immergé :

$$x = \frac{V_i}{V} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{0,92}{1,02} = 0,90 \quad \text{soit} \quad 90\%$$

7.2 Volume occupé par l'iceberg fondu

Une fois qu'il a entièrement fondu, l'iceberg s'est transformé en eau douce liquide qui occupe un volume V_f tel que :

$$V_f = \frac{m}{\rho_0} = \frac{\rho_1 V}{\rho_0} = \frac{\rho_2 V_i}{\rho_0} = 1,02 V_i$$

On voit que l'iceberg ne fait quasiment pas monter le niveau de la mer puisque le volume V_f qu'il occupe une fois fondu est quasiment égal au volume immergé V_i qu'il occupait avant de fondre. La fonte des glaces immergées ne fait donc pas monter le niveau des océans contrairement à la fonte des glaces émergées (ANTARCTIQUE, GROENLAND, glaciers).

8 Troposphère

8.1 Masse volumique $\rho(z)$ de l'air

Considérons un élément de fluide situé à l'altitude z et contenant δn moles d'air à la température T_0 , à la pression $P(z)$, de masse δm et occupant un volume $d\tau$, la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$P(z) d\tau = \delta n R T_0 = \frac{\delta m}{M} R T_0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\delta m}{d\tau}}_{\rho(z)} = \frac{P(z) M}{R T_0}$$

On remarque que la masse volumique $\rho(z)$ de l'air diminue quand la pression $P(z)$ diminue.

8.2 Pression pour l'atmosphère isotherme

L'équation locale de la statique des fluides donne :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{P(z)Mg}{RT_0} \Leftrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0 \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

$$\Rightarrow P(z) = A \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

or on suppose $P(0) = P_0$ connue, donc $P_0 = A$, au final :

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$$

8.3 Calcul de H

La grandeur H est homogène à une longueur, pour le calcul il faut penser à mettre M en unité SI ($\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

$$H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{8,314 \cdot 288}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 8,4 \cdot 10^3 \text{ m}$$

8.4 Atmosphère à gradient de température

La température $T(z) = T_0(1 - \lambda z)$ ne dépendant que de z , $\overrightarrow{\text{grad}} T$ a une seule composante non nulle sur (Oz) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T(z) = \frac{dT}{dz} \vec{u}_z = -\lambda T_0 \vec{u}_z$$

8.5 Calcul de λ

On donne :

$$T(z_1) = T_0(1 - \lambda z_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T(z_1)}{T_0} - 1 = -\lambda z_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{T_0 - T(z_1)}{T_0 z_1} = \frac{55}{288 \cdot 8807} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

On en déduit :

$$\frac{dT}{dz} = -\lambda T_0 = -6,2 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

soit une baisse de 6,2 K tous les 1000 m.

8.6 Pression dans l'atmosphère à gradient de T

L'équation locale de la statique des fluides donne :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{P(z)Mg}{RT(z)} = -\frac{P(z)Mg}{RT_0(1 - \lambda z)} = -\frac{P(z)}{H(1 - \lambda z)}$$

que l'on peut résoudre à l'aide d'une intégration à variables séparées :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{H} \frac{dz}{1 - \lambda z}$$

$$\Rightarrow \int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\int_0^z \frac{1}{H} \frac{dz}{1 - \lambda z}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right) = \frac{1}{\lambda H} \ln(1 - \lambda z)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = P(0) (1 - \lambda z)^{\frac{1}{\lambda H}}}$$

8.7 Pression au sommet de l'Everest

D'après la formule précédente :

$$P_1 = P(z_1) = 10^5 \left(1 - 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 8807\right)^{\frac{1}{2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 8400}} = 0,31 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

9 Ascension d'un ballon sonde

9.1 Force ascensionnelle F_z

On rappelle que $P(z)$, le volume $V(z)$ du ballon et ρ_{air} dépendent de l'altitude z , avec :

$$\rho_{air}(z) = \frac{P(z)M_{air}}{RT_0}$$

La résultante de force appliquée au ballon en projection sur (Oz) s'écrit :

$$F_z = \underbrace{-(m + nM_{H_2})g}_{\text{poids ballon+contenu}} + \underbrace{V(z)\rho_{air}(z)g}_{\text{poussée d'Archimède}}$$

or on a $V(z)\rho_{air}(z)g = \frac{nRT_0}{P(z)} \cdot \frac{P(z)M_{air}}{RT_0} \cdot g = nM_{air}g$ qui correspond bien à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé. Au final :

$$F_z = -(m + nM_{H_2})g + nM_{air}g = (n(M_{air} - M_{H_2}) - m)g$$

9.2 Condition de décollage du ballon

Le ballon pourra décoller si et seulement si :

$$F_z > 0 \Leftrightarrow n(M_{air} - M_{H_2}) > m \Leftrightarrow n > \frac{m}{M_{air} - M_{H_2}} = n_0$$

On calcule :

$$n_0 = \frac{50 \cdot 10^3}{29 - 2} = 1,85 \cdot 10^3 \text{ mol}$$

$$\text{et } V_0 = \frac{n_0 RT_0}{P_0} = \frac{1,85 \cdot 10^3 \cdot 8,314 \cdot 273}{10^5} = 42,0 \text{ m}^3$$

9.3 Altitude maximale atteinte par le ballon

Lors de la montée du ballon, la pression diminue donc le volume du ballon augmente car n et T_0 restent constants, le ballon n'éclate pas tant que :

$$V(z) < V_1 \Leftrightarrow \frac{nRT_0}{P(z)} < V_1 \text{ avec } P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{nRT_0}{P_0} \exp\left(\frac{z}{H}\right) < V_1 \Leftrightarrow \frac{nV_0}{n_0} \exp\left(\frac{z}{H}\right) < V_1$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{z}{H}\right) < \frac{n_0 V_1}{n V_0} \Leftrightarrow z < H \ln\left(\frac{n_0 V_1}{n V_0}\right) = z_1$$

9.4 Evolution de $n(z)$ lors de la phase d'échappement

Au dessus de l'altitude z_1 , la soupape impose $V(z) = V_1 = cst$ et la quantité de dihydrogène $n(z)$ diminue telle que :

$$P(z)V_1 = n(z)RT_0 \quad \Leftrightarrow \quad n(z) = \frac{P_0V_1}{RT_0} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

9.5 Nouvelle expression de F_z

On obtient lors de cette deuxième phase d'ascension pour $z > z_1$:

$$F_z(z) = \left(n(z) (M_{air} - M_{H_2}) - m \right) g = \left(n(z) \left(\frac{m}{n_0} \right) - m \right) g$$

$$\Rightarrow F_z(z) = mg \left(\frac{n(z)}{n_0} - 1 \right)$$

9.6 Altitude ultime atteinte z_2

L'altitude ultime atteinte z_2 est telle que :

$$F_z(z_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n(z_2) = n_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_0V_1}{RT_0} \exp\left(-\frac{z_2}{H}\right) = \frac{P_0V_0}{RT_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp\left(-\frac{z_2}{H}\right) = \frac{V_0}{V_1} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = H \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

On vérifie bien que $z_1 = H \ln\left(\frac{n_0V_1}{nV_0}\right) < z_2 = H \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ car $\frac{n_0}{n} < 1$