

Correction Concours blanc n°2 type ESSEC II 2017

PROBLEME.

ESSEC II, option économique

Etudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociale.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).
2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.
3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

1 Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2)$.

On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, continues et convexes sur $[0, 1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E , on note $\tilde{f}$ l'application associée à f , définie sur $[0, 1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose enfin $I(f) = 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f .

1. (a) La définition d'une fonction convexe sur J signifie que sur tout segment $[t_1, t_2]$ de J , l'image de tout point du segment $[t_1, t_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$.
(b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, f est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si sa dérivée est croissante sur $[0, 1]$.
2. (a) D'après l'énoncé, $\tilde{f}$ est concave si $-\tilde{f} : t \mapsto f(t) - t$ est convexe.
Montrons que $-\tilde{f}$ est convexe :
 $\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, \forall \lambda \in [0, 1],$

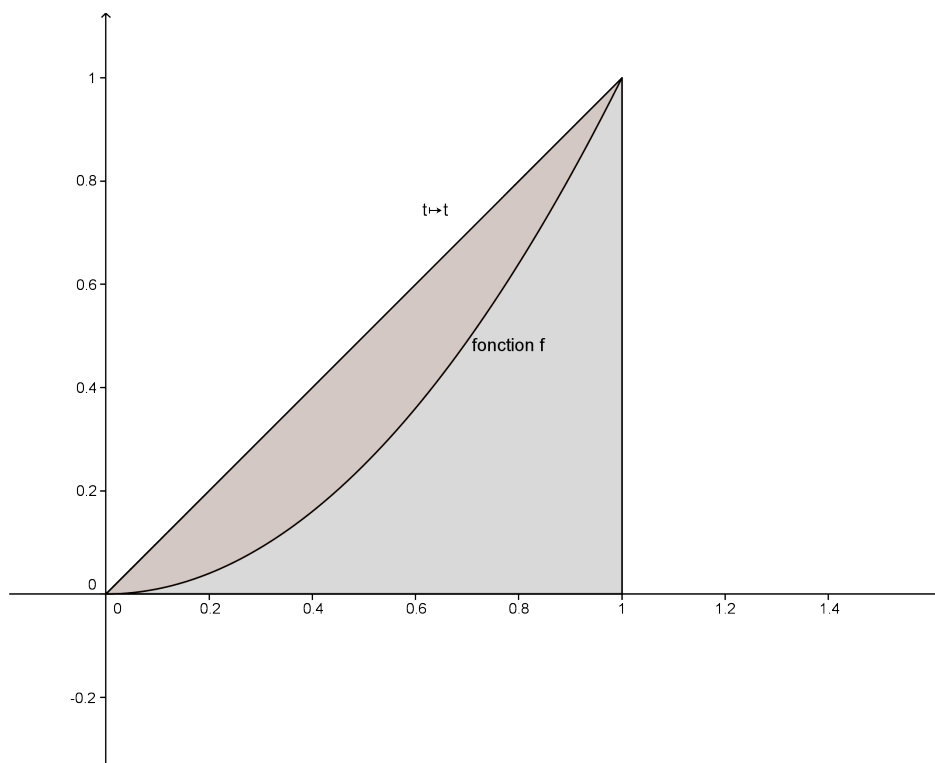
$$\begin{aligned}
 -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \\
 &\stackrel{\text{car } f \text{ est convexe}}{\leq} \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2) - \lambda t_1 - (1 - \lambda)t_2 \\
 &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1 - \lambda)(f(t_2) - t_2) \\
 &= \lambda \cdot (-\tilde{f}(t_1)) + (1 - \lambda) \cdot (-\tilde{f}(t_2))
 \end{aligned}$$

Ainsi, $-\tilde{f}$ est bien convexe i.e. $\tilde{f}$ est concave.

