

Racines

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours - Raisonner - Trouver un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers tels que $P(2 + \sqrt{2}) = 0$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours - Raisonner -

- Justifier que le polynôme $P(X) = X^5 + X^2 - 2$ admet au moins une racine réelle.
- Montrer que P' a exactement deux racines réelles α et β et les expliciter.
 - Justifier que les racines ainsi trouvées ne sont pas multiples.
 - Montrer qu'il existe des coefficients $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P' = (X - \alpha)(X - \beta)(5X^2 + bX + c)$$

et tel que $(5X^2 + bX + c)$ n'ait pas de racine réelle. *On ne demande pas d'expliquer b, c .*

- Étudier le signe de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto P'(x)$ suivant les valeurs de x .
- En déduire que P n'admet qu'une seule racine réelle. *(On pourra éventuellement faire appel à une calculatrice pour calculer certaines valeurs approchées si besoin.)*

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $X^{n+1} + \alpha X^n + \beta$ admette 1 comme racine multiple.

Divisibilité

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que B divise A , où :

- $B = X(X+1)(2X+1)$ et $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$
- $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$
- $B = X^2 - 2X \cos \theta + 1$ et $A = X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$. où $\theta \neq 0 [\pi]$ ☆

EXERCICE 5: [Indications] [Correction]

Déterminer les polynômes $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^n - R$ se factorisent par $(X-1)^2$.

Factorisation

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

- Soit $P = X^4 + 2X^2 + 1$.
 - Vérifier que i est racine de P .
 - En déduire une autre racine de P .
 - En déduire alors un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

- En déduire pour finir la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
- Faire de même pour $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - Calculer - Mobiliser -

Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants :

- $A = X^4 - 1$
- Classique et à connaître : $B = X^2 + X + 1$
- $C = X^4 + X^2 + 1$
- $D = X^3 + X^2 + X + 1$
- $E = X^6 + X^4 + X^2 + 1$
- $F = X^5 - 4X^4 + X^3 + 10X^2 - 4X - 8$ ☆

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] - Calculer - Mobiliser -

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes α tels que $\alpha^2 = i$.
- Écrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $P = X^2 + 1$.
- En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $Q = X^4 + 1$. ☆

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P_n = X^n - 1$

- Montrer que les $\alpha_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ sont racines de ce polynôme pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
 - Expliciter une racine réelle parmi celles évoquées ci-dessus.
 - En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_n
- Application : Chercher une factorisation dans $\mathbb{C}$ de
 - $A = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
 - $B = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction]

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. On se donne ci-dessous une équation que l'on souhaite résoudre :

$$(P')^2 = \lambda P$$

1. Étudier le degré des solutions possibles.
2. Justifier que P' admet exactement une seule racine et que celle-ci est racine double de P .
3. Trouver toutes les solutions possibles en les exprimant sous la forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – Raisonner – Chercher –

On cherche à résoudre l'équation $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

1. On suppose que P est solution.
 - a) Quel est le degré de P ?
 - b) Quel est le coefficient dominant de P ?
 - c) Justifier que P admet au moins une racine réelle. On la notera α .
2. a) Montrer que soit α est racine au moins double de P , soit on a $P'' = 6(X - \alpha)$.
b) Trouver les P possibles dans les deux cas. ☆
3. Répondre à la question posée. ☆

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Raisonner – Chercher – (ENS) ☆

On se propose de déterminer tous les polynômes non nuls P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$$

1. a) Soit α une racine de P . Montrer que α^2 est racine de P .
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P .
c) En déduire que le module de α est nécessairement égal à 0 ou 1.
2. Que peut-on dire de $(\alpha - 2)^2$? ☆
3. Montrer que P n'admet pas d'autre racine que 1.
4. Conclure.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Cours – Raisonner – (ENS) ☆☆

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toutes les racines sont soit complexes, soit de multiplicité paire. ☆☆

2. a) En déduire qu'il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2B \quad \text{où } B \text{ n'a aucune racine réelle et } B > 0$$

