

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Sommaire

2.1	Espaces vectoriels réels	34
2.1.1	Définitions et exemples	34
2.1.2	Combinaisons linéaires	37
2.2	Sous-espaces vectoriels	38
2.2.1	Généralités	38
2.2.2	Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs	40
2.3	Familles de vecteurs	41
2.3.1	Famille génératrice	41
2.3.2	Famille libre	42
2.3.3	Bases	42
2.4	Espaces vectoriels et dimension	43
2.4.1	Espaces vectoriels de dimension finie	43
2.4.2	Rang	46
2.5	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	46
2.5.1	Définitions et conséquences	46
2.5.2	Rang d'une matrice	47
2.6	Savoirs faire	47

L'objectif ce chapitre est une étude élémentaire des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des endomorphismes et des matrices.

Cette partie du programme aura de nombreuses applications, que ce soit en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables (second semestre) ou en probabilités (chaînes de Markov).

Compétences attendues. $\Leftrightarrow$ Pour chacun des ensembles $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}[x], \mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, il faut :

- savoir que c'est un espace vectoriel muni de ses lois somme et produit par un scalaire (et savoir sommer des vecteurs et multiplier un vecteur par un scalaire),
- connaître l'élément neutre de l'ensemble,
- connaître la base canonique s'il en a et la dimension.

$\Leftrightarrow$ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E .

$\Leftrightarrow$ Déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

$\Leftrightarrow$ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.

- ⇒ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- ⇒ Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E .
- ⇒ Trouver la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$.
- ⇒ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Beaucoup de problèmes mathématiques, physiques ou économiques, vérifient la propriété suivante : si u et v sont solutions alors $u + v$ est solution ainsi que λu , où λ est un réel.

De tels problèmes sont dits linéaires, et ils sont habituellement plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux dits non-linéaires.

C'est pourquoi a été introduite la notion d'espace vectoriel, qui permet de définir un cadre rigoureux à de tels phénomènes.

Les espaces vectoriels ont été introduits par Cayley et Grassman au milieu du XIX^e siècle.

Le premier ne proposait qu'un calcul sur des n -uplets. Le second, Hermann Grassmann, mathématicien allemand, publie en 1844 un ouvrage contenant tous les germes de l'algèbre linéaire. Mais cet ouvrage, très confus, ne sera pas compris de ses contemporains.

Il faudra attendre 1888 pour que le mathématicien italien Giuseppe Peano en saisisse toute l'importance et introduise les bases des espaces vectoriels, proche de celles que nous utilisons aujourd'hui. Giuseppe Peano (27 août 1858 [Cuneo, Italie] - 20 avril 1932 [Turin]) est un mathématicien et philosophe italien dont les travaux les plus importants datent de la fin du XIX^e siècle. Il est l'un des premiers à avoir compris l'importance de fonder les mathématiques sur quelques axiomes précis, et d'en déduire ensuite propriétés, théorèmes... Il vit aussi l'importance des symboles issus de la logique et de la théorie des ensembles pour donner une exposition formelle, claire et unifiée des mathématiques. L'intérêt de Peano se porte alors en 1887 (année de son mariage) sur la logique et la construction formelle des objets mathématiques ; il est le premier à utiliser les symboles d'intersection et de réunion. L'étude des ouvrages de Grassman le conduit à une définition axiomatique des espaces vectoriels.

Réputé à ses débuts comme bon pédagogue, il devient ensuite un piètre enseignant, son abus de symboles déroutant complètement ses élèves, et il est même renvoyé de l'Académie Royale militaire en 1901.

E désigne un ev dans ce chapitre.

2.1 Espaces vectoriels réels

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.

Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une *loi de composition interne* sur E si $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une *loi de composition externe* sur E si $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x \in E$.

Exemple 2.1.

Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, l'addition des matrices à deux lignes et à une colonne est une loi de composition interne et la multiplication d'une matrice par un scalaire est une loi de composition externe.

Définition 2.2.