- (b) Toutes les fonctions intervenant dans le calcul sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc y admettent une intégrale; et par linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$:

$$I(f) = 2 \left(\int_0^1 t dt - \int_0^1 f(t) dt \right) = 2 \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt$$

- (c) On remarque dans le calcul précédent que $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \iff 2 = \frac{1}{\int_0^1 t dt}$. Ainsi, $I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt = \frac{\int_0^1 (t - f(t)) dt}{\int_0^1 t dt}$ est la proportion de l'aire entre la courbe de f et la première bissectrice dans l'aire entre l'axe des abscisses et la première bissectrice sur le segment $[0, 1]$.



3. Un premier exemple.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- (a) — $\forall t \in [0, 1], t^2 \in [0, 1]$ donc f est bien définie sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$ et en particulier $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
 — f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ comme fonction polynômiale. En particulier, elle est bien continue et de classe C^1 et $f''(t) = 2 \geq 0$ donc f' est croissante. f est bien convexe.
 f est bien un élément de E

(b) $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 t^2 dt = 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Propriétés de l'indice de Gini.

- (a) Montrons que $\tilde{f} \geq 0$ sur $[0, 1]$:
 Comme l'énoncé donne les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$, $\forall t \in [0, 1]$, appliquons l'inégalité de convexité avec $t_1 = 1, t_2 = 0$ et $\lambda = t$:

$$f(t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0) \leq t \cdot f(1) + (1 - t) \cdot f(0) \iff f(t) \leq t \iff t - f(t) \geq 0$$

Ainsi, $\forall t \in [0, 1] \tilde{f}(t) \geq 0$ et par croissance des bornes, $\int_0^1 \tilde{f}(t) dt \geq 0$ donc $I(f) \geq 0$.

- (b) $I(f) = 0 \iff \int_0^1 \tilde{f}(t) dt = 0 \iff \forall t \in [0, 1], \tilde{f}(t) = 0$ car $\tilde{f}$ est continue et positive sur $[0, 1]$.
 Ainsi, $I(f) = 0 \iff \forall t \in [0, 1], f(t) = t$.

- (c) Pour tout f élément de E , f est continue et positive et $f \neq 0$ (car $f(1) = 1$) donc $\int_0^1 f(t) dt > 0$. Ainsi,
 $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt < 1$.

- (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n$.

i. $I(f_n) = 1 - 2 \int_0^1 t^n dt = 1 - 2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{n+1}$.

- ii. — *Méthode 1* : La question précédente donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = 1$. Donc, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = 1 - A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $1 - \varepsilon < I(f_n) < 1 + \varepsilon$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \geq N$, $I(f_n) > 1 - \varepsilon = A$.
 Donc $f = f_N$ convient.

— Méthode 2 : Cherchons les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $I(f_n) > A$:

$$I(f_n) > A \iff 1 - \frac{2}{n+1} > A \iff \frac{2}{n+1} < 1-A \iff \frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A}, \text{ car } 1-A > 0, \iff n > \frac{2}{1-A} - 1 \iff n \geq \left\lceil \frac{2}{1-A} \right\rceil.$$

En posant $N = \left\lceil \frac{2}{1-A} \right\rceil$, alors $f = f_N$ convient.

5. Minoration de l'indice de Gini

- (a) $f \in E$ donc f est continue sur $[0, 1]$ et $t \mapsto t$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\tilde{f}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes donc il existe t_0 dans $]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$.
- (b) On remarque que $t = \frac{t}{t_0} \cdot t_0 = \frac{t}{t_0} \cdot t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}) \cdot 0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 0$ et $\lambda = \frac{t}{t_0} \in [0, 1]$ car $t \in [0, t_0]$, on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t}{t_0} \cdot t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}) \cdot 0\right) \geq \frac{t}{t_0} \cdot \tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t}{t_0}) \cdot \underbrace{\tilde{f}(0)}_{=0-\tilde{f}(0)=0} = \frac{t}{t_0} \cdot \tilde{f}(t_0)$$