- b) Justifier que B est de degré pair.
3. On admettra pour la suite que les éventuelles racines complexes d'un polynôme réel sont présentes dans ledit polynôme avec la même multiplicité.
 - a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $B = Q \cdot \overline{Q}$ où $\overline{Q}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Q . ☆☆
 - b) En déduire qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que ☆

$$P = S^2 + T^2$$

Indications

Exercice 1 [Correction]

On pourra penser à la forme des racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 2 [Correction]

1. Regarder la parité du degré de P .
3. On a le signe de P' . Penser à utiliser la stratégie "habituelle" pour étudier le sens de variation de P

Exercice 7 [Correction]

en l'absence de calculs simples, on peut commencer par chercher une racine évidente dans la plupart des cas $(1, 2, 3, -1, -2, -3, i)$. Si tel est le cas, on pensera à vérifier si la racine est multiple.

3. On pourra commencer par poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^4 + x^2 + 1 = 0$.
5. On peut poser $y = x^2$ dans la résolution de $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

Exercice 9 [Correction]

2. b) On pourra remarquer que $T = \sum_{k=0}^6 (-X)^k$ et se ramener ensuite au cas $X^n - 1$.

Exercice 11 [Correction]

1. a) On pensera à faire d'abord une équation aux degrés.

Exercice 13 [Correction]

1. On pourra éventuellement faire un raisonnement par l'absurde.
2. a) On pourra éventuellement raisonner par récurrence de le degré de P .
3. a) On pourra penser à utiliser la décomposition de B dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1

On se souvient que les racines réelles des polynômes P réels de degré 2 sont "conjugués" au sens où elles s'écrivent $r_1 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et qu'alors P s'écrit $P = a(X - r_1)(X - r_2)$ où a est une constante.

On propose donc un polynôme dont la deuxième racine est $2 - \sqrt{2}$. Dans ce cas, il existe a tel que $P = a(X - (2 - \sqrt{2}))(X + (2 + \sqrt{2}))$. Développons :

$$P = a \left(X^2 - \left((2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) \right) X + (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = X^2 - 4X + (2^2 - 2) \right)$$

i.e.

$$P = a(X^2 - 4X + 2)$$

En prenant $a = 1$, on obtient bien un polynôme entier de degré 2 dont $2 + \sqrt{2}$ est bien racine. Ainsi, le polynôme

$$P = X^2 - 4X + 2 \text{ répond à la question}$$

Exercice 2

1. C'est un polynôme réel de degré impair. D'après le cours, on sait donc qu'il s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.

2. a) Tout d'abord, on a $P' = 5X^4 + 2X = X(5X^3 + 2)$. Ainsi,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5x^3 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ car la fonction "cube" est injective sur } \mathbb{R}.$$

b) α ou β sont racines double de P' si elles sont également racine des $(P')' = P''$. Or,

$$P'' = 20X^3 + 2$$

Ainsi

$$P''(0) = 2 \neq 0$$

0 n'est pas racine double.

$$P''\left(-\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 20\left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = -6 \neq 0$$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ n'est pas racine double.

c) D'après la divisibilité au niveau des racines, on sait qu'il existe un polynôme Q de degré $\deg P' - 2 = 2$ tel que

$$P' = (X - \alpha)(X - \beta)Q$$

On note alors

$$Q = aX^2 + bX + c$$

On a donc

$$P' = X \left(X + \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \right) (aX^2 + bX + c)$$

Mais ceci signifie que le coefficient dominant de P' est $1 \times 1 \times a = a$. Or, comme on sait que $P' = 5X^4 + 2X$, on en déduit que

$$a = 5$$

et donc que

$$P' = X \left(X - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \right) (5X^2 + bX + c)$$

De plus, le polynôme $5X^2 + bX + c$ ne peut avoir de racine réel, sinon : soit il existerait une autre racine pour P' que α et β , soit α ou β serait une racine double de P' , ce qui est exclu par la question précédente.

d) La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x^2 + bx + c$ est polynomiale et n'a pas de racine réelle. On sait donc qu'elle est de signe constant, celui de son coefficient dominant 5. Ainsi, elle est toujours strictement positive.