Soit E un ensemble non vide dans lequel sont définies :

- une application : $E \times E \rightarrow E$ notée $+$ (loi de composition interne)
- une application : $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ notée $\cdot$ (loi de composition externe)

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x \quad \text{la loi } + \text{ est commutative} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{la loi } + \text{ est associative} \\ \text{Il existe un élément unique dit neutre et noté } 0_E \\ \text{ou noté s'il n'y a pas de risque de confusion } 0 \text{ tel que} \\ \forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x \\ \forall x \in E, \text{ il existe un unique élément de } E, \text{ appelé opposé de } x \text{ et noté } (-x), \\ \text{tel que } x + (-x) = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E, 1 \cdot x = x \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \text{distributivité} \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x. \end{array} \right.$$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ (les réels) sont parfois appelés **scalaires**; les vecteurs x sont généralement notés x pour ne pas les confondre avec les réels mais cette notation n'est pas en usage dans tous les exemples d'espaces vectoriels.

0 (élément neutre) est appelé vecteur nul; il est présent dans tout espace vectoriel.

Remarque.

Dans tous les espaces vectoriels qui sont au programme, la loi notée $+$ est l'addition bien connue; tout comme la loi $\cdot$ qui est la multiplication habituelle.

Le symbole $\cdot$ qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est la plupart du temps omis, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on multiplie une matrice A par le réel 2 : on écrit $2A$ et non $2 \cdot A$.

Définition 2.3 (ev de dimension finie programme officielle).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble non vide dans lequel sont définies :

- une application : $E \times E \rightarrow E$ notée $+$ (loi de composition interne)
- une application : $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ notée $\cdot$ (loi de composition externe)

$(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n lorsqu'il existe une bijection ϕ de E dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tous éléments $u, v \in E$ et tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\phi(\alpha u + \beta v) = \alpha \phi(u) + \beta \phi(v)$. Une telle bijection est dite linéaire.

Remarque.

La définition précédente signifie que la bijection ϕ préserve les combinaisons linéaires. Naturellement, il n'y a pas unicité de la bijection (lorsqu'elle existe) : il y en a une infinité; il suffit d'envoyer une base de E sur une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemples 2.2 (🔗 classiques d'espaces vectoriels).

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappel : un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; puis

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ et } \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Ici $0 = (0, \dots, 0)$; l'opposé $(-x)$ de $x = (x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$.

En particulier, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.

- $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ou plus généralement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies dans le chapitre matrice.

Un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ puis

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

L'élément neutre est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est $-X = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.

On voit par exemple facilement que l'application :

$$\phi : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

- L'ensemble des matrices de taille n et p , $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exemple : $n = p = 2$. Les lois sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

L'élément neutre est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

On voit par exemple facilement que l'application :

$$\phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{np}$$

$(a_{i,j}) \mapsto (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,p})$ est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$.

On peut voir facilement que l'application :

$$\phi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est bijective et qu'elle préserve bien les combinaisons linéaires.

- Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'équation différentielle : $(E_1) y' + ay = 0$.

L'ensemble des solutions de (E_1) (muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un scalaire) est alors un espace vectoriel de dimension 1.

Soient a, b réels fixés tels que le discriminant du polynôme $x^2 + ax + b$ soit positif ou nul. On considère l'équation différentielle : $(E_2) y'' + ay' + by = 0$.

L'ensemble des solutions de (E_2) est alors un espace vectoriel de dimension 2.

En effet :

une solution (E_1) est de la forme $t \mapsto \lambda e^{-at}$, on construit de manière très naturelle une bijection linéaire entre l'ensemble des solutions et $\mathbb{R}$ en posant :

$$\phi : (t \mapsto \lambda e^{-at}) \mapsto \lambda.$$

Pour (E_2) , supposons que le discriminant de l'équation caractéristique soit strictement positif avec deux racines α_1 et α_2 ; une solution est alors de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \beta e^{-\alpha_2 t}$ et dans ce cas on peut construire ϕ en posant :

$\phi : (t \mapsto \lambda e^{-\alpha_1 t} + \beta e^{-\alpha_2 t}) \mapsto (\lambda, \beta)$. A vous de vérifier que les deux applications ϕ ci-dessus sont linéaires et bijectives.

Attention les exemples qui suivent sont des exemples d'ev de dimension infinie!

