

## Espaces vectoriels

**EXERCICE 1:** – Cours – Soit  $\mathbb{R}_+^*$  muni de la loi interne  $\boxplus$  définie par  $a \boxplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et de la loi externe  $\bullet$  telle que  $\lambda \bullet a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $E = (\mathbb{R}_+^*, \boxplus, \bullet)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**EXERCICE 2:** – Cours – On considère  $E = \mathbb{R}^2$  muni de la loi interne  $\boxplus$  habituelle  $+$  et de la loi externe  $\bullet$  définie par  $\lambda \bullet (x, y) = (\lambda x, 0)$ .  $(E, \boxplus, \bullet)$  est-il un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel ?

**EXERCICE 3:** – Cours – Déterminer si  $\mathbb{R}^2$ , muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

1.  $(a, b) \boxplus (c, d) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  ;  $\lambda \bullet (a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$ .
2.  $(a, b) \boxplus (c, d) = (c, d)$  ;  $\lambda \bullet (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ .

**EXERCICE 4:** – Cours – Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien  $E \times E$  de l'addition usuelle :

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = (a \cdot \vec{x} - b \cdot \vec{y}, a \cdot \vec{y} + b \cdot \vec{x})$$

Montrer que  $E \times E$  est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. (Celui-ci est appelé complexifié de  $E$ .)

## Sous espaces vectoriels

**EXERCICE 5:** Révision : cas des sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . – Cours – Déterminer si les ensembles  $F$  ci-dessous sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  d'un eV  $E$  que l'on identifiera (avec addition et multiplication classique).

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}^*$ .
2.  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$
3.  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - x_2| = 1\}$ .

4.  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 > 0\}$
5.  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 \leq 0\}$
6.  $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ .
7.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ .
8.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0, x = z\}$ ;
9.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3\}$ .
10.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$  ☆
11.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^x e^z = 1\}$ .
12.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - z = x + y + z = 0\}$
13.  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ .
14. L'ensemble des solutions  $(x, y, z)$  du système :  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$
15. L'ensemble des solutions  $(x, y, z)$  du système :  $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
16. L'ensemble des vecteurs  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux au vecteur  $(1, 1, 2)$ .

**EXERCICE 6:** Cas des sous ensembles de  $\mathbb{C}^n$ . – Cours – Déterminer si les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}$  ?

1.  $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .
2.  $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + 3z_2 = 0\}$ .
3.  $F = \{\alpha e^{i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{C} \mid \alpha \geq 0\}$
4.  $F = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4} (\pi)\}$
5.  $F = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) = \frac{\pi}{4} (\pi)\} \cup \{0\}$ .

**EXERCICE 7:** – Cours – Montrer que les ensemble suivants, où  $I = [a, b]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  :

1.  $F = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ , pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  (peut être utilisé dans les exercices)
2.  $F = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\}$ .
3.  $F = \{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t) dt = 0\}$ .
4.  $F$  l'ensemble des fonctions  $f$  sur  $I$  continues, vérifiant  $2f(a) = f(b) + \int_a^b t f(t) dt$ .

**EXERCICE 8:** – Cours – Sous-espaces vectoriels de fonctions réelles.

On note  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Le sous-ensemble de  $E$  ci-dessous est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

1.  $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ est bornée}\}$
2.  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions paires.
3.  $\mathcal{H}$  l'ensemble des primitives de  $x \mapsto xe^x$ .
4.  $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$
5.  $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 1\}$
6. L'ensemble des fonctions croissantes.
7.  $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \exists(a, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x - \varphi)\}$  ★
8.  $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ s'annule en } 0\}$
9.  $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ s'annule}\}$
10. L'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
11.  $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$
12. L'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
13. L'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  vérifiant  $af'' + bf' + cf = 0$ , où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sont fixés.

**EXERCICE 9:** – Cours – Sous-espaces vectoriels de polynômes.

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}[X]$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .)

1.  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P'' = 0\}$ ,
2.  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P' = 1\}$ ,
3.  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : \deg(P) = n\}$ ,
4.  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] : P + X^2P'' = 0\}$ ,
5. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 2.

**EXERCICE 10:** – Cours – Espaces vectoriels de matrices

Pour tout ensemble  $E$  ci-dessous, dire si c'est est un espace vectoriel.

1.  $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
2.  $E$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 telles que le coefficient "en haut à gauche" est 1.
3.  $E = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & -2\lambda \\ 3\lambda & 2\lambda + \mu \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

## Équation cartésienne, Espace vectoriel engendré, famille génératrice

**EXERCICE 11:** – Calculer –

Pour chaque sous-espace vectoriel  $A$  de  $\mathbb{K}^3$  ci-dessous, déterminer une équation cartésienne décrivant  $A$  :

1.  $A = \text{Vect}\{(1, 0, 2); (1, -1, -1)\}$ .
2.  $A = \text{Vect}\{(3, 1, 1); (1, -1, 1)\}$ .
3.  $A = \text{Vect}\{(3, 1, 1); (1, -1, 1), (2, 2, 0)\}$ .