Ainsi, $P'(x)$ est du signe de $x \left(x + \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \right)$ qui est également polynomiale de degré 2 de coefficient dominant $1 > 0$.

$$P'(x) \text{ est donc positive en dehors de l'intervalle } \left[-\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}, 0 \right] \text{ et négative ailleurs.}$$

3. Le tableau de signe de P' permet de faire le tableau de variation de P . On s'aperçoit que la courbe ne peut couper l'axe des abscisses qu'une seule fois. La racine de P est donc unique.

Exercice 3

On pose $P = X^{n+1} + \alpha X^n + \beta$. 1 est racine multiple ssi 1 est racine de P et également racine de P' .

Or, $P' = (n+1)X^n + n\alpha X^{n-1}$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} 1 \text{ racine au moins double} &\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta = 0 \\ (n+1) + n\alpha = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ \alpha = -\frac{n+1}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{n} \\ \alpha = -1 - \frac{1}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, il n'y a qu'une seule solution et 1 est racine multiple ssi

$$\boxed{\alpha = -1 - \frac{1}{n}, \beta = \frac{1}{n}}$$

Exercice 4

1. B est de racines simples $0, 1, \frac{1}{2}$. B divise donc A ssi $0, -1, -\frac{1}{2}$ sont des racines de A . Or :

$$A(0) = 1 - 1 = 0$$

$$A(-1) = 0^{2n} - (-1)^{2n} + 2 - 1 = -1 + 1 = 0$$

$$A\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1 - 1 = 0$$

3. Le discriminant de A est

$$\Delta = 4(\cos \theta)^2 - 4 = 4 \sin^2 \theta$$

Ainsi, les racines de A sont

$$r_1 = \frac{2 \cos \theta - 2i \sin \theta}{2} = e^{-i\theta}, \quad r_2 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = e^{i\theta}$$

D'où

$$X^2 - 2X \cos \theta + 1 = (X^n - e^{i\theta})(X^n - e^{-i\theta})$$

Il n'y a plus qu'à réinjecter dans A , comme dans les cas précédents :

$$A(e^{i\theta}) = e^{i2n\theta} - 2e^{in\theta} \cos n\theta + 1$$

à ceci près qu'il faut observer que

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

D'où

$$A(e^{i\theta}) = e^{i2n\theta} - 2e^{in\theta} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + 1 = e^{i2n\theta} - e^{2in\theta} - e^0 + 1 = 0$$

Le polynôme A étant réel, on est certain que $e^{-in\theta}$ (qui est le conjugué de l'autre racine) est également racine de A . CQFD.

Exercice 5

On pose $P = X^n - R$. Comme l'ordre de la racine est deux dans le polynôme $(X-1)^2$, la divisibilité se fait ssi 1 est racine multiple, ce qui est équivalent à $P(1) = P'(1) = 0$.

$$0 = P(1) = 1 - R(1)$$

Ensuite, on a également $P'(1) = 0$, d'où

$$0 = P'(1) = n - R'(1)$$

En posant $R = aX + c$, ces égalités sont équivalentes au système suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a + b = 1 \\ a = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - n \\ a = n \end{cases}$$

Étant donné que c'est une équivalence, on peut dire que les solutions sont

$$\boxed{R = nX + 1 - n}$$

Exercice 6

1. a) $P(i) = i^4 + 2i^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.
b) Par conjugué, comme P est à coefficients réels, on en déduit que $-i$ est également racine.

c) D'après l'énoncé, on souhaite dans un premier temps poser

$$\boxed{\alpha = i, \quad \beta = -i}$$

Il existe alors un polynôme Q de degré $4 - 2 = 2$ tel que

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$$

On pose alors $Q = aX^2 + bX + c$. Par coefficient dominant de P qui vaut 1, on sait qu'on a

$$a \times 1 \times 1 = 1$$

d'où

$$a = 1$$

ensuite, par constante de P , on sait que d'une part, par définition $P = X^4 + 2X^2 + 1$, la constante est 1 et que, par factorisation $P = (X - \alpha)(X - \beta)Q$, la constante est $\alpha\beta c$. D'où

$$i \times \bar{i} \times c = 1$$

i.e.

$$c = 1$$

On peut, pour finir, développer le reste :

$$P = (X - i)(X - \bar{i})(X^2 + bX + 1) = (X^2 + 1)(X^2 + bX + 1) = X^4 + bX^3 + \text{degré inférieur}$$

Or

$$P = X^4 + 2X^2 + 1$$

D'où $b = 0$ et ainsi

$$\boxed{P = (X - i)(X - \bar{i})(X^2 + 1)}$$

d) On sait (ou on peut calculer) que $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, donc

$$\boxed{P = (X - i)^2(X + i)^2}$$

2. i est bien racine de P avec $P(i) = 0$.

