Épreuve de Bernoulli

1 Deux épreuves indépendantes

Définition : épreuves indépendantes

On dit que deux épreuves d'une expérience aléatoire sont **indépendantes** si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre (ou n'influe pas le résultat de l'autre).

Exemple

- On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique non truqué. Les deux lancers sont indépendants. La face obtenue au premier lancer n'aura aucune incidence sur le second lancer.
- Un appareil ménager peut présenter deux types de défaut de façon aléatoire.
  Un défaut visuel (V) et un défaut de fonctionnement (F). Il s'agit de deux évènements indépendants.

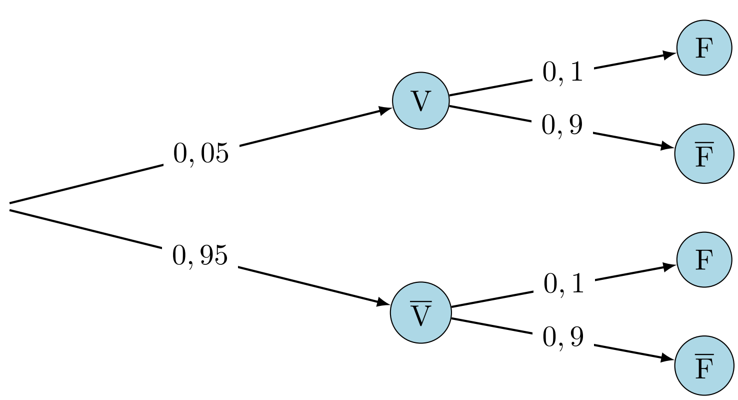
Remarques

Ce genre de situation peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré. Sur chaque branche de l'arbre, on fait apparaître la probabilité de l'évènement.

Les probabilités issues de chaque branche d'un même chemin se multiplient.

Exemple : utiliser un arbre pondéré (début)

Un appareil ménager peut présenter deux types de défaut de façon aléatoire. La probabilité qu'il ait un défaut visuel (V) est de 0,05 et la probabilité qu'il ait un défaut de fonctionnement (F) est de 0,1.
On sélectionne au hasard un de ces appareils ménagers et on veut calculer la probabilité qu'il présente un défaut visuel sans présenter un défaut de fonctionnement.
On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Exemple : utiliser un arbre pondéré (fin)

On chercher $P(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}})$.
Il faut donc regarder le deuxième chemin de l'arbre $P(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}}) = 0,05 \times 0,9 = 0,045$.
La probabilité que l'appareil présente un défaut visuel sans présenter un défaut de fonctionnement est donc de 4,5%.

2 Épreuves de Bernoulli

Définition : épreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire à deux issues. L'une est nommé **succès** de probabilité $p \in [0\,;\,1]$ et l'autre est nommée **échec** de probabilité $1-p$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on note S : « Obtenir pile » et E : « Obtenir face ».
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

Définition : Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. On note p la probabilité du succès.
On dit que X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p ou que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
La loi de probabilité suivie par X est la suivante :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance $E(X)$ est alors :

$$E(X) = p$$

Exemple

Jean-Kevin joue à un jeu. Il lance un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6. S'il obtient 5, il gagne. Sinon, il perd.
On note X la variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli. Le succès S est « Obtenir la face portant le numéro 5 » a une probabilité de réalisation de $\dfrac{1}{6}$.

On a donc $p = \dfrac{1}{6}$ et $1 - p = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$. La loi de probabilité de X est donc :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

L'espérance de cette variable aléatoire X est $E(X) = p = \dfrac{1}{6}$.