- (c) On remarque que $t = \frac{t-1}{t_0-1} \cdot (t_0-1) + 1 = \frac{t-1}{t_0-1} \cdot t_0 - \frac{t-1}{t_0-1} + 1 = \frac{t-1}{t_0-1} \cdot t_0 + 1 - \frac{t-1}{t_0-1}$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 1$ et $\lambda = \frac{t-1}{t_0-1} \in [0, 1]$ car $t \in [t_0, 1]$ donc $t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ donc en multipliant par $\frac{1}{t_0-1} < 0$, on a : $1 \geq \frac{t-1}{t_0-1} \geq 0$; on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t-1}{t_0-1} \cdot t_0 + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}) \cdot 1\right) \geq \frac{t-1}{t_0-1} \cdot \tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}) \cdot \underbrace{\tilde{f}(1)}_{=1-\tilde{f}(1)=0} = \frac{t-1}{t_0-1} \cdot \tilde{f}(t_0)$$

(d) Ainsi,

$$\begin{aligned} I(f) &= 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt && \stackrel{\text{Charles}}{=} && 2 \int_0^{t_0} \tilde{f}(t) dt + 2 \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t) dt \\ &&& \stackrel{\text{d'après les questions précédentes}}{\geq} && 2 \int_0^{t_0} \frac{t}{t_0} \cdot \tilde{f}(t_0) dt + 2 \int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1} \cdot \tilde{f}(t_0) dt \\ &&& = && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \int_0^{t_0} \frac{t}{t_0} dt + 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1} dt \\ &&& = && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \left[\frac{t^2}{2t_0} \right]_0^{t_0} + 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \left[\frac{(t-1)^2}{2(t_0-1)} \right]_{t_0}^1 \\ &&& = && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \frac{t_0}{2} - 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \frac{t_0-1}{2} \\ &&& = && \tilde{f}(t_0) \end{aligned}$$

2 Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(v) dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x . On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} v g(v) dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. (a) D'après l'énoncé, la fonction $v \mapsto v g(v)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues et strictement positives et $\int_0^{+\infty} v g(v) dv$ est convergente donc $m = \int_0^{+\infty} v g(v) dv > 0$.
- (b) $G(x) = \int_{-\infty}^x g(v) dv$ car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$. On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant g pour densité. Ainsi, d'après le cours :
- G est continue sur $[0, +\infty[$.

— G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (car g est continue sur cet intervalle). Elle est en particulier dérivable et $G'(x) = g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

— $G(0) = \int_0^0 g(v)dv = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ car G est une fonction de répartition.

Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[G(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)[= [0, 1[$.

(c) G^{-1} est de même variation que G donc strictement croissante sur $[0, 1[$.

7. (a) G est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser le changement de variable $u = G(v) \iff v = G^{-1}(u)$:

— bornes :
$$\begin{aligned} u : 0 &\rightarrow t \\ \iff v : G^{-1}(0) = 0 &\rightarrow G^{-1}(t) \end{aligned}$$

— élément différentiel : $du = G'(v)dv = g(v)dv$.

Donc :

$$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} v g(v)dv.$$

(b) G^{-1} étant la réciproque de G , on a $\lim_{t \rightarrow 1} G^{-1}(t) = +\infty$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t G^{-1}(u)du = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^{G^{-1}(t)} v g(v)dv = \int_0^{+\infty} v g(v)dv = m.$$

Donc $\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et vaut m .

8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

(a) i. — Sur $[0, 1[$:

$t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est l'unique primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0. Ainsi, f est bien continue car dérivable sur $[0, 1[$.

— En 1 :

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{1}{m} \int_0^1 G^{-1}(u)du \stackrel{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{m} \cdot m = 1 = f(1).$$

Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$.

ii. G^{-1} est continue sur $[0, 1[$ comme bijection réciproque de G , continue sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

f est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $f'(t) = \frac{1}{m} G^{-1}(t)$ est strictement croissante sur $[0, 1[$ car G^{-1} est strictement croissante sur $[0, 1[$ et $m > 0$.