En procédant de même que dans la question précédente, on trouve

$$P = (X - i)(X - \bar{i})(X^2 - 2X + 2)$$

puis, après recherche de racines complexes :

$$\boxed{P = (X - i)(X - \bar{i})(X - 1 - i)(X - 1 + i)}$$

Exercice 7

1. Il est rapide de voir par identité remarquable (ou par racine évidentes) que

$$X^4 - 1 = (X^2)^2 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

D'où

$$\boxed{X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)}$$

2. La résolution classique sur des polynôme de degré 2 nous dit que les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{j}$ ($= j^2$). Ainsi, comme le coefficient dominant est 1 :

$$\boxed{X^2 + X + 1 = 1 \times (X - j)(X - \bar{j})}$$

3. • Méthode 1 :

On cherche les solutions de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ et on pose $y = x^2$. On sait alors que l'équation équivaut à :

$$y^2 + y + 1 = 0.$$

Or les solutions de cette équation sont $j, \bar{j} = j^2$, d'où x est solution de l'équation initiale ssi

$$x^2 = j \quad \text{ou} \quad x^2 = j^2$$

i.e.

$$x^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad x = \pm j$$

i.e.

$$x = \pm e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad x = \pm j$$

Ainsi, comme le coefficient dominant est 1, on a

$$\boxed{C = X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X - j)(X + j)}$$

• Méthode 2 :

Avec $Y = X^2$, on a

$$C = Y^2 + Y + 1 = (Y - j)(Y - \bar{j}) \quad (\text{d'après la as préc.})$$

i.e.

$$C = (X^2 - j)(X^2 - \bar{j})$$

Or, on observe que pour $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\beta = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, on a

$$\alpha^2 = j, \quad \beta^2 = \bar{j}$$

D'où

$$X = (X^2 - \alpha^2)(X^2 - \beta^2) = (X - \alpha)(X + \alpha)(X - \beta)(X + \beta)$$

i.e.

$$C = X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X + e^{i\frac{\pi}{3}})(X - j)(X + j)$$

• Remarque :

C étant à coefficient réel, on devrait trouver les racines "2 par 2" conjuguées les une des autres.

C'est bien le cas ici. En effet, concernant la racine $-e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$-e^{i\frac{\pi}{3}} = \underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\pi + \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$$

et ainsi, concernant la racine $e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = -(-e^{i\frac{\pi}{3}}) = -\bar{j}$$

Elles vont donc bien 2 par 2.

4. On voit que $-1, i$ sont racines évidentes. Alors $-i$ est également racine car D est à coefficients réels. D étant de degré 3 avec comme coefficient dominant 1, on obtient :

$$D = X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - i)(X + i)$$

5. On pose $Y = X^2$. Ainsi

$$E = Y^3 + Y^2 + Y + 1$$

et d'après la question précédente

$$E = (Y - 1)(Y - i)(Y + i) = (X^2 - 1)(X^2 - i)(X^2 + i)$$

On peut faire comme dans la question 3, ou alors exploser encore un autre raisonnement : On observe que 1 et -1 sont racines évidentes de $(X^2 - 1)$ et donc de E .

Puis, en utilisant $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, et en posant $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$, on observe que $\alpha^2 = i$ et donc que α et $-\alpha$ sont racines de $X^2 - i$ et donc de E .

Pour finir, comme E est à coefficients réels, il admet également $\bar{\alpha} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $-\bar{\alpha} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$ comme racine. D'où la décomposition :

$$E = X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X - 1)(X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X + e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X + e^{-i\frac{\pi}{4}})$$

i.e.

$$E = (X - 1)(X + 1) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \right) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \right)$$

6. 2 et -1 sont racines "évidentes". En dérivant, on constate qu'elles sont également racines doubles toutes les deux car $F'(2) = F'(-1) = 0$.

