

Compléments sur le calcul matriciel – TD₃

Matrices

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times A^\top = 0$. Montrer que $A = 0$.

Réponse

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $A^\top = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $A \times A^\top = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition du produit matriciel, on a : $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,i}$. Or, $b_{k,i} = a_{i,k}$. Donc, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2$.

Or, par hypothèse, $c_{i,i} = 0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,k} \geq 0$.

Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,k} = 0$. Ceci est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc,

$$A = 0$$

Remarque : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}^\top = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{i,j} = \overline{a_{i,j}}$. On suppose que $A \times \overline{A}^\top = 0$.

On note $A \times \overline{A}^\top = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (on dit que $\overline{A}^\top$ est la transconjugée de A). Comme dans le cas réel, on a : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$0 = c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times \overline{a_{i,k}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{|a_{i,k}|^2}_{\geq 0}.$$

Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,k} = 0$. Ceci est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc,

$$A = 0$$

Remarque 2 : On peut répondre à la question à l'aide d'un produit scalaire.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ du produit scalaire usuel : $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$.

L'hypothèse donnée devient alors $\langle A^\top, A^\top \rangle = 0$.

Par le caractère défini du produit scalaire, $A^\top = 0$, donc, $A = 0$.

Exercice 2 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_3 .
2. En déduire A^{-1} et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponse

1. On calcule A^2 et on trouve $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. ► De l'égalité précédente, on déduit que : $\left(\frac{1}{2} \cdot (A + 3I_3)\right) \times A = I_3$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A + 3I_3)$.

► La polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A . Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^n par P . On en déduit l'existence de $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$X^n \stackrel{(*)}{=} P \times Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(P) = 2.$$

On en déduit que R est de la forme $R = a_n \times X + b_n$ où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

On remarque que les racines de P sont 1 et 2. En évaluant $(*)$ en 1 et en 2 on a :

$$\begin{cases} 1 &= a_n + b_n \\ 2^n &= 2a_n + b_n \end{cases}$$

Après résolution, on trouve $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

On déduit alors de (*) que

$$A^n = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{=0} + R(A) = (2^n - 1).A + (2 - 2^n).I_n.$$

Exercice 3 :

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

et f l'endomorphisme canoniquement associé à J .

1. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
2. En déduire les puissances successives de J .

Réponse

1. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Par définition de J , on a :

$$f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = e_1, \quad f(e_3) = e_2, \quad \dots, \quad f(e_n) = e_{n-1}.$$

Donc,

$$f^2(e_1) = 0, \quad f^2(e_2) = f(e_1) = 0, \quad f^2(e_3) = f(e_2) = e_1, \quad \dots, \quad f^2(e_n) = e_{n-2}.$$

Donc, la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. En procédant comme dans la question précédente, $f^k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} & \text{si } i-k \geq 1 \\ 0 & \text{si } i-k \leq 0 \end{cases}$.

Donc,

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \geq n, J^k = 0.$$

Exercice 4 :

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente : c'est-à-dire une matrice telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.
Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible.

Indication : penser à la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique.

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A$ et B est nilpotente.

Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $A + B \in GL_n(\mathbb{K})$.

Réponse

1. En développant et en utilisant que $N^p = 0$, on a :

$$(I_n - N) \times (I_n + N + \dots + N^{p-1}) = I_n - N^p = I_n.$$

On en déduit que $I_n - N$ est inversible et $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + \dots + N^{p-1}$.

2. ($\Rightarrow$) On suppose que A est inversible. Montrons que $A + B$ est inversible.

On a : $A + B = A \times (I_n + A^{-1} \times B)$.

De plus, on sait que A et B commutent, donc, $A \times B = B \times A$.

En multipliant par A^{-1} à droite et à gauche dans l'égalité précédente, il vient $B \times A^{-1} = A^{-1} \times B$.

Donc, A^{-1} et B commutent.

On en déduit alors que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(A^{-1} \times B)^m = (A^{-1})^m \times B^m$.

Comme B est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$.