**EXERCICE 12:**

1. Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  et  $G = \{(a + b, a - b, a + 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .  
 a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .  
 b) Déterminer une base de  $F \cap G$ .
2. Soient  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$  et  
 $G = \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1), (0, 2, -1, 0)\}$ .  
 a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$ .  
 b) Déterminer une base de  $F \cap G$ .

**EXERCICE 13:** – Cours –

Trouver une famille génératrice de  $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x + iz - 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}$

**EXERCICE 14:** – Calculer –

Trouver  $\alpha$  et  $\beta$  scalaires pour que  $(\alpha, \beta, 4, 1)$  appartienne au sev de  $\mathbb{R}^4$  engendré par  $(2, 1, 3, 1)$  et  $(-1, 1, 2, 1)$ .

**EXERCICE 15:** – Cours – Montrer que l'ensemble

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a+c & a-b & a-c \\ a & a-b-2c & a+b \\ a+c & c & a-b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  en exhibant une famille génératrice de  $F$ .

**EXERCICE 16:** – Cours – Calculer – Raisonner –

On pose  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (0, 2, 1)$ ,  $u = (3, -1, 1)$ ,  $v = (-1, 1, 0)$ . Montrer que  $\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(u, v)$ .

**EXERCICE 17:** – Cours –

Montrer que  $x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})$  appartient à l'espace vectoriel engendré par  $f_1 : x \mapsto \sin x$  et  $f_2 : x \mapsto \cos x$ .

**EXERCICE 18:** – Cours – Chercher –

Soient  $f_1, f_2$  des éléments de  $\mathcal{F}] - 1, 1[ , \mathbb{R}$  définis par :

$f_1 : x \mapsto 1$  ,  $f_2 : x \mapsto \cos(x)$ . On note  $\mathcal{E} = \text{Vect}(f_1, f_2)$ .

1. Montrer que les deux applications  $g_1 : x \mapsto \cos^2(\frac{x}{2})$  et  $g_2 : x \mapsto \sin^2(\frac{x}{2})$  engendrent  $\mathcal{E}$ .
2. la fonction  $x \mapsto \sin(x)$  appartient-elle à  $\mathcal{E}$  ?

Famille libre / liée

**EXERCICE 19:** – Cours –

Dire si dans les cas suivants les vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  sont linéairement indépendants (et forment une base de  $\mathbb{K}^3$ ) :

1.  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -1)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )
2.  $\vec{a} = (0, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (3, 2, 2)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )
3.  $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, -1)$ ,  $\vec{c} = (i, -1, 1)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )
4.  $\vec{a} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (3, 0, 2)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )
5.  $\vec{a} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (3, 1, 2)$ ,  $\vec{d} = (1, -1, 0)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

**EXERCICE 20:** – Cours –

Dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  les applications suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

1.  $f : x \mapsto \cos x$ ,  $g : x \mapsto \sin x$ ,  $h : x \mapsto \tan x$  ( $I = ] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ).
2.  $f, g, h, k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = x \cos x$ ,  $h(x) = \sin x$  et  $k(x) = x \sin x$ .
3.  $f : x \mapsto 1$ ,  $g : x \mapsto \cos 2x$ ,  $h : x \mapsto \sin^2 \frac{x}{2}$
4.  $f : x \mapsto 1$ ,  $g : x \mapsto \cos 2x$ ,  $h : x \mapsto \sin^2 x$
5.  $f : x \mapsto e^{ax}$ ,  $g : x \mapsto e^{bx}$ ,  $h : x \mapsto e^{cx}$ ,  $a, b, c$  2 à 2 distincts.
6.  $f : x \mapsto \frac{x}{4x^4+1}$ ,  $g : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2+x^2}$ ,  $h : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+x^2}$  sur le domaine de définition  $]1, +\infty[$

**EXERCICE 21:** – Cours –

Déterminer si les polynômes ci-dessous sont linéairement indépendants.

1.  $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X + 1$ ,  $Q(X) = X^3 - 2X^2 + 8X$
2.  $P(X) = X^2 - X + 2$ ,  $Q(X) = X^2 + 8X - 1$ ,  $R(X) = 2X + 3$ ,  $S(X) = 1$
3.  $P(X) = (X - 1)(X - 2)$ ,  $Q(X) = X^3 - X + 1$ ,  $R(X) = X + 1$ .
4.  $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3X + 3$ ,  $Q(X) = 2X^3 + X^2 + X + 2$ ,  $R(X) = -5X^2 + 5X + 4$
5.  $P(X) = (X - 1)(X + 3)(X^2 + 1)$ ,  $Q(X) = X^3 + X - 1$ ,  $R(X) = X - 1$ .