On sait donc que

$$E = (X - 2)^2(X + 1)^2(aX + b)$$

le coefficient dominant nous montre que $a = 1$. La constante nous montre que

$$(-2)^2(1)^2b = -8$$

D'où

$$b = -2$$

et ainsi,

$$F = X^5 - 4X^4 + X^3 + 10X^2 - 4X - 8 = (X - 2)^3(X + 1)^2$$

Exercice 8

1. • Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\alpha^2 = i &\Leftrightarrow \alpha^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

• Méthode 2 :

On pose $\alpha = a + ib$ avec a, b réels. Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha^2 = i &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ ou } a = -b \\ 2ab = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -b \\ -2a^2 = 1 \text{ impossible} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

D'où les solutions

$$\alpha = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

2. Par racines, $P = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

3. Trouver la décomposition en éléments simples de Q revient à trouver ses racines avec leur multiplicité.

• Cerchons les candidats pour les racines de Q :

Si α est une racine de Q , par définition, on a $Q(\alpha) = 0$. De plus, on observe que

$$Q(X) = P(X^2).$$

Ainsi, nécessairement

$$P(\alpha^2) = 0.$$

On en déduit que α^2 est racine de P et donc que $\alpha^2 = \pm i$.

Le polynôme Q est à coefficients réels, donc les conjugués des racines sont encore racine. Il existe donc 4 racines distinctes pour un polynôme de degré 4. La décomposition est terminée et comme le polynôme a comme coefficient dominant 1, on a finalement

$$Q = 1 \times \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Exercice 9

1. a) On a

$$P_n \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^n - 1 = e^{2k\pi} - 1 = 0$$

- b) Parmi ces racines, il y a $\alpha_0 = 1$ (qui est aussi racine évidente.)
c) On sait que les éléments α_k sont deux à deux distincts car les arguments sont tous différents dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, on dispose de n racines 2 à 2 distinctes pour un polynôme de degré n , avec comme coefficient dominant 1. D'où

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$$

2. a) On veut chercher les racines de A en résolvant $A(x) = 0$, c'est-à-dire

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^4 x^k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^5 - 1}{x - 1}}_{x \neq 1} = 0 \Leftrightarrow x^5 - 1 = 0, \quad x \neq 1$$

d'où

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow P_5(x) = 0, \quad x \neq 1$$

C'est alors une application directe de la question 1 puisque les racines de P_5 sont connues.

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \prod_{k=1}^4 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$$

- b) Une fois qu'on a vu qu'en posant $y = -x$ dans la résolution de $B(x) = 0$, on obtient comme dans le précédent (mais avec $n = 7$ au lieu de $n = 5$) la décomposition

$$X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 = \prod_{k=1}^6 (X + e^{i\frac{2k\pi}{7}})$$

Exercice 10

1. Soit $n = \deg P$.
En supposant que le polynôme P soit non nul, l'équation aux degrés est la suivante :
- $$2(n - 1) = n$$
- dont la solution est $n = 2$.
2. De la question précédente, on tire que P' est de degré 1. Il admet donc exactement une racine. On la note α . Il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$P' = a(X - \alpha)$$

L'égalité $P = \frac{1}{\lambda} P'^2$ donne que $P = \frac{1}{\lambda} a^2 (X - \alpha)^2$ donne directement que α est racine double de P .

3. De la question précédente, on tire que P est forcément sous la forme $P = c(X - \alpha)^2$, avec $c \in \mathbb{C}$ non nul. Il reste à vérifier que lesquels de ces polynômes répondent bien à l'équation demandée en calculant P' .
On a $P' = 2c(X - \alpha)$ et

$$P'^2 = 4c^2(X - \alpha)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} P'^2 = \lambda P &\Leftrightarrow 4c^2(X - \alpha)^2 = \lambda c(X - \alpha)^2 \\ &\Leftrightarrow 4c = \lambda \end{aligned}$$

Ainsi, il y a une infinité de solutions :

$$\left\{ P = \frac{\lambda}{4} (X - \alpha)^2 \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

Exercice 11

1. a) On pose n le degré de P .

- si $n < 2$

on a $P'' = 0$ et donc la seule solution est $P = 0$ $n = 0$ est donc impossible.