Donc, $(A^{-1} \times B)^p = (A^{-1})^p \times B^p = 0$.

Ainsi, $A^{-1} \times B$ est nilpotente.

Notons $N = -A^{-1} \times B$. On a $N^p = (-1)^p \cdot (A^{-1} \times B)^p = 0$.

Donc, N est nilpotente.

Par **Q1**, $I_n + A^{-1} \times B = I_n - N$ est inversible.

Donc, $A + B = A \times (I_n + A^{-1} \times B)$ est inversible comme produit de matrice inversible.

($\Leftarrow$) On suppose que $A + B$ est inversible. Montrons que A est inversible.

On a : $A = A + B - B = (A + B) \times (I_n - (A + B)^{-1} \times B)$.

De plus, on sait que A et B commutent, donc, $(A + B) \times B = A \times B + B^2 = B \times A + B^2 = B \times (A + B)$.

On en déduit que $A + B$ et B commutent. On en déduit comme précédemment que $(A + B)^{-1}$ et B commutent, puis, comme B est nilpotente, que $(A + B)^{-1} \times B$ est nilpotente.

Donc, par **Q1**, la matrice $I_n - (A + B)^{-1} \times B$ est inversible.

Ainsi, $A = (A + B) \times (I_n - (A + B)^{-1} \times B)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Exercice 5 :

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Résoudre l'équation $X + \text{tr}(X).A = B$ où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication : commencer par calculer la trace de la matrice $X + \text{tr}(X).A$.

Réponse

On raisonne par Analyse-Synthèse.

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Analyse.

On suppose que X est solution. On a alors $\text{tr}(X + \text{tr}(X).A) = \text{tr}(B)$.

Or, par linéarité de la trace, $\text{tr}(X + \text{tr}(X).A) = \text{tr}(X) + \text{tr}(X) \times \text{tr}(A) = \text{tr}(X) \times (1 + \text{tr}(A))$.

Donc,

$$\text{tr}(X) \times (1 + \text{tr}(A)) = \text{tr}(B). \quad (\star)$$

► **Cas 1** : $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$.

On aboutit à une contradiction dans $(\star)$. Donc, dans ce cas,

l'ensemble des solutions est vide.

► **Cas 2** : $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$.

Dans $(\star)$, on a $0 = 0$. Cependant, on a $X = B - \text{tr}(X).A$, donc on peut dire que $X = B + \lambda.A$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Synthèse.

On suppose que $X = B + \lambda.A$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. On alors $\text{tr}(X) = \text{tr}(B) + \lambda \cdot \text{tr}(A) = -\lambda$.

Donc, $X + \text{tr}(X).A = B + \lambda.A - \lambda.A = B$.

Donc, X est bien solution.

Ainsi, dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$\{B + \lambda.A \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

► **Cas 3** : $\text{tr}(A) \neq -1$.

Dans $(\star)$, on a $\text{tr}(X) = \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}$.

Donc, $X = B - \text{tr}(X).A = B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.A$.

Synthèse.

On suppose que $X = B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.A$. On alors

$$\text{tr}(X) = \text{tr}(B) - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)} \cdot \text{tr}(A) = \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.$$

Donc, $X + \text{tr}(X).A = B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.A + \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.A = B$.

Donc, X est bien solution.

Ainsi, dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}.A \right\}.$$

Matrices semblables

Exercice 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^3 = 0$ et $A \neq 0$.

- Montrer que si $A^2 \neq 0$, alors A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Montrer que si $A^2 = 0$, alors A est semblable à la matrice $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse

Indications (il manque des justifications mais vous saurez compléter !)

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canonique associé à A .

On sait que $A^2 \neq 0$, donc, $f^2 \neq 0$.

Il existe donc, $u \in \mathbb{K}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$.

Comme dans l'exercice 11, on montre que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ est libre et composée de $3 = \dim(\mathbb{K}^3)$ vecteurs.

On en déduit que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{K}^3$. La matrice de f dans cette base de A' .