- L'ensemble des suites $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.
Les lois en vigueur sont définies de la manière suivante : pour tout couple de (u, v) de suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u + v$ est la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n + v_n$ et, pour tout réel λ , λu est la suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont le terme général est λu_n .
- Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble des applications $\mathcal{A}(A, \mathbb{R})$ de A dans $\mathbb{R}$ munie de la loi $+$ telle que : $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(A, \mathbb{R})^2, \forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
- L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (resp. de classe C^k) ($\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot$) (resp. $(C^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$).
- L'ensemble des polynômes $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$.

Proposition 2.1 (Règles de calcul).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E$, on a :

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot x = 0$.
2. $\lambda \cdot x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.
3. $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$.

Dans la suite, $(-\lambda \cdot x)$ sera donc noté $-\lambda \cdot x$ ou encore $-\lambda x$, et $x + (-y)$ sera noté $x - y$.

On en déduit que : $\lambda x = \mu x \Leftrightarrow \lambda = \mu$ ou $x = 0$.
 $\lambda x = \lambda y \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = y$.

2.1.2 Combinaisons linéaires**Définition 2.4.**

Soit p un entier naturel non nul. On appelle *famille* de vecteurs de E tout p -uplet $(e_1, \dots, e_p)$ formés de p vecteurs de E .

Définition 2.5.

Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E .

On dit qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire des p vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que : $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ (les scalaires λ_i sont les coefficients de la combinaison linéaire).

Remarques.

- Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quels autres vecteurs.
- Pour savoir si un vecteur u est bien combinaison linéaire d'autres vecteurs donnés $u_1, u_2, \dots, u_p$, souvent la décomposition se voit "à l'oeil nu"
- Ou bien on peut résoudre un certain système linéaire.

EXERCICE 2.1.

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3) .

EXERCICE 2.2.

Soit $P_1(x) = x^2 + 1$, $P_2(x) = x^3 - x$, $P_3(x) = 2x$.
 P_1 est-il combinaison linéaire de P_2 et P_3 ?

2.2 Sous-espaces vectoriels**2.2.1 Généralités****Définition 2.6.**

Soit E un espace vectoriel et F une partie **non vide** de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si la restriction des lois $+$ et $\cdot$ de E à F fait de F un espace vectoriel.

Ce qui est équivalent à dire :

Soit E un espace vectoriel et F un ensemble. Alors F est un sous-espace vectoriel de E ssi :

1. $F \subset E$,
2. $F \neq \emptyset$,
3. (a) $\forall (x, y)^2 \in F^2, x + y \in F$ (F est stable pour l'addition),
 (b) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x \in F$ (F est stable pour la multiplication par un scalaire)

Exemples 2.3.

$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

Théorème 2.2 (🔗).

F est un sous-espace vectoriel de E (abrégé sev de E) ssi :

1. $F \subset E$,
2. $F \neq \emptyset, 0 \in F$
3. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x + y \in F$.

EXERCICE 2.3.

Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés 2.3 (🔗).

Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E .

Propriété 2.4 (🔗).

Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 2.5 (🔗 Exemples de sev importants).

-L'ensemble des fonctions polynomiales (ou polynômes) à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[x]$ est un sev de l'espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$.

-L'ensemble des fonctions polynomiales (ou polynômes) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , noté $\mathbb{R}_n[x]$ est un sev de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$.

Exemples 2.4 (🔗 de sev).

- L'ensemble des suites convergentes est un sev de l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des séries convergentes est un sev de l'ensemble des séries numériques $\sum_{\mathbb{R}}$.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I , des fonctions dérivables sur I , des fonctions C^k sur I , des fonctions intégrables sur I sont des sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Remarque.

La condition $F \neq \emptyset$ s'argumente par $0 \in F$ car si $0 \notin F$, F ne peut pas être un sev de E .

Attention on écrit $F \subset E$ ET PAS $F \in E$!

→ Ces propositions donnent la **Méthode 1** pour "Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel".

• 🐭 **Point méthode 1 pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Il y a 3 étapes :

1. On montre que $F \subset E$.
2. On prouve que $0 \in F$, donc $F \neq \emptyset$.
3. On prouve que $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x + y \in F$.
Attention ici, il faut prendre des éléments de F pas de E ! Et il faut bien comprendre ce que signifie être dans F .

Remarques.

Il est donc beaucoup plus facile de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel plutôt qu'un espace vectoriel :

en effet toutes les propriétés propres aux lois (commutativité, associativité, etc ...) restent vraies par restriction donc n'ont pas besoin d'être montrées.