- si $n \geq 2$

On suppose que P est solution, alors

$$\deg P'P'' = (n - 1) + (n - 2) \quad \text{et} \quad \deg P = n$$

D'où

$$n = 2n - 3$$

autrement dit,

$$\deg P = 3$$

- b) On note $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $a \neq 0$ puisque $\deg P = 3$. Alors

$$P' = 3aX^2 + \dots, \quad P'' = 6aX + \dots$$

Les coefficients dominants vérifient alors l'équation

$$3a \times 6a = 18a$$

et donc, comme $a \neq 0$ et

$$\text{le coefficient dominant de } P \text{ est } a = 1$$

- c) P est à coefficients réels de degré impair, donc P admet au moins une racine réelle.

2. a) Comme α est racine de P , alors $P(\alpha) = 0$ et donc, soit $P'(\alpha) = 0$, soit $P''(\alpha) = 0$.

- si $P'(\alpha) = 0$,

alors α est racine multiple.

- Si $P''(\alpha) = 0$,

alors α est racine de P'' . Comme P'' est de degré 1 et de coefficient dominant $6a = 6$, alors

$$P'' = 6(X - \alpha).$$

b) • si α est racine multiple :

On sait que P s'écrit

$$P = (X - \alpha)^2(X - b)$$

où $b \in \mathbb{R}$.

On peut réinjecter dans l'équation complète ou, pour simplifier un peu, chercher une équation sur les constantes en réinjectant dans l'équation et on trouve alors en simplifiant

$$(b - \alpha)^2 = 0$$

et donc $b = \alpha$, c'est-à-dire

$$P = 6(X - \alpha)^3$$

- si α est racine de P'' :

Alors $P'' = 6(X - \alpha)$. On intègre deux fois pour obtenir P et on en déduit l'existence de λ, μ tels que

$$P = (X - \alpha)^3 + \lambda X + \mu$$

Or, α est racine de P , donc, en réinjectant dans $P(\alpha) = 0$, on a

$$\mu = \lambda\alpha$$

et P s'écrit

$$P = (X - \alpha)^3 + \lambda(X - \alpha)$$

En réinjectant tout ça dans la recherche des constantes de $P'P'' = 18P$, on trouve $\lambda = 0$.

en conclusion, dans les deux cas,

$$\boxed{P = 6(X - \alpha)^3}$$

3. On sait déjà que les solutions s'écrivent sous la forme $P = 6(X - \alpha)^3$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il ne reste qu'à réinjecter dans l'équation pour vérifier qu'en effet, tous ces polynômes répondent à la question. L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\{P = 6(X - \alpha)^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 12

1. a) En réinjectant α dans la formule de l'énoncé, on a

$$P(\alpha)P(\alpha + 2) + P(\alpha^2) = 0$$

ce qui donne avec $P(\alpha) = 0$:

$$0 + P(\alpha^2) = 0$$

et donc α^2 est bien une racine de P .

- b) Un raisonnement par récurrence en se servant de la question précédente donne immédiatement le résultat.
- c) Dans tous les autres cas, on a une infinité de racines distinctes (à détailler), ce qui est impossible, car tout polynôme à un nombre fini de racines.

2. En réinjectant $\alpha - 1$ dans l'égalité de l'énoncé, on obtient

$$P(\alpha - 2) \underbrace{P(\alpha - 2 + 2) + P((\alpha - 2)^2)}_{=P(\alpha)=0} = 0$$

D'où

$$P((\alpha - 2)^2) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{(\alpha - 2)^2 \text{ est une racine de } P.}$

3. Si α est une racine, alors α est de module 0 ou 1.

- Si α est de module 0,

alors

$$\alpha = 0$$

Or, d'après la question précédente, $\alpha - 2 = -2$ est racine également. Mais -2 n'est pas de module 1 ou 0. Il y a une contradiction.