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canonique associé à A .

On sait que $A^2 = 0$, donc, $f^2 = 0$. On en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

D'où, par le théorème du rang, $3 = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f))$.

Donc, comme $\dim(\text{Ker}(f))$ est un entier, $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ ou $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$.

Si, $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$, alors $\text{Ker}(f) = \mathbb{K}^3$ et $f = 0$. Contradiction avec $A \neq 0$.

Donc, $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$, puis, $\text{rg}(f) = 1$.

Soit $v \in \text{rg}(f)$ non nul. On note $v = f(u)$.

On a $v \in \text{Ker}(f)$ et on complète (v) en une base (v, w) de $\text{Ker}(f)$.

On montre ensuite que (u, v, w) est une base de $\mathbb{K}^3$. La matrice de f dans cette base de A'' .

Exercice 7 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Réponse

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A (c'est-à-dire, A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Par hypothèse, $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}$. On en déduit l'existence de $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.

Montrons que la famille $\mathcal{F} = (f^{n-1}(u), f^{n-2}(u), \dots, f(u), u)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\lambda_1 \cdot f^{n-1}(u) + \lambda_2 \cdot f^{n-2}(u) + \dots + \lambda_n \cdot u = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

On prend l'image par f^{n-1} des deux côtés de l'égalité précédente (on utilise que $f^{n-1}(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$ car f est linéaire). Comme $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}$, on a :

$$\lambda_n \cdot f^{n-1}(u) = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Or, $f^{n-1}(u) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. Donc, $\lambda_n = 0$. D'où,

$$\lambda_1 \cdot f^{n-1}(u) + \lambda_2 \cdot f^{n-2}(u) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot f(u) = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

En prenant l'image par f^{n-2} des deux côtés de l'égalité, on montre de même que $\lambda_{n-2} = 0$. Puis de proche en proche $\lambda_{n-3} = \dots = \lambda_1 = 0$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre et est composée de $n = \dim(\mathbb{K}^n)$ vecteurs. C'est donc une base de E . De plus,

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(f) = A'.$$

Les matrices A et A' représente le même endomorphisme dans des bases différentes, donc

Les matrices A et A' sont semblables.

Matrices définies par blocs

Exercice 8 :

Soient A, B, C et D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit les matrices par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

On suppose que $M^\top \times J \times M = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Réponse

► On a

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}.$$

D'où (après calculs),

$$M^\top \times J \times M = \begin{pmatrix} A^\top \times A - C^\top \times C & A^\top \times B - C^\top \times D \\ B^\top \times A - D^\top \times C & B^\top \times B - D^\top \times D \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} A^\top \times A - C^\top \times C &= I_n & (1) \\ A^\top \times B - C^\top \times D &= 0 & (2) \\ B^\top \times A - D^\top \times C &= 0 & (3) \\ B^\top \times B - D^\top \times D &= I_n & (4). \end{cases}$$

► Par l'absurde, supposons A non inversible. On en déduit l'existence de $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $A \times X = 0$. On multiplie (1) à droite par X et à gauche par $X^\top$. On a alors

$$-X^\top \times C^\top \times C \times X = X^\top \times X$$

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $C \times X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Comme on travaille dans $\mathbb{R}$, on a :

$$X^\top \times X = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad X^\top \times X = -X^\top \times C^\top \times C \times X = -(C \times X)^\top \times C \times X = -(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0.$$

Donc, $X^\top \times X = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{x_n^2}_{\geq 0} = 0$. D'où, $x_1 = \dots = x_n = 0$. Ainsi $X = 0$. Contradiction ($X \neq 0$)! Donc

A est inversible.

► De la même manière, en utilisant (4), on montre que

D est inversible.

Exercice 9 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Dans cette question, on suppose A inversible. Montrer que $\det(I_n - A \times B) = \det(I_n - B \times A)$.
2. Effectuer les produits matriciels par bloc suivant :

$$\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n - A \times B \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que la relation obtenue à la question 1 est encore vraie lorsque A est quelconque.