Ainsi, f est bien convexe sur $[0, 1[$.

iii. — D'après les questions précédentes, f est bien définie sur $[0, 1]$, elle est continue sur $[0, 1]$ et convexe sur $[0, 1[$ donc convexe sur $[0, 1]$.

— $f'(t) = \frac{1}{m} G^{-1}(t) \geq 0$ sur $[0, 1[$ (car $m > 0$ et G^{-1} est à valeurs dans $[0, +\infty[$) donc f est croissante sur $[0, 1]$.

Ainsi, $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$: f est bien à valeurs dans $[0, 1]$ et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(b) $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)dt$.

Effectuons une I.P.P. sur l'intégrale partielle $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1 \cdot f(t)dt$ avec $x \in [0, 1[$:

On pose $v(t) = f(t)$ et $u(t) = t$ fonctions de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $v'(t) = \frac{1}{m} G^{-1}(t)$ et $u'(t) = 1$ donc :

$$\int_0^x 1 \cdot f(t)dt = x f(x) - \frac{1}{m} \int_0^x t G^{-1}(t)dt.$$

On pose alors le changement de variable $v = G^{-1}(t) \iff t = G(v)$ dans la dernière intégrale :

$$\int_0^x 1 \cdot f(t)dt = x f(x) - \frac{1}{m} \int_0^{G^{-1}(x)} G(v) v g(v)dv.$$

On passe à la limite lorsque x tend vers 1 :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x f(x) - \frac{1}{m} \int_0^{G^{-1}(x)} G(v) v g(v)dv \right) = 1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} G(v) v g(v)dv.$$

Ainsi,

$$I(f) = 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} G(v) v g(v)dv \right) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} v g(v) G(v)dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ .

(a) Pour $x > 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

(b) Pour déterminer l'expression de la bijection réciproque de G , pour tout $u \in [0, 1[$, on résout l'équation $G(x) = u$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$:

$$G(x) = u \iff 1 - e^{-\lambda x} = u \iff e^{-\lambda x} = 1 - u \iff \begin{matrix} \iff \\ \text{car } u < 1 \iff 1 - u > 0 \end{matrix} -\lambda x = \ln(1 - u) \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

. Donc pour tout $u \in [0, 1[$, $G^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$.

(c) m est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ donc, d'après le cours, $m = \frac{1}{\lambda}$.

(d) g vérifie bien les hypothèses de la partie II. Nous pouvons donc appliquer la définition de la question 8. : pour tout $t \in [0, 1[$, $f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u) du = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \int_0^t -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) du = -\lambda \frac{1}{\lambda} \int_0^t -\ln(1 - u) du$.

(e) — *Méthode 1* : $f(t) = \int_0^t -\ln(1 - u) du$.

Effectuons une I.P.P. judicieuse en choisissant $w(u) = 1 - u$ comme primitive de $w(u) = -1$:

on pose $v(u) = \ln(1 - u)$ et $w(u) = 1 - u$. v et w sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $v'(u) = -\frac{1}{1 - u}$ et $w'(u) = -1$:

$$f(t) = \int_0^t -\ln(1 - u) du = \int_0^t w'(u) v(u) du = [(1 - u) \ln(1 - u)]_0^t - \int_0^t \frac{1}{1 - u} \cdot (1 - u) du = (1 - t) \ln(1 - t) + \int_0^t 1 du = (1 - t) \ln(1 - t) + t.$$

— *Méthode 2* : on peut vérifier que f est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1 - t)$ qui s'annule en 0 en calculant : $f(0) = 0$ et $f'(t) = -\ln(1 - t)$.

