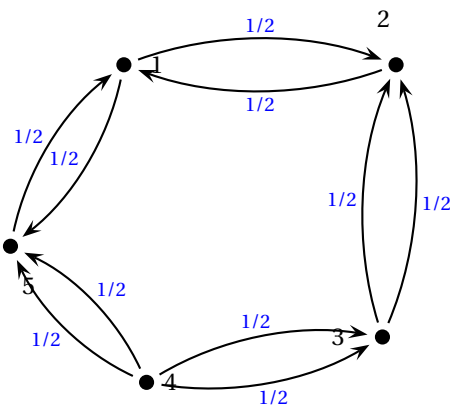


Graphes probabilistes (Chaîne de Markov) Chapitre 11

Corrections exercices types

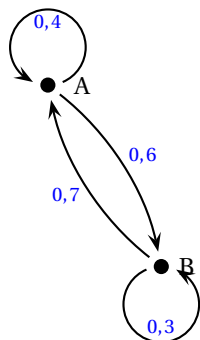
Exercice 1. exo 11-1 On considère un pentagone régulier dont les sommets sont numérotés de 1 à 5. Un promeneur saute à chaque instant d'un sommet à l'un de ses voisins de manière équiprobable. Représenter le graphe probabiliste associé ainsi que sa matrice de transition.



La matrice de transition M associée à ce graphe probabiliste est donc : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. exo 11-2 On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Graphe associé à cette matrice :



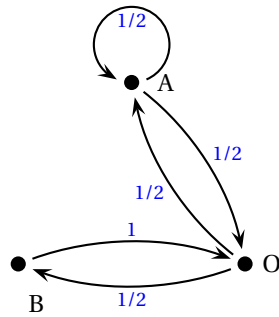
Exercice 3. exo 11-3 On considère un mobile qui se déplace par sauts sur les points O, A, B selon la règle suivante :

- S'il est en O à l'instant n , il sera de façon équiprobable, soit en A , soit en B à l'instant $n + 1$.
- S'il est en A à l'instant n , il retourne de façon équiprobable, soit en O , soit il reste en A à l'instant $n + 1$.
- S'il est en B à l'instant n , il passe en O à l'instant $n + 1$ avec la probabilité 1 (le point B est dit « réfléchissant »).

On dit que le mobile est dans l'état 1 s'il se trouve en A , dans l'état 2 s'il se trouve en O et dans l'état 3 s'il se trouve en B . On notera, pour tout entier naturel n , X_n l'état dans lequel se trouve le mobile à l'instant n .

On admet que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène.

1. Graphe associé à cette situation :



2. La matrice de transition associée est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. exos 11-4 On continue l'étude de la chaîne de Markov de l'exercice 3. Déterminons les états stables possibles.

Déterminons par le calcul un état stable pour une chaîne de Markov dont la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'état stable est le vecteur V défini par : tV est le vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 (il est unique car tous les termes de la matrice M sont strictement positifs).

On cherche donc le sous-espace propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 :

on résout avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$({}^tM - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1/2x + 1/2y = 0 \\ 1/2x - y + z = 0 \\ 1/2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2z \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$, mais on veut $x + y + z = 1$, ce qui donne $z = 1/5, x = y = 2/5$ d'où il y a un état stable donné par le vecteur $V = (2/5 \ 2/5 \ 1/5)$.

Mais on peut aussi chercher le vecteur ligne $\pi = (x \ y \ z)$ stochastique ($x + y + z = 1$) tel que $\pi M = \pi$.

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x/2 + y/2 = x \\ x/2 + z = y \\ y/2 = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2z \\ x = y \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2/5, z = 1/5.$$

Donc $\pi = (2/5 \ 2/5 \ 1/5)$.

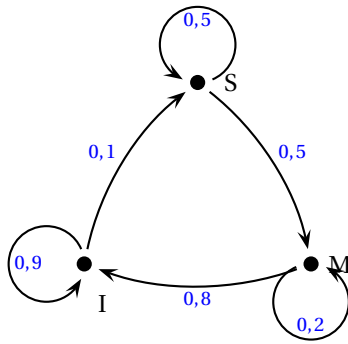
Exercice 5. exo 11-5

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).

D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S , il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Graphe probabiliste pour décrire cette situation :



Matrice de transition : $U = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

2. Soit (X_n) une chaîne de Markov à 3 états (I, M, S) et $U = (p_{i,j})$ sa matrice de transition alors d'après la FPT :

$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^3 P(X_n = i) p_{i,j}$ ce qui se traduit matriciellement par : si on note P_n le n -ième état probabiliste de la chaîne : $P_{n+1} = P_n \times U$.

Puis on montre facilement par récurrence que $P_n = P_0 \times U^n$.