Réponse

1. On a :

$$\det(I_n - A \times B) = \det(A \times (A^{-1} - B)) = \det(A) \times \det(A^{-1} - B).$$

Le produit dans $\mathbb{K}$ est commutatif, donc,

$$\det(I_n - A \times B) = \det(A^{-1} - B) \times \det(A) = \det((A^{-1} - B) \times A) = \det(I_n - B \times A).$$

2. On a :

$$\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n - A \times B \end{pmatrix}.$$

3. On a :

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

On reconnaît des déterminants triangulaires par blocs :

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n - B \times A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\right) = \det(I_n - B \times A).$$

De même,

$$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n - A \times B \end{pmatrix}\right) = \det(I_n - A \times B).$$

Par la question précédente,

$$\det(I_n - B \times A) = \det(I_n - A \times B).$$

Sous-espaces stables

Exercice 10 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E .
2. Montrer que la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.
3. Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Rappel : pour $u \neq 0_E$, on note $\mathbb{R}u = \text{Vect}(u)$.

Réponse

1. Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$.

Montrons que $(x, f(x), f^2(x))$ soit une famille libre de E .

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ des réels tels que $\lambda_0.x + \lambda_1.f(x) + \lambda_2.f^2(x) = 0$ (*).

On prend l'image par f^2 des deux membre de (*) : par linéarité de f , on a $\lambda_0.f^2(x) + \lambda_1.f^3(x) + \lambda_2.f^4(x) = 0$.

Or, $f^3 = 0$, donc, $f^4 = 0$ et il reste $\lambda_0.f^2(x) = 0$.

Comme $f^2(x) \neq 0$, on a $\lambda_0 = 0$.

L'égalité (*) devient alors $\lambda_1.f(x) + \lambda_2.f^2(x) = 0$ (*).

On prend l'image par f des deux membre de (*), comme précédemment, il reste $\lambda_1.f^2(x) = 0$, et donc, $\lambda_1 = 0$.

Donc (*) devient $\lambda_2.f^2(x) = 0$, ce qui donne $\lambda_2 = 0$.

Ainsi, $(x, f(x), f^2(x))$ soit une famille libre de E .

Cette famille est composée de $3 = \dim(E)$ vecteurs de E , donc,

$$(x, f(x), f^2(x)) \text{ est une base de } E.$$

2. ► Montrons que $\mathbb{R}f^2(x)$ est une droite stable par f .

Par définition, la famille $(f^2(x))$ engendre $\mathbb{R}f^2(x)$ et, de plus, $f^2(x) \neq 0$, donc la famille $(f^2(x))$ est libre.

Donc, $(f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}f^2(x)$ et

$$\mathbb{R}f^2(x) \text{ est une droite vectorielle.}$$

Soit $y \in \mathbb{R}f^2(x)$. On a alors $y = \lambda.f^2(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc, $f(y) = \lambda.f^3(x) = 0 \in \mathbb{R}f^2(x)$ (en effet $\mathbb{R}f^2(x)$ est un sous-espace vectoriel de E).

Donc,

$$\mathbb{R}f^2(x) \text{ est stable par } f.$$

► Soit D une droite de E stable par f . On considère une base (u) de D .

On a alors $D = \text{Vect}(u)$ et $u \neq 0$.

Par **Q1**, $u = \alpha.x + \beta.f(x) + \gamma.f^2(x)$, et par linéarité de f , $f(u) = \alpha.f(x) + \beta.f^2(x) + \gamma.f^3(x) = \alpha.f(x) + \beta.f^2(x)$.

Or, D est stable par f et $u \in D$, donc, $f(u) \in D$ et il existe μ tel que $f(u) = \mu.u$.