• 🐭 **Point méthode 2 pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

on montre que cet ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence et on en déduit alors, d'après la définition, que c'est un espace vectoriel.

EXERCICE 2.4 (🔗 Exemple de sev avec les matrices).

Montrer que l'ensemble S des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.5.

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f - f' = 0\}$

Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

EXERCICE 2.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

2.2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs**Théorème 2.6** (🔗).

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille de p vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ forme un sous-espace vectoriel $F = \{y \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p\}$, noté $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et appelé sous-espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_p$.

Remarque.

F est en fait le plus *petit* sous-espace vectoriel contenant les vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

En effet, si G est un sous-espace vectoriel contenant ces vecteurs, par stabilité par somme et multiplication (les 2 conditions qui font de lui un sous-espace vectoriel), il contient toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs donc il contient F .

Propriété 2.7 (Simplification de vect).

Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1})$ et si e_{p+1} est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$, alors

$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. En particulier, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p, 0_E) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Si $F = \text{Vect}(\alpha_1 e_1, \dots, \alpha_p e_p)$ et si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont tous non nuls, alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple 2.5.

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -x - y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$F \text{ est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.6 (Ensemble solution d'un système linéaire homogène).

Soit S un système linéaire homogène d'équations à n inconnues. Alors son ensemble solution $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^n$).

Dans le cas d'un système de Cramer, $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel trivial $\{0\}$.

- 🐼 **Point méthode 3 pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel.**

On identifie des vecteurs $e_1, \dots, e_p$ tels que F soit l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs. Alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et F est un sous-espace vectoriel (cf le théorème ci-dessus).

EXERCICE 2.7.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, \text{ et } x + 2y - 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.8.

Montrer les propositions suivantes

- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , est un sous-espace vectoriel de E .
- Généralisation : toute intersection de sev de E est un sev de E .
- Soit S un système linéaire homogène à n inconnues $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}$ son ensemble solution.

Alors, $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.9.

Ecrire les ensembles suivants sous forme de sous espace engendré, et précisez dans quel espace vectoriel.

Idée : il faut paramétrer les éléments.

$$E = \{x \rightarrow \alpha \ln(x) + \beta \exp(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = MA\} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P - XP' = 0\}$$

2.3 Familles de vecteurs**2.3.1 Famille génératrice**

Définition 2.7 ( Famille génératrice).

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie ou non de vecteurs de E . $\mathcal{F}$ est dite génératrice si :

pour tout vecteur x de E , il existe une partie finie de $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{F}_x$ telle que x soit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}_x$. Ou encore

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ réels, } \exists \mathcal{F}_x = (e_1, e_2, \dots, e_p), x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p$$

Définition 2.8 (Partie génératrice). On dit qu'une partie A de E engendre un sev F de E , ou est une partie génératrice de F , si tout vecteur de F est combinaison linéaire (finie) d'éléments de A .

2.3.2 Famille libre

Définition 2.9 (🔗 Famille libre).

Une famille de vecteurs de p vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ de E est dite libre (ou linéairement indépendants) si :

lorsque l'on résout l'équation $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0$, la seule solution est :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est liée.

Remarques.

- On dit encore que la seule combinaison linéaire nulle de $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ est $0e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_p$.
- Dire qu'une famille est libre permet de s'assurer que toute combinaison linéaire de $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ est unique.
- Lien avec les systèmes d'équations et les pivots : pour prouver qu'une famille est libre, on résout un système d'équation, si les pivots successifs sont tous non nuls alors la famille est libre.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille liée est liée.

Propriétés 2.8 (Cas particuliers à 1 vecteur ou famille de deux vecteurs).

- Soit x un vecteur de E , alors la famille (x) est libre ssi $x \neq 0_E$.

- Soient x et y deux vecteurs de E .

La famille (x, y) est libre ssi x et y ne sont pas proportionnels. (ou non colinéaires)

Remarque. La colinéarité est réservée aux familles à 2 vecteurs!

On ne peut parler de colinéarité pour 3 vecteurs et plus!

EXERCICE 2.10.

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (I, J) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.11.

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que (I, J, K) est liée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.12.