(f) $t \mapsto (1 - t) \ln(1 - t)$ est continue sur $[0, 1[$ (car $1 - t \in]0, 1]$) sur cet intervalle donc l'intégrale est impropre en 1. Calculons l'intégrale partielle :

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = -\frac{(1 - t)^2}{2}$ et $v(t) = \ln(1 - t)$, fcts de classe C^1 sur $[0, 1[$ de dérivées $u'(t) = (1 - t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{1 - t}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \int_0^x (1 - t) \ln(1 - t) dt &= \int_0^x u'(t) v(t) dt = \left[-\frac{(1 - t)^2}{2} \ln(1 - t) \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(1 - t)^2}{2} \cdot -\frac{1}{1 - t} dt \\ &= -\frac{(1 - x)^2 \ln(1 - x)}{2} - \int_0^x \frac{1 - t}{2} dt \\ &= -\frac{(1 - x)^2 \ln(1 - x)}{2} - \left[-\frac{(1 - t)^2}{4} \right]_0^x \\ &= -\frac{(1 - x)^2 \ln(1 - x)}{2} + \frac{(1 - x)^2}{4} - \frac{1}{4} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

car en posant $X = 1 - x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, on a $(1 - x)^2 \ln(1 - x) = X^2 \ln(X) \rightarrow 0$ par croissance comparée.

donc :

$$\int_0^1 (1 - t) \ln(1 - t) dt = -\frac{1}{4}$$

$$(g) \ I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt \stackrel{\text{d'après 9.(e)}}{=} 2 \int_0^1 -(1 - t) \ln(1 - t) dt = -2 \int_0^1 (1 - t) \ln(1 - t) dt \stackrel{\text{d'après 9.(f)}}{=} -2 \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3 Application à une population

10. (a) — Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = \frac{n_i}{N} \geq 0$ car d'après l'énoncé, on a $n_i \geq x_i \in \mathbb{N}^*$ donc $n_i > 0$, et donc $N =$

$$\sum_{i=1}^n n_i > 0.$$

$$\text{— } \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i = \frac{1}{N} N = 1.$$

Ains, la famille $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit bien une loi de probabilité.

On prouve par un raisonnement similaire que la famille $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ définissent des lois de probabilité.

(b) Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après l'énoncé, on sait que $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \iff \frac{x_i}{n_i} \leq \frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} \iff \frac{q_i}{p_i} = \frac{N}{X} \frac{x_i}{n_i} \leq \frac{N}{X} \frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$

(c) On remarque que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{r_i}{p_i} = \frac{N}{Y} \frac{y_i}{n_i} = \frac{N}{Y} \frac{n_i - x_i}{n_i} = \frac{N}{Y} (1 - \varepsilon_i)$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après l'énoncé, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \iff 1 - \varepsilon_i \geq 1 - \varepsilon_{i+1} \iff \frac{N}{Y} (1 - \varepsilon_i) \geq \frac{N}{Y} (1 - \varepsilon_{i+1}) \iff \frac{r_i}{p_i} \geq \frac{r_{i+1}}{p_{i+1}}$.

(d) Pour i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{X}{N} \cdot \frac{x_i}{n_i}}{1 - \frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_i - x_i}{N}}{\frac{N-X}{N}} = \frac{n_i - x_i}{N-X} = \frac{r_i}{Y} = r_i$

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E , qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $Q_i = \sum_{h=1}^i q_h$. On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