On en déduit que :

$$\alpha.f(x) + \beta.f^2(x) = \mu\alpha.x + \mu\beta.f(x) + \mu\gamma.f^2(x).$$

Comme $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E , on peut identifier les coefficients devant les vecteurs de base,

$$\begin{cases} \mu\alpha &= 0 \\ \mu\beta &= \alpha \\ \mu\gamma &= \beta \end{cases}$$

Par l'absurde, si $\mu \neq 0$, la première équation donne $\alpha = 0$, puis la seconde donne $\beta = 0$ et la dernière donne $\gamma = 0$. Donc, $u = \alpha.x + \beta.f(x) + \gamma.f^2(x) = 0$. Contradiction (car $u \neq 0$).

Donc, $\mu = 0$. Les équations 2 et 3 donnent alors $\alpha = \beta = 0$.

Donc, $u = \gamma.f^2(x) \in \mathbb{R}f^2(x)$.

Donc, $D \subset \mathbb{R}f^2(x)$.

Or, D et $\mathbb{R}f^2(x)$ sont des droites vectorielles, et donc, ont la même dimension.

Ainsi, $D = \mathbb{R}f^2(x)$ et

la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.

3. ► Montrons que $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$ est un plan stable par f .

Par définition, la famille $(f(x), f^2(x))$ engendre $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

De plus, la famille $(f(x), f^2(x))$ est libre car sous-famille d'une base de E .

Donc, $(f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Ainsi,

$\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$ est un plan vectoriel.

► Soit $y \in \mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$. On a alors $y = \lambda.f(x) + \mu.f^2(x)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Donc, $f(y) = \lambda.f^2(x) + \mu.f^3(x) = \lambda.f^2(x) \in \mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Donc,

$\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$ est stable par f .

► Soit P un plan de E stable par f . On considère une base (u, v) de P .

On a alors $P = \text{Vect}(u, v)$ et (u, v) est une famille libre.

Par Q1,

$$u = \alpha.x + \beta.f(x) + \gamma.f^2(x) \quad \text{et} \quad v = a.x + b.f(x) + c.f^2(x).$$

D'où, par linéarité de f ,

$$f(u) = \alpha.f(x) + \beta.f^2(x) + \gamma.f^3(x) = \alpha.f(x) + \beta.f^2(x) \quad \text{et} \quad f(v) = a.f(x) + b.f^2(x).$$

Or, P est stable par f et $(u, v) \in P^2$, donc, $(f(u), f(v)) \in P^2$ et il existe (λ, μ) tel que $f(u) = \lambda.u + \mu.v$.

On en déduit que :

$$\alpha.f(x) + \beta.f^2(x) = \mu\alpha.x + \mu\beta.f(x) + \mu\gamma.f^2(x).$$

Comme $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E , on peut identifier les coefficients devant les vecteurs de base,

$$\begin{cases} \mu\alpha &= 0 \\ \mu\beta &= \alpha \\ \mu\gamma &= \beta \end{cases}$$

Par l'absurde, si $\mu \neq 0$, la première équation donne $\alpha = 0$, puis la seconde donne $\beta = 0$ et la dernière donne $\gamma = 0$. Donc, $u = \alpha.x + \beta.f(x) + \gamma.f^2(x) = 0$. Contradiction (car $u \neq 0$).

Donc, $\mu = 0$. Les équations 2 et 3 donnent alors $\beta = \gamma = 0$.

Donc, $u = \gamma.f^2(x) \in \mathbb{R}f^2(x)$.

Donc, $D \subset \mathbb{R}f^2(x)$.

Or, D et $\mathbb{R}f^2(x)$ sont des droites vectorielles, et donc, ont la même dimension.

Ainsi, $D = \mathbb{R}f^2(x)$ et

la seule droite de E stable par f est $\mathbb{R}f^2(x)$.

Montrer que le seul plan de E stable par f est $\mathbb{R}f(x) + \mathbb{R}f^2(x)$.

Exercice 11 :

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}_E$

1. Montrer que si F est une droite vectorielle de E , alors F n'est pas stable par f .
2. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f .