Soient les trois fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_2[x]$, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + x^2, g(x) = 3 + x - 2x^2, h(x) = -1 - 3x + 4x^2.$$

Montrer que la famille (f, g, h) est liée.

2.3.3 Bases

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel.

Définition 2.10 (🔗 Base).

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Une famille finie $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi elle est libre et génératrice.

Propriété 2.9.

Une famille finie $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi tout $x \in E$ se décompose de manière unique sur les e_i . Autrement dit si :

pour tout $x \in E$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
Ce n -uplet représente les **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

EXERCICE 2.13.

Dans l'espace S des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, on considère :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que la famille (A, B, C) est une base de S .

EXERCICE 2.14.

Soit $u = (-1, 2, 0), v = (3, -5, -1), w = (0, 1, -2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2.15.

Dans $(\mathcal{A}([0, +\infty[; \mathbb{R}), +, \cdot)$ montrer que la famille $(\ln, \exp)$ est libre.

2.4 Espaces vectoriels et dimension

2.4.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 2.11.

Un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ est dit de dimension finie si il admet une famille génératrice finie.

Théorème 2.10 (🔗).

Tout espace vectoriel E de dimension finie admet au moins une base.

De plus, toutes ses bases sont constituées d'un même nombre de vecteurs.

Ce nombre, entier naturel non nul, est appelé la dimension de E , et est noté $\dim(E)$.

Par convention, on pose $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$.

Théorème 2.11 (🔗 de la dimension).

Si l'espace vectoriel E possède une base de n vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), alors toutes les bases de E ont exactement n vecteurs.

Remarque.

La plupart des espaces vectoriels étudiés sont de dimension finie : $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[x] \dots$

Mais $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel de dimension infinie car la plus petite famille génératrice est $(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$.

Les espaces de dimension 1 sont appelés " des droites " et ceux de dimension 2 " des plans ".

A RETENIR!

Exemples 2.7 (🔗 fondamentaux, bases canoniques).

1. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

Considérons la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appelée *base canonique* car base la plus naturelle et la plus élémentaire et $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

$$\text{En effet, } \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

cette décomposition étant unique de manière évidente.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ forme la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

En effet elle est génératrice car tout $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit : $(x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$.

Faire le dessin du plan, pour montrer graphiquement que la famille est génératrice : c'est-à-dire que tout point du plan se décompose en une coordonnée selon $\vec{i} = (Ox)$, axe des abscisses, et une selon $\vec{j} = (Oy)$, axe des ordonnées.

Il est équivalent de dire que dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice

car tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ se décompose en $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. De même, pour $\mathbb{R}^n$:

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0); \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

Cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

En effet, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1)$, cette décomposition étant unique de manière évidente.

4. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour base canonique :

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,2}} \right)$$

les $E_{i,j}$, où $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient placé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne qui est 1.

C'est donc un espace vectoriel de dimension $2 * 2$.

En effet :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,1}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,2}}$$

. Les coordonnées d'une matrice dans cette base sont donc ses coefficients.

On peut généraliser à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, toujours avec comme base canonique les matrices $E_{i,j}$, où $E_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient placé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne qui est 1.

Ce qui fait que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.

5. $\mathbb{R}_n[x]$:

La base canonique est la suivante : $(1, x, x^2, \dots, x^n)$, car par définition tout polynôme de degré inférieur à n peut s'écrire comme $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ de manière unique (cf le chapitre sur les polynômes).

On en déduit que $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$.

Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont ses coefficients.

EXERCICE 2.16.

Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?

Théorème 2.12.

Si E est de dimension n alors, pour toute famille $\mathcal{L}$ libre de E et toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E , leur nombre de vecteurs vérifie :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim(E) \leq |\mathcal{G}|$$

Théorème 2.13 ([lien avec famille libre ou génératrice pour avoir une base](#)).

Soit E est de dimension n .

Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E de n vecteurs alors $\mathcal{L}$ est une base de E

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E de n vecteurs alors $\mathcal{G}$ est une base de E .

Théorème 2.14 (Sous espaces).

Si E est de dimension finie, et F est un sous espace de E , alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

De plus $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$

EXERCICE 2.17.

Soit $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, 1), (1, 1))$, est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?

