

Graphes probabilistes (Memo)

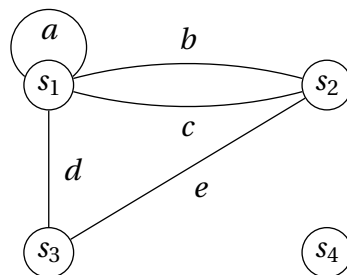
Définition 12.1 (Graphe, sommets, arêtes, sommets adjacents).

Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble S de points appelés *sommets*, et d'un ensemble A d'*arêtes*, tels qu'à chaque arête sont associés deux sommets, appelés ses *extrémités*. Deux sommets qui sont les extrémités d'une arête sont dits *adjacents*.

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une *boucle*. Deux arêtes peuvent aussi avoir les mêmes extrémités (on dit alors qu'elles sont *parallèles*).

Exemple 12.1. On considère le graphe G_1 , de la figure 12.1. Le sommet s_4 est un sommet isolé, l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3 , puisqu'ils sont reliés par une arête.

FIGURE 12.1 – Le graphe G_1



Définition 12.2 (Ordre d'un graphe).

L'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition 12.3 (Degré d'un sommet, parité d'un sommet).

On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

Exemple 12.2. Dans la figure 12.1, s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.

Théorème 12.1 (Formule d'Euler ou formule des poignets de main).

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

On considère un graphe constitué de n sommets notés $A_1, \dots, A_n$ et de p arêtes.

En désignant, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par d_i le degré du sommet A_i , alors on a : $\sum_{i=1}^n d_i = 2p$.

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

Proposition 12.2. Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.

Définition 12.4 (Graphe complet).

Un graphe (simple) est dit *complet* si tous ses sommets sont *adjacents*, c'est-à-dire si toutes les arêtes possibles existent. On appellera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).

Définition 12.5 (Chaîne, longueur d'une chaîne, cycle).

Une *chaîne* dans un graphe G est une suite finie : $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3; \dots a_n; s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités.

La *longueur* de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent; la chaîne est *fermée* si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un *cycle*.

Remarque. Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou par seulement la suite de ses arêtes.

Définition 12.6 (Graphe connexe). Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition 12.7 (Distance entre deux sommets). Soit G un graphe connexe, s et s' , deux sommets quelconques de G . Le graphe étant connexe, il existe au moins une chaîne reliant s et s' . On appelle *distance entre s et s'* la plus petite des longueurs des chaînes reliant s à s' .

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une chaîne. On dit parfois que la distance entre ces sommets est infinie.

Définition 12.8 (Diamètre d'un graphe). On appelle *diamètre* d'un graphe connexe, la plus grande distance entre ses sommets.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, on dit parfois que son diamètre est infini.

Définition 12.9. On appelle graphe orienté un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée *origine* ou *extrémité initiale* à l'autre, appelée *extrémité terminale*.

Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot « orienté » pour préciser; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner.

En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).

Définition 12.10 (Chaîne eulérienne). Une chaîne est *eulérienne* si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe; si la chaîne est un cycle (sommet de départ et de fin confondus), on l'appelle *cycle eulérien*.

Le théorème suivant, dit théorème d'EULER, qu'on admettra, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 12.3 (d'EULER). *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*

De façon plus précise :

- si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien;
- le graphe ne peut avoir un seul sommet impair;
- si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

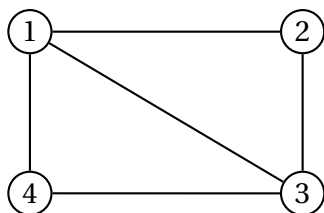
La propriété suivante, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

Proposition 12.4. *Un graphe connexe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes.

Définition 12.11. Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n . On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A = (a_{i;j})$, où $a_{i;j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j .

Exemple 12.3. Le graphe G ci-dessous a la matrice d'adjacence A ci-contre.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. L'allure de la matrice d'adjacence donne des indications sur la nature du graphe :

- La matrice d'adjacence d'un graphe sans boucle n'a que des 0 sur la diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe sans arête parallèle n'a que des 1 ou des 0.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe complet n'a que des 1, hormis sur sa diagonale où il y a des 0.

Cas d'un graphe orienté On a vu que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. Il n'en va pas de même pour celle d'un graphe orienté car si une arête a pour extrémité initiale le sommet A et pour extrémité finale le sommet B , il n'en existe pas forcément une allant de B vers A , aussi dans ce cas le coefficient correspondant aux arêtes allant de A vers B ne sera pas le même que le coefficient correspondant aux arêtes allant de B vers A .

On donc doit convenir d'un sens de lecture pour la matrice d'un graphe orienté.