Réponse

1. Soit F une droite vectorielle de E . On note (x) une base de F (on a donc $F = \text{Vect}(x)$).
Supposons par l'absurde que F est stable par f . Alors $f(x) \in F$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda.x$. D'où, $f^2(x) = \lambda^2.x$. Or, par hypothèse sur f , on a $f^2(x) = -x$. D'où $\lambda^2.x = -x$. De plus, $x \neq 0$ car la famille (x) est une base de F . Donc, $\lambda^2 = -1$. Absurde car $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ainsi F n'est stable par f .
2. ► Soit $y \in \text{Vect}(x, f(x))$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = \alpha.x + \beta.f(x)$. D'où, par linéarité de f et par la relation $f^2 = -\text{Id}_E$, on a :

$$f(y) = \alpha.f(x) - \beta.x \in F.$$

Donc,

F est un sous-espace vectoriel stable par f .

Remarque (d'après Mélissa 2019) :

par linéarité de f , on peut aussi écrire $f(F) = \text{Vect}(f(x), f^2(x)) = \text{Vect}(f(x), -x) = F$ (car $f \circ f = -\text{Id}_E$). Donc $f(F) \subset F$.

► Montrons que $(x, f(x))$ est une base de $F = \text{Vect}(x, f(x))$.

La famille $(x, f(x))$ engendre clairement F . Donc, $\dim(F) \leq 2$.

De plus, $x \neq 0$, donc, $\dim(F) \geq 1$.

Donc, $\dim(F) = 1$ ou 2 .

Si $\dim(F) = 1$, alors F est une droite vectorielle stable par f . Contradiction avec **Q1**.

Donc, $\dim(F) = 2$ et

F est un plan vectoriel.

Remarque : on pouvait aussi démontrer la liberté de la famille $(x, f(x))$ directement. Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\mu_1.x + \mu_2.f(x) = 0_E$.

Si $\mu_2 \neq 0$, alors $f(x) = -\frac{\mu_1}{\mu_2}.x$.

On en déduit que $F = \text{Vect}(x, f(x)) = \text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle (car $x \neq 0$) stable par f . Contradiction avec la question 1. Donc $\mu_2 = 0$.

D'où, $\mu_1.x = 0_E$. Or $x \neq 0_E$. Donc $\mu_1 = 0$. D'où, la famille $(x, f(x))$ est libre.

Ainsi, $(x, f(x))$ est une base de F . Donc $\dim(F) = 2$. Donc,

$\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan vectoriel.

Trace d'une matrice, d'un endomorphisme**Exercice 12 :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(A) = \text{tr}(A) = 1$.

Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Réponse

Indication : introduire f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . Quelle est la dimension de $\text{Ker}(f)$? Considérer une base de $\text{Ker}(f)$ et construire une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est composée de $n - 1$ colonnes nulles.

Résolution

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .

► Par le théorème du rang, $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 1$. On considère $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base du noyau de $\text{Ker}(f)$.

On complète cette famille libre en une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E .

► On a $f(e_1) = \dots = f(e_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ et on peut décomposer $f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$: $f(e_n) = \mu_1 \cdot e_1 + \dots + \mu_n \cdot e_n$ avec $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

D'où, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mu_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et A' sont semblables (car elles représentent l'endomorphisme f dans deux bases différentes). Donc, elles sont la même trace. D'où, $1 = \text{tr}(A) = \text{tr}(A') = \mu_n$. Donc,

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mu_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \mu_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que $A' \times A' = A'$. Donc $f \circ f = f$. Ainsi,

A est la matrice d'un projecteur.

Exercice 13 :

Soit H une matrice carrée complexe de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne A et une matrice ligne B telles que $H = AB$.
2. Montrer que $H^2 = \text{tr}(H)H$.

Réponse

1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de H . On sait que $\text{Im}(H) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.

De plus, on sait que H est de rang 1, donc, il existe une colonne A (non nulle) telle que $\text{Im}(H) = \text{Vect}(A)$.

Donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe C_i telle que $C_i = \lambda_i A$.

On note $B = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$ une matrice ligne.

On a alors

$$H = AB.$$

2. On a : $H^2 = (AB)(AB) = A(BA)B$.

Or, BA est un scalaire (en réalité c'est une matrice composée d'un seul coefficient et on identifie cette matrice à son unique coefficient).