On s'aidera de Python pour les calculs de puissances de matrices.

Calculons l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, d'un an, de 2 ans pour chacune des situations suivantes :

— au départ, il est immunisé : $P_0 = (1 \ 0 \ 0)$.

On a $P_3 = P_0 \times U^3 = (0,769 \ 0,08 \ 0,151)$

$P_{12} = P_0 \times U^{12} = (0,754719 \ 0,0943382 \ 0,150943)$

$P_{24} = P_0 \times U^{24} = (0,754717 \ 0,0943396 \ 0,150943)$

— au départ, il est non malade et non immunisé : $P_0 = (0 \ 0 \ 1)$ On a $P_3 = P_0 \times U^3 = (0,64 \ 0,195 \ 0,165)$

$P_{12} = P_0 \times U^{12} = (0,754705 \ 0,0943466 \ 0,150948)$

$P_{24} = P_0 \times U^{24} = (0,754717 \ 0,0943396 \ 0,150943)$

— au départ, il est malade : $P_0 = (0 \ 1 \ 0)$

On a $P_3 = P_0 \times U^3 = (0,824 \ 0,048 \ 0,128)$

$P_{12} = P_0 \times U^{12} = (0,754719 \ 0,09434 \ 0,150941)$

$P_{24} = P_0 \times U^{24} = (0,754717 \ 0,0943396 \ 0,150943)$

3. On note $(i \ m \ s)$ l'état stable du système. Déterminons les états stables possibles.

L'état stable est le vecteur V défini par : tV est le vecteur propre de tU associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 (il est unique car tous les termes de la matrice U sont strictement positifs).

On cherche donc le sous-espace propre de tU associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 :

on résout avec $X = \begin{pmatrix} i \\ m \\ s \end{pmatrix}$

$$({}^tU - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1i + 0,8m = 0 \\ -0,8m + 0,5s = 0 \\ 0,1i - 0,5s = 0 \\ i + m + s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = 8m = 5s \\ i + m + s = 1 \end{cases}.$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} 5s \\ 5/8s \\ s \end{pmatrix}$, mais on veut $i + m + s = 1$, ce qui donne $s = 8/53, i = 40/53, m = 5/53$ d'où il y a un

état stable donné par le vecteur $V = (40/53 \ 5/53 \ 8/53)$.

Mais on peut aussi chercher le vecteur ligne $\pi = (i \ m \ s)$ stochastique ($i + m + s = 1$) tel que $\pi U = \pi$.

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 0,9i + 0,8m = i \\ 0,2m + 0,5s = m \\ 0,1i + 0,5s = s \\ i + m + s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1i = 0,8m \\ 0,1i = 0,5s \\ 0,5s = 0,8m \\ i + m + s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow i = 40/53, m = 5/53, s = 8/53.$$

Donc $\pi = (40/53 \ 5/53 \ 8/53)$.

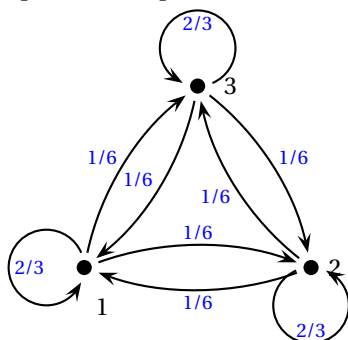
Exercice 6. exo 11-6

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :

- Le mobile se trouve sur le point A à l'instant 0.
- Si à l'instant n , il est sur l'un quelconque des sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets et ceci avec la même probabilité.

1. Dessinons le graphe probabiliste associé à cette chaîne (on notera 1 l'état correspondant au sommet A , 2 celui correspondant au sommet B et 3 celui correspondant au sommet C).

Graphe probabiliste pour décrire cette situation :



2. Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

On remarque que M est symétrique donc diagonalisable.

3. On donne $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On a par calcul direct $PQ = 3I$, par conséquent P est inversible et $P^{-1} = 1/3Q = 1/3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Par calcul direct, on a : $P^{-1}MP = \text{diag}(1/2, 1/2, 1) = D$ matrice diagonale.

Ce n'est pas étonnant car on a dit que M était diagonalisable.

(c) On montre ensuite par récurrence que pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP^{-1}$. (à vous de le faire).

Ainsi on a pour tout entier naturel n :

$$M^n = 1/3 \begin{pmatrix} 1 + 2(1/2)^n & 1 - (1/2)^n & 1 - (1/2)^n \\ 1 - (1/2)^n & 1 + 2(1/2)^n & 1 - (1/2)^n \\ 1 - (1/2)^n & 1 - (1/2)^n & 1 + 2(1/2)^n \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout entier naturel n , déterminons le n^e état probabiliste V_n .