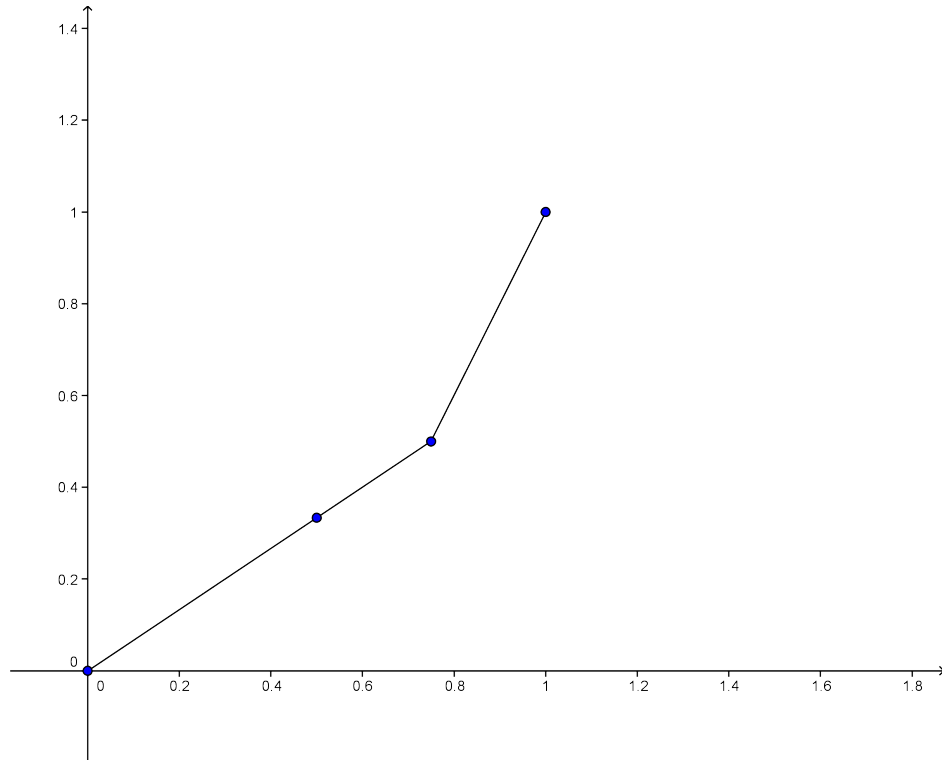
(a) D'après l'énoncé, on a :

— $p_1 = \frac{1}{2}$ et $q_1 = \frac{1}{3}$ donc $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

— $p_2 = \frac{1}{4}$ et $q_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

— $p_3 = \frac{1}{4}$ et $q_3 = \frac{1}{2}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

On place les points de coordonnées $(P_i, Q_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment, on obtient :



(b) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\sum_{h=1}^i q_h - \sum_{h=1}^{i-1} q_h}{\sum_{h=1}^i p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- (c) D'après la question précédente, φ est de pente u_{i+1} donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = u_{i+1}t + b$. Trouvons la valeur de b :
On sait que $\varphi(P_i) = Q_i \iff u_{i+1}P_i + b = Q_i \iff b = Q_i - u_{i+1}P_i$.
Ainsi, $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$
- (d) — On admet que, la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ des pentes de φ étant croissante (d'après 10.(b)), φ est une fonction convexe.
— Pour tout $i \in \llbracket 0, 1n-1 \rrbracket$, φ est continue sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$ en tant que fonction affine donc φ est continue sur $[0, 1]$.
— $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$. de plus, φ est continue et croissante sur $[0, 1]$ (car pour tout $i \in \llbracket 0, 1n-1 \rrbracket$, $\varphi'(t) = u_{i+1} \leq 0$ sur $]P_i, P_{i+1}[$).
 φ appartient bien à E.
- (e) Pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} u_{i+1}(t - P_i) + Q_i dt = \left[u_{i+1} \frac{(t - P_i)^2}{2} + Q_i t \right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\ &= u_{i+1} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1} - P_i) \\ &= \frac{Q_{i+1} - Q_i}{P_{i+1} - P_i} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1} - P_i) \\ &= (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2} + Q_i \right) \\ &= (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} + Q_i}{2} \right) \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\stackrel{\text{d'après 2.(b)}}{=} 1 - 2 \int_0^1 \varphi(t) dt = 1 - 2 \int_{P_0}^{P_n} \varphi(t) dt \\ &\stackrel{\text{Charles}}{=} 1 - 2 \left(\int_{P_0}^{P_1} \varphi(t) dt + \int_{P_1}^{P_2} \varphi(t) dt + \dots + \int_{P_{n-1}}^{P_n} \varphi(t) dt \right) \\ &= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt \\ &= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} + Q_i}{2} \right). \end{aligned}$$

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II. On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^i r_h$. De même, on définit pour i élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

- (a) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0, 1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1 - t)$.

i. D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \frac{1}{2}$ et $r_1 = \frac{2}{3}$ donc $(P_1, R_1) = (p_1, r_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.
- $p_2 = \frac{1}{4}$ et $r_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, R_2) = (p_1 + p_2, r_1 + r_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right)$.
- $p_3 = \frac{1}{4}$ et $r_3 = \frac{1}{6}$ donc $(P_3, R_3) = (p_1 + p_2 + p_3, r_1 + r_2 + r_3) = (1, 1)$.