Donc, $H^2 = (BA)AB = BAH$.

Or, $\text{tr}(H) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Donc,

$$H^2 = \text{tr}(H)H.$$

3. Pour les 5/2 pour l'instant. On peut déterminer le polynôme caractéristique de H .

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(H)) = n - \text{rg}(H) = n - 1$.

Or, la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de cette valeur propre.

Donc, 0 est racine de χ_H de multiplicité au moins $n - 1$.

De plus, χ_H est de multiplicité 1 et unitaire.

Donc, $\chi_H = X^{n-1} \times (X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$.

Or, on sait que $\chi_H = X^n - \text{tr}(H).X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(H)$.

Donc, en identifiant les coefficients, $\lambda = \text{tr}(H)$ et

$$\chi_H = X^{n-1} \times (X - \text{tr}(H)).$$

4. Pour les 5/2 pour l'instant : La matrice $H + I_n$ est inversible si, et seulement si, -1 n'est pas valeur propre de H .
Déterminons l'inverse de $H + I_n$.

D'après la question précédente,

$$\text{la matrice } H + I_n \text{ est inversible si, et seulement si, } \text{tr}(H) \neq -1.$$

Soit Y une colonne. Résolvons l'équation $(H + I_n)X = Y$ d'inconnue la colonne X .

On multiplie par H , puis on simplifie avec **Q2** :

$$(H + I_n)X = Y \Rightarrow H(H + I_n)X = HY \Rightarrow (H^2 + H)X = HY \Rightarrow (\text{tr}(H) + 1)HX = HY.$$

Comme $\text{tr}(H) \neq -1$, on a : $HX = \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}HY$.

On ajoute X de part et d'autre de l'égalité et on utilise que $(H + I_n)X = Y$:

$$(H + I_n)X = \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}HY + X \Rightarrow Y = \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}HY + X \Rightarrow X = Y - \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}HY \Rightarrow X = \left(I_n - \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}H\right)Y.$$

Donc,

$$(H + I_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{\text{tr}(H) + 1}H.$$

Exercice 14 :

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(A \times B) = \varphi(B \times A)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$.

Réponse

► *Remarque (résultats à savoir retrouver) :* soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

- La j -ème colonne de $A \times E_{i,j}$ est la i -ème colonne de A (les autres colonnes de $A \times E_{i,j}$ sont nulles).
- La i -ème ligne de $E_{i,j} \times A$ est la j -ème ligne de A (les autres lignes de $E_{i,j} \times A$ sont nulles).

On en déduit que

$$\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

► On décompose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot E_{i,j}$.

D'où, par linéarité de φ , on a : $\varphi(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \varphi(E_{i,j})$. Il reste à déterminer $\varphi(E_{i,j})$.

► Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. D'après la remarque, on a : $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j} \times E_{j,j})$. D'où, par l'hypothèse sur l'application linéaire φ , on a :

$$\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{j,j} \times E_{i,j}) = \begin{cases} \varphi(E_{j,j}) & \text{si } i = j \\ \varphi(0) & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{cases} \varphi(E_{j,j}) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Donc, on a : $\varphi(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \times \varphi(E_{i,i})$.

► Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $E_{i,i} = E_{i,1} \times E_{1,i}$. Donc, par hypothèse sur φ , on a :

$$\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,1} \times E_{1,i}) = \varphi(E_{1,i} \times E_{i,1}) = \varphi(E_{1,1}).$$

Donc,

$$\varphi(A) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) \times \varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{1,1}) \times \text{tr}(A).$$

Ainsi,

$$\lambda = \varphi(E_{1,1}) \text{ convient.}$$

Exercice 15 :

1. Donner la dimension de $\text{Ker}(\text{tr})$ et justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. Montrer que $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa matrice dans

$$M \mapsto M + \text{tr}(M) \cdot I_n$$
une adaptée à la somme directe de la question précédente.