Définition 12.12. Par convention, dans la matrice d'adjacence d'un graphe G orienté, le terme a_{ij} (i -ième ligne, j -ième colonne) désigne le nombre d'arêtes d'origine le sommet i et d'extrémité finale le sommet j .

Propriété 12.5. Soit G un graphe de matrice d'adjacence A . Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice $i; j$ de la matrice A^n .

Théorème 12.6 (Condition nécessaire et suffisante de connexité).

Si G est un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et dont la matrice d'adjacence est notée M , alors G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + M + \dots + M^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Définition 12.13 (Centralité).

Soit G un graphe non orienté, constitué de n sommets notés, $s_1, s_2, \dots, s_n$, ($n \geq 2$) et on note, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d_i le degré du sommet s_i .

On appelle degré de centralité du sommet s_i , le réel $\frac{d_i}{n-1}$.

Remarques. Le degré de centralité du sommet s_i est donc égal au nombre de sommets adjacents à s_i divisé par le nombre de sommets du graphe autres que s_i . Cette quantité est donc comprise entre 0 et 1.

Un degré proche de 1 signifie une forte centralité.

La mesure du degré renseigne sur l'importance du sommet. Un sommet ayant un degré élevé est considéré comme central car relié à beaucoup d'autres sommets. Il a un fort potentiel d'attraction.

Si le graphe est orienté, chaque sommet possède deux degrés de centralité, l'un comptant les liens entrants et l'autre comptant les liens sortants.

Définition 12.14 (Intermédiarité).

Soit G un graphe, constitué de n sommets notés, $s_1, s_2, \dots, s_n$, ($n \geq 2$) et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons pour tout i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $n_{i,j}$ le nombre total de plus courts chemins entre s_i et s_j et $n_{i,j}(s_k)$ le nombre de plus courts chemins entre s_i et s_j passant par s_k .

On appelle degré d'intermédiarité du sommet s_k , le réel
$$\sum_{i=1, i \neq k}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{n_{i,j}(s_k)}{n_{i,j}}.$$

Remarque. Le degré d'intermédiarité d'un sommet est donc la somme des fréquences d'apparition du sommet dans l'ensemble des plus courts chemins entre deux sommets quelconques du graphe.

Définition 12.15. On appelle *graphe pondéré* un graphe tel que, à chaque arête a est associé un poids P_a .

Remarque. En ECG nous nous limiterons aux graphes pondérés par des poids positifs.

Les applications des graphes pondérés sont nombreuses : cartes routières avec des indications de durée, de tarif ou de distance portée sur des routes entre deux lieux, par exemple.

Théorème 12.7. Soit G un graphe connexe, éventuellement orienté, l'algorithme de DIJKSTRA fournit systématiquement la plus courte chaîne d'un sommet initial à tous les autres sommets du graphe.

Exemple 12.4.

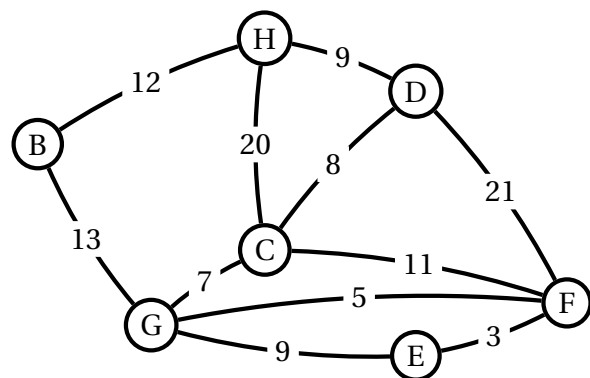
Des touristes sont logés dans un hôtel H.

Un guide souhaite leur faire visiter la région en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique signalées par l'Office du tourisme.

Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentées sur le graphe ci-contre. Sur chaque arête figure la longueur en km des différents tronçons.

Un musée est situé en E.

Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E.



<i>H</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	choix du sommet	coefficient
0(<i>H</i>)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	<i>H</i>	0
<i>X</i>	12(<i>H</i>)	9(<i>H</i>)	∞	∞	∞	20	<i>D</i>	9
<i>X</i>	12(<i>H</i>)	<i>X</i>	30(<i>D</i>)	∞	∞	17(<i>D</i>)	<i>B</i>	12
<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	30(<i>D</i>)	∞	25(<i>B</i>)	17(<i>D</i>)	<i>C</i>	17
<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	28(<i>C</i>)	∞	24(<i>C</i>)	<i>X</i>	<i>G</i>	24
<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	28(<i>C</i>)	33(<i>G</i>)	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>F</i>	28
<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	31(<i>F</i>)	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>E</i>	31

Le plus court chemin pour aller de H vers E mesure 31 km : c'est H-D-C-F-E.

On est effectivement arrivé à E en venant de F, à F en venant de C, à C en venant de D et à D en venant de H.