**EXERCICE 22:** – Cours – Calculer –

☆

1. Montrer que les applications suivantes, définies sur le domaine de définition  $]1, +\infty[$ , sont liées :

$$f : x \mapsto \arctan \frac{1}{2x^2}, \quad g : x \mapsto \arctan \frac{x}{x-1}, \quad h : x \mapsto \arctan \frac{x+1}{x}$$

2. En déduire une base de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(f, g, h)$ .
3. Que dire de la liberté si le domaine de définition est  $]0, 1[$  ?

☆

Bases et changement de bases

**EXERCICE 23:** – Cours – Calculer –

1. Montrer que  $\mathcal{B} = \{(2, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer les coordonnées du vecteur  $(-4, 1, -3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**EXERCICE 24:** – Cours – Déterminer dans chacun des cas si les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  forment une base (notée  $\mathcal{B}$ ) de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et si oui, déterminer les coordonnées de la

matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ .
3.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE 25:** – Cours –

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, et en donner une base lorsque c'est possible :

1.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\}$ .
2.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = -z\}$ .
3.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0; y + z = 0; z + t = 0; t + x = 0\}$ .
4.  $\text{Vect}\{(1, 2, -3), (1, 2, -3), (-1, 5, 6)\}$
5.  $\text{Vect}\{(1, 2, -1), (3, 1, 3), (2, -1, 4)\}$
6.  $\text{Vect}\{(4, 1, 3), (2, 0, -2), (4, -5, 8), (1, 1, -1)\}$ .
7.  $\{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(\sqrt{2}) = 0\}$ .
8. l'ensemble des fonctions affines.

**EXERCICE 26:** – Calculer –

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = ((1, -2, 2), (1, 2, -1), (3, 1, 1))$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base  $\mathcal{B}'$ .
3. En déduire les coordonnées du vecteur  $(1, 1, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**EXERCICE 27:** – Calculer –

Soit  $\mathcal{B}$  une base d'un espace vectoriel  $E$  et  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 3e_1 - 2e_2 \\ u_2 &= e_1 - e_2 - 2e_3 \\ u_3 &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base et déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  ainsi que la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .

**EXERCICE 28:** – Calculer –

Soient  $P(X) = 2 + X - X^2$ ,  $Q(X) = 2 - X + X^2$ ,  $R(X) = 2 + 2X + X^2$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$  est une base et déterminer les coordonnées de  $1, X, X^2$  dans  $\mathcal{B}'$ .

**EXERCICE 29:** – Cours – Calculer –

On se place dans  $E = \mathbb{R}_3[X]$

1. Montrer que les polynômes  $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$  forment une base de  $E$ .
2. Quelles sont en fonction de  $a, b, c, d$  les coordonnées dans cette base d'un élément de  $E$  s'écrivant  $aX^3 + bX^2 + cX + d$ .

**EXERCICE 30:** – Calculer –

Soient  $f, g, h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x + \cos x - e^x, \quad g(x) = 2x + 2 \cos x + e^x, \quad h(x) = 2x - \cos x + e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (id, \cos, \exp)$  est une base de  $F = Vect(id, \cos, \exp)$ .
2. Montrer que  $\mathcal{B}' = (f, g, h)$  est aussi une base de  $F$ .

**3.** Déterminer les coordonnées de  $\cos$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Indications

## Exercice 2

On pourra constater que la loi  $+$  est la loi habituelle. On pourra donc se demander ce qu'il est véritablement nécessaire d'étudier.

## Exercice 3

1. Là encore la loi  $+$  est la loi habituelle. Commencer par aller voir les propriétés les plus simples.
2. La loi  $\cdot$  est la loi habituelle.

## Exercice 8

7. Penser aux formules de trigonométrie.

## Exercice 12

1. b) On peut expliciter  $F$  et  $G$  soit tous 2 à l'aide d'une (ou plusieurs) équation(s) cartésienne(s), soit tous 2 à l'aide d'une expression paramétrique.
2. b) On peut trouver une équation cartésienne pour  $G$  ou alors plus rapide ici réutiliser la même technique que dans la question 1 en introduisant un système d'équations paramétriques.

## Exercice 17

Penser aux formules de trigo.

## Exercice 20

6. Les fonctions ne sont pas indépendantes.

## Exercice 22

1. On pourra penser à utiliser des limites pertinentes ainsi qu'à travailler sur les dérivées pour obtenir les éventuels coefficients. On pourra de plus s'intéresser à la dérivée pour montrer l'égalité finale.