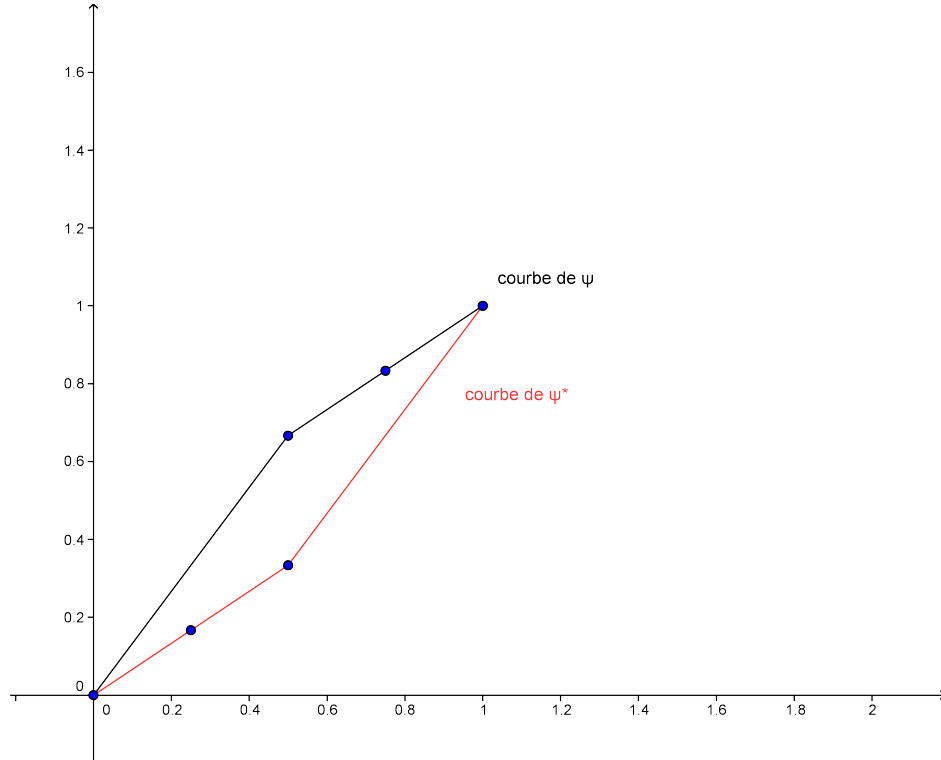
Pour tracer ψ , on place les points de coordonnées $(P_i, R_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segments.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ψ est affine sur $[P_i, P_{i+1}]$ et vaut $\psi(t) = v_{i+1}(t - P_i) + R_i$, donc ψ^* est affine sur $\{t \in [0, 1] \mid P_i \leq 1 - t \leq P_{i+1}\} = \{t \in [0, 1] \mid 1 - P_{i+1} \leq t \leq 1 - P_i\} = [1 - P_{i+1}, 1 - P_i] = [\Pi_{n-i-1}, \Pi_{n-i}]$ car elle vaut $\psi^*(t) = 1 - v_{i+1}(1 - t - P_i) + R_i$.