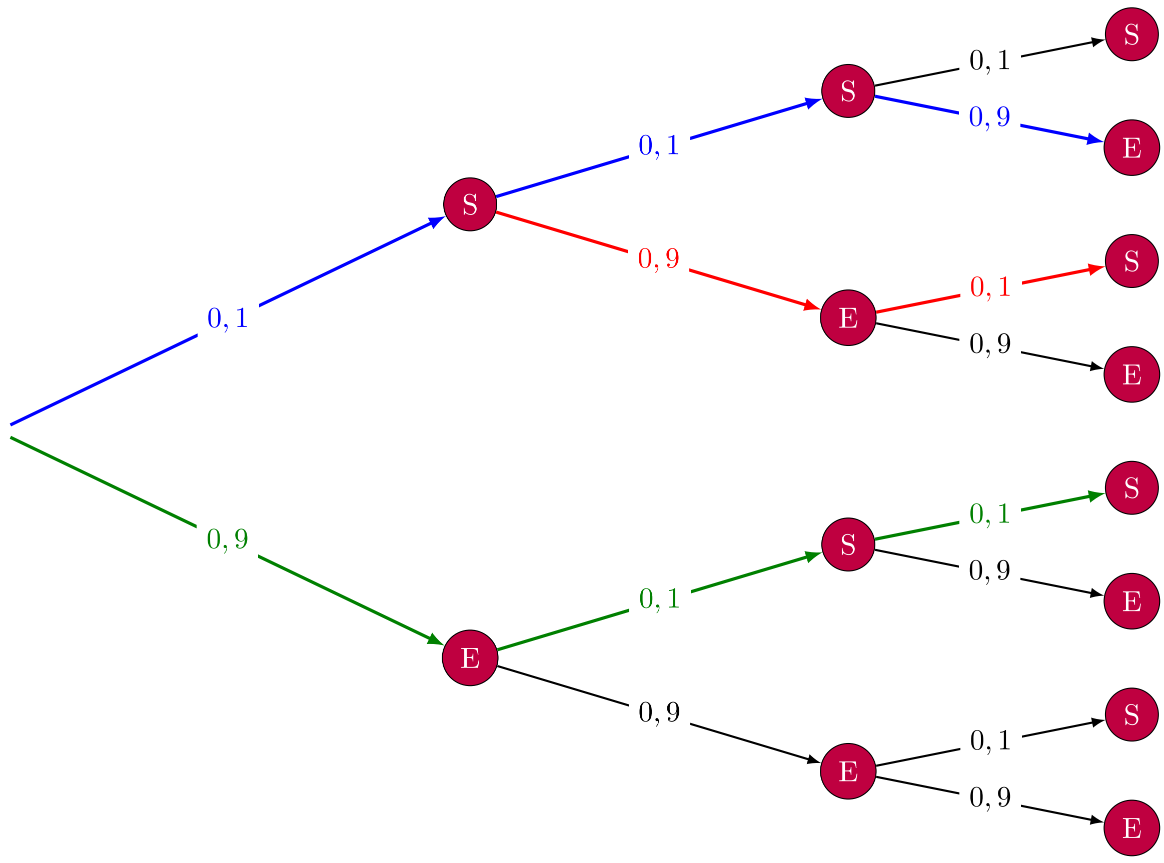
Cela signifie que la probabilité que Jean-Kevin gagne est de $\dfrac{1}{6}$.

Remarque

Il est possible de représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli afin de calculer des probabilités.

Exemple

Jean-Kevin joue à une roue de casino où la probabilité de gagner S est de 10%.
Il joue trois fois de suite de façon identique et indépendante à ce jeu. Il chercher à connaître la probabilité de gagner exactement deux fois.



Les chemins qui correspondent à la situation ont été mis en évidence et coloriés en bleu, rouge et vert. Il y a donc trois chemins.

Probabilité du chemin bleu : $0,1 \times 0,1 \times 0,9 = 0,009$
Probabilité du chemin rouge : $0,1 \times 0,9 \times 0,1 = 0,009$
Probabilité du chemin vert : $0,9 \times 0,1 \times 0,1 = 0,009$

$0,009 + 0,009 + 0,009 = 0,027$

La probabilité que Jean-Kevin gagne exactement deux fois est donc de 0,027 soit 2,7%.

Répétitions d'épreuves indépendantes

> Utiliser un arbre de probabilités

Exercice n°1 On lance trois fois de suite une pièce de monnaie non truquée.