Soit $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 2, 1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 2.18.

Soit $F = \text{Vect}((1, 2), (2, 1))$. Montrer que $F = \mathbb{R}^2$.

2.4.2 Rang

Définition 2.12 (🔗).

Soit E un ev et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle rang de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et on note $rg(e_1, e_2, \dots, e_n)$, la dimension de $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Il est égal au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples 2.8.

La famille $\mathcal{L} = ((1, -1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 2, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$, elle engendre donc un sous-espace vectoriel de dimension 3, on a :

$$rg(\mathcal{L}) = 3$$

La famille $\mathcal{F} = ((1, -1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 2, 1), (0, -2, 2, -2, 0))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^5$, on a :

$$rg(\mathcal{F}) = 3$$

2.5 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

2.5.1 Définitions et conséquences

Théorème 2.15 (🔗 Matrice de passage définition et propriété).

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{B}$ une base de E .

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

On note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice carrée $n \times n$ des coordonnées (en colonnes) des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Définition : si en plus, $\mathcal{B}'$ est une base de E alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

Et on a en plus :

$\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible.

Son inverse est alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ce qui représente la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

Exemple 2.9 (Obtention d'une matrice de passage).

$\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1, 2), (0, 1))$ autre base

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ est $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Comment obtenir les coordonnées d'un vecteur dans une autre base que la base canonique ?

La réponse est donnée par la formule suivante :

Théorème 2.16 (🔗 Première formule de changement de base : vecteurs).

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et u un vecteur de E alors si X représente le vecteur colonne associé à u dans $\mathcal{B}$, X' le vecteur colonne associé à u dans $\mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, on a : $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot X' \Leftrightarrow P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \cdot X = X'$.

On note parfois $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ d'où la formule :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u).$$

EXERCICE 2.19.

Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, et $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(x) = 1, R_1(x) = x - 1$ et

$R_2(x) = (x-1)^2$, une autre base de cet espace. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Déterminer à l'aide de la proposition précédente les coordonnées du polynôme $R(x) = 4x^2 - 3x + 7$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Théorème 2.17 (🔗 Conséquences).

Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes sont libres.

Une matrice triangulaire est donc inversible si et seulement si aucun terme de la diagonale n'est nul.

2.5.2 Rang d'une matrice

Définition 2.13 (🔗 Rang d'une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang d'une matrice A , le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 2.10.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $rg(A) = 3$ car la famille $\mathcal{L} = ((1, -1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 1, 2), (1, 1, 0, 2, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

Propriétés 2.18 (🔗).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Une matrice et sa transposée ont même rang : $rg(A) = rg({}^tA)$.
2. Une matrice et une réduite de Gauss de A ont le même rang.
3. $rg(A) = 0$ ssi $A = 0$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est inversible ssi $rg(A) = n$.

2.6 Savoirs faire

Espace vectoriel Montrer que l'on a un sous espace vectoriel, un sous espace engendré.

Bases Montrer qu'une famille est libre.

Trouver une famille génératrice.

Trouver et utiliser la dimension.

Trouver les coordonnées.

Utiliser les coordonnées.

Feuille d'exercices n°2

ESPACES VECTORIELS.

Exercice 1. Montrer qu'un ensemble est un ev ou un sev

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note C_A l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec A (ie $AM = MA$), montrer que C_A est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), / f(0) = f'(0) = 0\}$, montrer que F est un ev.
3. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b+c \\ -a+b & a+b+c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, montrer que H est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / xP'(x) - 2P(x+1) = 0\}$, montrer que G est un sev de $\mathbb{R}[x]$.
5. Démontrer que l'ensemble S_0 des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$, tels que $\begin{cases} t+x+y+z=0 \\ -t+x-y+z=0 \end{cases}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
6. Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}, / (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \right\}$, est un ev.

Exercice 2. Montrer qu'une famille est libre ou liée

1. Dans l'ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $b_1 = (A)$, $b_2 = (I_2, B)$. Montrer que les familles b_1 et b_2 sont libres.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x^2 + x + 1, x - 1, x + 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. On note u, v, w les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n$. Montrer que la famille (u, v, w) est une famille libre de E .
4. On note : si $n \in \mathbb{N}, \forall k \in [0, n], f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{-kx}$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
5. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, la famille (A, B, C, D) est-elle libre ou liée?