- Si α est de module 1,

alors $|\alpha - 2| = 0$ ou 1, d'où $|\alpha - 2|^2 = 0$ ou 1. Or

$$|\alpha - 2|^2 = (\alpha - 2)(\bar{\alpha} - 2) = \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{=|\alpha|^2=1} - 4\operatorname{Re}(\alpha) + 4 = 5 - 4\operatorname{Re}(\alpha)$$

Il y a 2 possibilités : Soit

$$0 = 5 - 4\operatorname{Re}(\alpha), \quad \text{d'où } \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{5}{4}$$

soit

$$1 = 5 - 4\operatorname{Re}(\alpha), \quad \text{d'où } \operatorname{Re}(\alpha) = 1$$

Dans le premier cas, on a nécessairement $|\alpha| > 1$ car $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$. Ce cas est donc impossible.

Dans le deuxième cas, la seule possibilité pour avoir $|\alpha| = 1$ est alors que la partie imaginaire soit nulle, sinon on aurait $|\alpha| > 1$.

Conclusion, on a bien que la seule racine possible est $\alpha = 1$.

4. D'après le théorème de D'Alembert, tout polynôme non nul se décompose en produit de polynôme de type $(X - \alpha)^k$. Or, on vient de démontrer qu'il n'y a pas d'autre racine possibles que $\alpha = 1$. Ainsi, les seules solutions possibles sont les polynômes

$$P = a(X - 1)^k, \quad \text{avec } a \neq 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

Vérifions maintenant parmi ceux-ci lesquels correspondent à l'égalité demandée en réinjectant dans la formule de l'énoncé :

$$\begin{aligned} P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0 &\Leftrightarrow a(X-1)^k a(X-1+2)^k + a(X^2-1)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow a(X-1)^k (X+1)^k + ((X-1)(X+1))^k = 0 \\ &\Leftrightarrow a(X-1)^k (X+1)^k + (X-1)^k (X+1)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Les polynôme possibles sont donc

$-(X-1)^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}$

Exercice 13

1. On suppose que a soit une racine réelle de multiplicité impaire. Alors P s'écrit

$$P = (X - a)^{2k+1} P_2$$

avec P_2 non nul qui ne s'annule pas en a . Ainsi, la fonction $x \mapsto (x - a)^{2k+1}$ change de signe en a et la fonction $x \mapsto P_2(x)$ est différente de 0 en a et donc, par continuité, ne change pas de signe en a . Au global, $P : x \mapsto P(x)$ change de signe, ce qui est contradictoire.

2. a) On peut par exemple raisonner par récurrence sur n le degré de P .

- Initialisation si $n = 0$:

Alors P est constant (on note $P = c$) et donc on peut écrire $P = A^2 \times B$ avec $A = 1$ et $B = c$ qui ne s'annule pas et qui est strictement positif car P l'était.

- Hérédité : (résumé)

Si P d'admet pas de racines, alors on peut poser directement $A = 1$ et $B = P$.

Sinon, P admet au moins une racine a . D'après la question 1, on sait qu'elle est de multiplicité paire. On sait alors par décomposition qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que

$$P = (X - a)^{2k} Q$$

Or, comme la puissance de $(X - a)$ est paire, on en déduit que, P étant toujours positif et $(X - a)^{2k}$ également, le polynôme Q l'est lui aussi. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Il existe alors $A, B \in \mathbb{R}[X]$ comme stipulé dans l'énoncé tels que

$$Q = A^2 B$$

et ainsi,

$$P = (X - a)^{2k} A^2 B$$

b) Par l'absurde, si B n'est pas degré pair, alors il est de degré impair. Ainsi, par continuité, B peut s'annuler, ce qui est contradictoire.

3. a) Chaque racine de B est associée à son conjugué (avec même multiplicité) Il suffit donc de les assembler 2 par deux, en prenant par exemple "à gauche" les racines de type $a + ib$ avec ($b > 0$) avec multiplicité et "à droite", leur conjugué. Ainsi, on obtient ce qui est demandé.

b) Q est un polynôme à coefficients complexes qui peut donc s'écrire

$$Q = C + iD$$

de manière à ce que C, D soient deux polynômes à coefficients réels. Ainsi,

$$B = (C + iD)(C - iD)$$

et donc

$$B = C^2 + D^2$$

En multipliant finalement par A^2 , on obtient

$$P = A^2 C^2 + A^2 D^2$$

d'où, avec $S = AC \in \mathbb{R}[X]$, $T = AD \in \mathbb{R}[X]$, on obtient bien

$$\boxed{P = S^2 + T^2}$$