On sait d'après le cours que le n^e état probabiliste V_n vérifie :

$$V_n = V_0 M^n \text{ avec } V_0 = (1 \ 0 \ 0) \text{ (car le mobile est en A).}$$

$$\text{Ainsi } V_n = 1/3 (1 + 2(1/2)^n \quad 1 - (1/2)^n \quad 1 - (1/2)^n)$$

5. Comme $1/2 \in]0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/2)^n = 0$, par conséquent les composantes de V_n ont pour limites respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

On a $1/3 > 0$ et $3 \times 1/3 = 1$, puis en notant $\pi = (1/3 \ 1/3 \ 1/3)$ on voit que : $\pi M = \pi$ donc π est un état stable de la chaîne.

Exercice 7. exo 11-7 Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

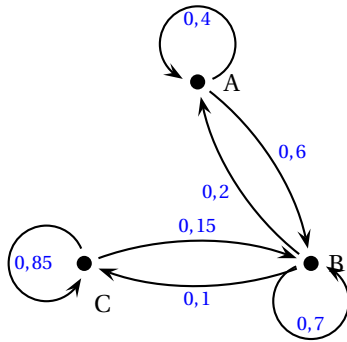
On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. On a d'après l'énoncé : $P_0 = (0,2 \ 0,7 \ 0,1)$.
2. Graphe probabiliste pour décrire cette situation :



3. Matrice M de transition associée à ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

4. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \quad R = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}\right) \quad T = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5} \quad 0\right)$$

On pourrait calculer les produits QM, RM, TM et les comparer respectivement à Q, R, T ou bien chercher l'état stable.

L'état stable est le vecteur V défini par : tV est le vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 (il est unique car tous les termes de la matrice M sont strictement positifs).

On cherche donc le sous-espace propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 :

on résout avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$({}^tM - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,6x + 0,2y = 0 \\ 0,6x - 0,3y + 0,15z = 0 \\ 0,1y - 0,15z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y = 3/2z \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 2x \end{pmatrix}$, mais on veut $x + y + z = 1$, ce qui donne $x = 1/6, y = 1/2, z = 1/3$ d'où il y a un état stable

donné par le vecteur $V = (1/6 \ 1/2 \ 1/3) = R$.

Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est donc correcte. (car $y = 1/2$)

Exercice 8. exo 11-8

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles

ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;

b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;

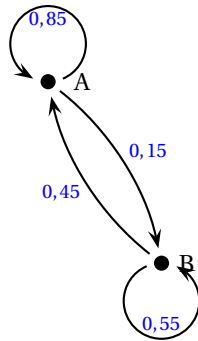
P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année n .

Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B.

D'où l'état initial $P_0 = (a_0 \ b_0) = (0,6 \ 0,4)$ ($1500/2500 = 0,6$, $1000/2500 = 0,4$).

2. (a) Graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.



- (b) Matrice de transition M de ce graphe. $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

- (c) Déterminons le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année n .

P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année n .

On sait alors que $P_n = P_0 \times M^n$.

Il nous faut donc trouver M^n .

Pour ce faire, on cherche à diagonaliser M .

On trouve $\text{sp}(M) = \{1; 0,4\}$ et $E_1(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{0,4}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$. (vérifier tous ces résultats)

La concaténation des bases des sous-espaces propres de M donne une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 2. Donc c'est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc M est diagonalisable, on a donc P inversible et D diagonale telles que :

$$M = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On trouve } P^{-1} = 1/4 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prouve ensuite par récurrence (à vous de le faire) que pour tout entier naturel n : $M^n = PD^nP^{-1}$.

On trouve finalement que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4(0,4)^n & 1/4 - 1/4(0,4)^n \\ 3/4 - 3/4(0,4)^n & 1/4 + 3/4(0,4)^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent pour tout entier naturel n :

$$P_n = (0,6 \ 0,4) M^n = (-0,15 \times (0,4)^n + 0,75 \quad 0,15 \times (0,4)^n + 0,25).$$

Ainsi pour tout entier naturel n :

$$a_n = -0,15 \times (0,4)^n + 0,75 \text{ et } b_n = 0,15 \times (0,4)^n + 0,25$$

3. L'état stable est le vecteur V défini par : tV est le vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 (il est unique car tous les termes de la matrice M sont strictement positifs).

On cherche donc le sous-espace propre de tM associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 :

$$\text{on résout avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$({}^tM - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,15x + 0,45y = 0 \\ 0,15x - 0,45y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix}$, mais on veut $x + y = 1$, ce qui donne $x = 3/4$ d'où il y a un état stable donné par le vecteur

$$V = (3/4 \ 1/4).$$

Ce qui signifie que l'abonnement A sera choisie par 75% des personnes au bout d'un certain temps et que l'abonnement B sera choisie par 25% des personnes.