Exercice 3. Famille génératrice

1. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b+c \\ -a+b & a+b+c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, donner une famille génératrice de H .
2. Donner une famille génératrice de l'ensemble S_0 des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$, tels que $\begin{cases} t+x+y+z=0 \\ -t+x-y+z=0 \end{cases}$.

Exercice 4. Egalité de deux ev

On considère les quatre vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note F_1 le sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par : $F_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$ et $F_2 = \text{vect}(u_3, u_4)$. Montrer que $F_1 = F_2$.

Exercice 5. Base

1. Montrer que les vecteurs $U = (1, 0, -1, 0)$, $V = (0, 1, 0, -1)$ forment une base de S_0 .
2. On considère $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b+c \\ -a+b & a+b+c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $H' = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & b+c \\ a+c & a-2b-c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, donner une base de H et H' .
3. On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x^2 + x + 1, x - 1, x + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Soient $u = (-1, 2, 0)$, $v = (3, -5, -1)$, $w = (0, 1, -2)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $t = (1, -2, 1)$ dans cette base.
6. On considère le sev I de $\mathbb{R}^n$ formé par les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que : $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ ($n \geq 2$).
On admet que $\dim(I) = n - 1$ et on note $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que la famille $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une base de I .

Exercice 6. Rang

Dans l'ev $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 2, 1)$, $w = (3, -4, -3)$:

1. Déterminer le rang de la famille (u, v, w) .
2. On note $F = \text{vect}(u, v, w)$, donner une base de F et sa dimension.

Exercice 7. Rang

1. On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, : $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de la famille (H, E, C) .
2. Dans l'ev $\mathbb{R}^2[x]$, on considère la famille c formée par : $P_1(x) = 2$, $P_2(x) = 3 + x$, $P_3(x) = 7 - 6x^2$. Déterminer le rang de c .

Exercice 8. Dimension

1. On considère les ev $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b+c \\ -a+b & a+b+c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $H' = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & b+c \\ a+c & a-2b-c \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, donner la dimension de H et celle de H' .

2. Donner la dimension du sev de $\mathbb{R}^4$, S_0 , formé par les vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$, tels que $\begin{cases} t + x + y + z = \\ -t + x - y + z = \end{cases}$

Exercice 9. Matrice de passage

On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a vu à l'exo 5-3 que la famille $b = (u, v, w)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de passage $P_{e,b}$ de la base canonique à la base b . Déterminer ensuite $P_{b,e}$ la matrice de passage de la base b à la base canonique.

Exercice 10.

Dans l'ev $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donner les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans cette base $\mathcal{B}$.

Exercice 11. ECRICOME 2008

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

Exercice 12. EML 2006

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $AM = MD$

1. Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$

3. Etablir que (U, A) est une base de E .
4. Calculer le produit $U A$. Est-ce que $U A$ est élément de E ?

Exercice 13. EML 2005

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K .

Pour toute matrice M de E , on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k , $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E .
2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2 .
3. Soit la matrice $L = I + J$.

(a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

(b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

(c) Exprimer, pour tout entier relatif n , L^n à l'aide de I, L, L^2 et n .

Exercice 14. ESSEC 2001

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité I_3 et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J .

1. L'espace vectoriel E des matrices $M(x, y, z)$.

- (a) Calculer les matrices J^2 et J^3 .
- (b) Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$ où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
- (c) Établir que (I_3, J, J^2) forme une base de E .

2. Matrices inversibles de l'espace vectoriel E .

- (a) Calculer le produit $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$ et montrer que celui-ci est élément de E .
Les matrices $M(x, y, z)$ et $M(x', y', z')$ commutent-elles?

- (b) En déduire l'égalité suivante : $M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

- (c) Établir qu'une condition suffisante pour que $M(x, y, z)$ soit inversible est que x, y, z soient tels que $x + y + z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x, y, z)$?
- (d) Établir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

Exercice 15. EDHEC 2002

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant

$M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
- (b) Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
- (c) Donner la dimension de E .
2. (a) Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E .
- (b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
- (c) Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

3. On considère les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 16. EDHEC 2000

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
- (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E .

- (a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E .
- (b) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.