En posant le changement d'indice $j = n - i$, ψ^* est donc affine sur les segments $[\Pi_{j-1}, \Pi_j]$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De plus,

- $\Pi_0 = 1 - P_3 = 0$ et $\psi^*(\Pi_0) = 1 - \psi(1 - \Pi_0) = 1 - \psi(P_3) = 1 - R_3 = 0$.
- $\Pi_1 = 1 - P_2 = \frac{1}{4}$ et $\psi^*(\Pi_1) = 1 - \psi(1 - \Pi_1) = 1 - \psi(P_2) = 1 - R_2 = \frac{1}{6}$.
- $\Pi_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$ et $\psi^*(\Pi_2) = 1 - \psi(1 - \Pi_2) = 1 - \psi(P_1) = 1 - R_1 = \frac{1}{3}$.
- $\Pi_3 = 1 - P_0 = 1$ et $\psi^*(\Pi_3) = 1 - \psi(1 - \Pi_3) = 1 - \psi(P_0) = 1 - R_0 = 1$.

Pour tracer ψ^* , on place les points de coordonnées $(\Pi_i, \psi^*(\Pi_i))_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment.



- ii. On admet que ψ étant continue et la suite (ν_i) de ses pentes étant décroissante (d'après 10.(c)), la fonction ψ est concave.

Montrons alors que ψ^* est convexe :

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \psi^*(\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) &= 1 - \psi(1 - (\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2)) \\ &= 1 - \psi(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1 - \lambda) t_2) \\ &= 1 - \psi(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1 - \lambda) t_2) \\ &= 1 - \underbrace{\psi(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2))}_{\geq \lambda \psi(1 - t_1) + (1 - \lambda) \psi(1 - t_2) \text{ car } \psi \text{ est concave}} \\ &\leq 1 - (\lambda \psi(1 - t_1) + (1 - \lambda) \psi(1 - t_2)) \\ &= \lambda + (1 - \lambda) - \lambda \psi(1 - t_1) - (1 - \lambda) \psi(1 - t_2) \\ &= \lambda(1 - \psi(1 - t_1)) + (1 - \lambda)(1 - \psi(1 - t_2)) \end{aligned}$$

- iii. cf question 12.(b)i.

- iv. On a pour tout $i \in [0, n]$, $\psi^*(\Pi_i) = 1 - \psi(1 - \Pi_i) = 1 - \psi(P_{n-i}) = 1 - R_{n-i}$.

La pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est donc $\frac{1 - R_{n-i} - (1 - R_{n-(i-1)})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} = \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{1 - P_{n-i} - (1 - P_{n-(i-1)})} =$

$$\frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = \nu_{n-i+1}$$

13. (a) Si $\phi = \psi^*$ alors elle ont mêmes pentes donc , pour tout $i \in [1, n]$, $u_i = \nu_{n-i+1}$.

Or,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{\frac{x_i}{n_i}}{\frac{X}{N}} = \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{q_i}{p_i} = u_i.$$

$$\frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} = \frac{1 - \frac{x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{1 - \frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_{n-i+1} - x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{N - X}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{Y}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{Y}}{\frac{n_{n-i+1}}{N}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = \nu_{n-i+1}$$

Ainsi, par égalité des pentes,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}.$$

- (b) Si $\varphi = \psi^*$ la question 13a) donne alors pour $j = n - i + 1$: pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\varepsilon_{n-j+1}}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_j}{1 - \varepsilon}$, on réécrit avec i et on somme membre à membre :
pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{2 - (\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1})}{1 - \varepsilon}$.
Ce qui donne $(1 - \varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon - \varepsilon(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1})$ soit
pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

- (c) Nous avons montré aux 2 questions précédentes $\begin{cases} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \\ \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon \end{cases}$
En effectuant le pivot $L_2 < -(1 - \varepsilon)L_1 - L_2$, on obtient :

$$\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$$

- (d) On suppose que $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$, alors $1 - 2\varepsilon \neq 0$. On divise l'égalité précédente par $1 - 2\varepsilon$, on obtient :

pour tout i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon_i = \varepsilon$, c'est à dire que $\frac{x_i}{n_i} = \frac{X}{N}$.

La proportion de chaque classe est la même dans chacune des catégories.

Si φ est égale à son adjointe, alors le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I.) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles. Il n'y a donc aucune inégalité sociale entre les femmes (personnes de classe I.) et les hommes (personnes de classe II.) .