NB : on voit aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,75$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0,25$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,4)^n = 0, 0 < 0,4 < 1$.

Ce qui corrobore nos résultats.

NB : on aurait pu aussi chercher le vecteur ligne $\pi = (x \ y)$ stochastique ($x + y = 1$) tel que $\pi M = \pi$.

Exercice 9. exo 11-9

Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.

- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.
 - S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1. Soit n un entier naturel, on note :

s_n la probabilité pour que le jour n , il fasse sec ;

h_n la probabilité pour que le jour n , il fasse humide ;

T_n la matrice $(s_n \ h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n .

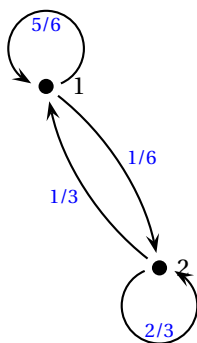
Alors on a la relation $s_n + h_n = 1$.

2. (a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.

L'énoncé dit : nous sommes dimanche et il fait sec, donc $s_0 = 1, h_0 = 0$.

Ainsi : $T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.



(c) La matrice de transition M de ce graphe est : $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. (a) Par calcul direct : $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Si $n = 0$ correspond à dimanche, alors $n = 2$ correspond à mardi.

On sait d'après le cours que le n^e état probabiliste T_n vérifie :

$T_n = T_0 M^n$ avec $T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La situation météorologique le mardi suivant est donc donnée par : $T_2 = T_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

On aura 75% de chances qu'il fera sec le mardi suivant et donc 25% de chances qu'il fera humide.

4. (a) Déterminons l'état stable associé à l'évolution météorologique.

L'état stable est le vecteur V défini par : ${}^t V$ est le vecteur propre de ${}^t M$ associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 (il est unique car tous les termes de la matrice M sont strictement positifs).

On cherche donc le sous-espace propre de ${}^t M$ associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 :

on résout avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

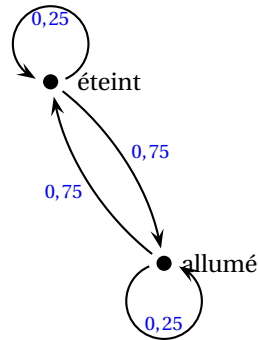
$$({}^t M - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1/6x + 1/3y = 0 \\ 1/6x - 1/3y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$, mais on veut $x + y = 1$, ce qui donne $x = 2/3, y = 1/3$ d'où il y a un état stable donné par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(b) Ce qui signifie, à long terme, que la probabilité qu'il pleuve un certain jour est de $1/3$.

Exercice 10. exo 11-10 L'allumeur de réverbères Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

1. Graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.



2. La matrice de transition M de ce graphe est : $\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$.

Par calcul direct on a : $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Par calcul direct, on a : $N^2 = N$, $R^2 = R$, $NR = 0$ et $RN = 0$.

De là, par récurrence immédiate, on voit que $N^n = N$, $R^n = R$.

On a pour n entier naturel, $M^n = (N - 0,5R)^n$, comme N et R commutent, d'après la formule du binôme :

$$\text{pour } n \text{ entier naturel, } M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (-0,5R)^{n-k} = \binom{n}{0} (-0,5R)^n + \binom{n}{n} N^n = (-0,5)^n R + N = \begin{pmatrix} 0,5(1 + (-0,5)^n) & 0,5 + (-0,5)^{n+1} \\ 0,5 + (-0,5)^{n+1} & 0,5(1 + (-0,5)^n) \end{pmatrix}.$$

4. Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculer la probabilité p_n (respectivement p'_n) que le réverbère soit allumé. (respectivement éteint) au n -ième matin.

On sait d'après le cours que le n^e état probabiliste P_n vérifie :

$$P_n = P_0 M^n \text{ avec } P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (car au jour 0, le réverbère est éteint).}$$

$$\text{Puis } P_n = \begin{pmatrix} p'_n & p_n \end{pmatrix}.$$

D'après la question 3, on a alors $p'_n = 0,5(1 + (-0,5)^n)$, $p_n = 0,5 + (-0,5)^{n+1}$.

5. On constate que sur une durée de 6 jours, pour une population de 500 réverbères, une stabilisation assez rapide de la situation suivante : un réverbère sur 2 est allumé.

On voit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p'_n = 0,5$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,5)^n = 0$, car $-1 < -0,5 < 0$. On sait que la loi limite est un état stable de la chaîne, donc le fait qu'un réverbère sur 2 soit allumé correspond bien à cet état stable.