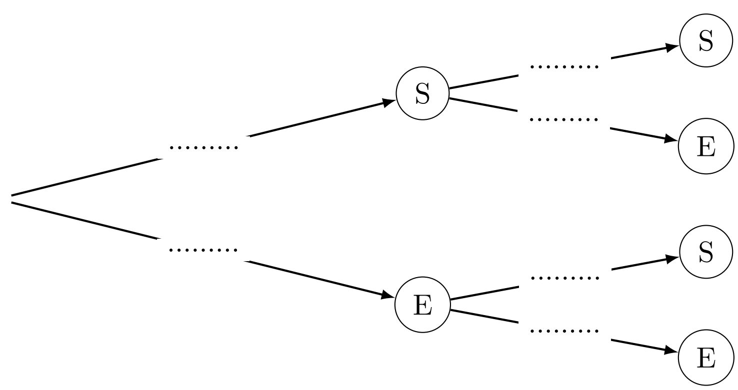
On considère les évènements suivants : P = ≪ On obtient pile ≫ et F = ≪ On obtient face ≫.

1. Donner, à l'aide d'un arbre, la liste des 8 issues possibles de cette expérience.
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois face ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois face ?

Exercice n°2

Une entreprise possède un stock contenant des pièces métalliques. Parmi elles, 5% sont défectueuses.
Dans ce stock, on prélève, avec remise, deux pièces.
On note S = ≪ la pièce est défectueuse ≫ et E = ≪ la pièce est correcte ≫.

1. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune pièce défectueuse ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses ?

Exercice n°3 On lance un dé à 10 faces, non truqué et numéroté de 1 à 10. On souhaite obtenir la face 6.

On lance trois fois de suite ce dé.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité d'obtenir à chaque fois le 6.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le 6 ?
4. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir le 6 ?

Exercice n°4 Jean-Kevin joue à un jeu dans un casino.

Il peut gagner 5€ ou 20€ mais peut aussi perdre 10€.
On a relevé le nombre de fois où l'on obtient ces gains sur deux machines différentes dans le tableau ci-contre :

	Gain + 5€	Gain + 10€	Gain −10€	Total
Machine 1	20	10	70	100
Machine 2	100	100	200	400

1. Donner la probabilité de chaque gain pour chaque machine utilisée.
2. Jean-Kevin joue sur la machine 1 puis sur la machine 2.
   (a) À l'aide d'un arbre pondéré, indiquer les sommes que Jean-Kevin peut obtenir.
   (b) Déterminer la probabilité que Jean-Kevin gagne exactement 40€.
   (c) Quelle est la probabilité que Jean-Kevin perde 20€ ?
   (d) Quelle est la probabilité que Jean-Kevin perde 10€ ?
   (e) Déterminer la probabilité que Jean-Kevin obtienne un gain négatif.

Exercice n°5 Dans une urne, il y a 20 jetons : 3 rouges, 7 jaunes et 10 bleus.

Jean-Kevin prend au hasard un jeton de cette urne, deux fois de suite avec remise.

À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité que Jean-Kevin obtienne au moins une fois le jeton rouge.

Exercice n°6

Jean-Kevin dispose d'un grand coffre contenant énormément de petites briques soit bleues soit rouges. La proportion de briques bleues est de 40%. Il prend 4 briques de ce coffre au hasard. On assimile cela à un tirage successif avec remise.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que Jean-Kevin obtienne exactement 4 briques bleues ?
3. Déterminer la probabilité que Jean-Kevin obtienne 2 briques bleues puis 2 briques rouges.
4. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu au plus une brique rouge ?

Exercice n°7 Un club de sport a réalisé une enquête de satisfaction de ses clients.

Il ressort que la probabilité qu'un client soit satisfait de ce club est de 0,9.
À la sortie de ce club, on interroge au hasard et successivement 4 adhérents.

1. Quelle est la probabilité que les 4 clients soient satisfaits ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un client soit satisfait ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus 2 clients ne soient pas satisfaits ?

Exercice n°8 On considère le programme Python ci-dessous.

1. Que permet de faire ce programme ?
2. Combien de lancers ont été simulés ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le 5 avec ce programme ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le 5 ?

```
from random import*
def lancer():
    for k in range(4):
        r=randint(1,6)
    print (r)
```