Réponse

1. La trace est une application linéaire non nulle, donc $\text{rg}(\text{tr}) = 1$, puis, par le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \text{rg}(\text{tr}) = n^2 - 1.$$

La matrice I_n n'appartient au noyau de la trace et $\text{Ker}(\text{tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc,

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par linéarité de la trace :

$$f(\lambda \cdot M + N) = \lambda \cdot M + N + \text{tr}(\lambda \cdot M + N) \cdot I_n = \lambda \cdot (M + \text{tr}(M) \cdot I_n) + N + \text{tr}(N) \cdot I_n = \lambda \cdot f(M) + f(N).$$

De plus, $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donc,

f est un endomorphisme.

Comme $I_n \neq 0$, la famille (I_n) est une base de $\text{Vect}(I_n)$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(\text{tr})$.

La base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, I_n)$ est une base adaptée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ adaptée à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{B}_1$, on a $f(M) = M$. De plus, $f(I_n) = I_n + n \cdot I_n = (n+1) \cdot I_n$.

Donc,

$$\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 :

Calculer le déterminant et la trace des endomorphismes :

$$\begin{aligned} f: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \text{et} & & g: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto M^\top & & & M &\mapsto \text{tr}(M) \cdot I_n \end{aligned}$$

Réponse

► On considère une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice de $\mathcal{B}_1$, on a $f(M) = M$. Pour toute matrice de $\mathcal{B}_2$, on a $f(M) = -M$.

$$\text{Donc, la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de 1 sur la diagonale est égal au nombre de vecteurs dans $\mathcal{B}_1$, autrement dit, égal à $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n \times (n+1)}{2}$.

Le nombre de -1 sur la diagonale est égal au nombre de vecteurs dans $\mathcal{B}_2$, autrement dit, égal à $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n \times (n-1)}{2}$.

Donc,

$$\det(f) = \det(A) = (-1)^{\frac{n \times (n-1)}{2}} \text{ et } \text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \frac{n \times (n+1)}{2} - \frac{n \times (n-1)}{2} = n.$$

► On considère une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, I_n)$ une base adaptée à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$ (voir exercice précédent).

Pour toute matrice de $\mathcal{B}_1$, on a $g(M) = 0$. On a $g(I_n) = n \cdot I_n$.

$$\text{Donc, la matrice de } g \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\det(g) = \det(B) = 0 \text{ et } \text{tr}(g) = \text{tr}(B) = 1.$$

Déterminant

Exercice 17 :

Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible.

Réponse

Soit $A \in \mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{K})$.

On a : $A^\top = -A$.

Or, $\det(A^\top) = \det(A)$ et $\det(-A) = (-1)^{2n+1} \times \det(A) = -\det(A)$.

Donc, $\det(A) = -\det(A)$, puis $\det(A) = 0$.

Donc,

A n'est pas inversible.

Exercice 18 :

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{\max(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$. En déduire le déterminant des matrices $(\max(i,j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $(\min(i,j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Réponse

1. On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

On applique successivement les opérations : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, ..., $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$. On a alors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & 0 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On repère le déterminant d'une matrice triangulaire. Donc,

$$\det(A) = a_n \times \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}).$$

On note $B = (\max(i,j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (\min(i,j))_{1 \leq i, j \leq n}$. En prenant $a_1 = 1, \dots, a_n = n$, on a $B = (a_{\max(i,j)})$ et, d'après ce qui précède :

$$\det(B) = n \times \prod_{k=1}^{n-1} (k - (k+1)) = (-1)^{n-1} \times n.$$

Pour calculer $\det(C)$, on applique successivement les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, ..., $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On a alors,

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. On note D la matrice dont on cherche le déterminant. On applique successivement les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$,

$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On a alors,

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $s_k = \sum_{j=1}^k j$. Calculer le déterminant de

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

Réponse

1. On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

On applique successivement les opérations : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2, C_2 \leftarrow C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$. On a alors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & 0 & a_3 - a_4 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On repère le déterminant d'une matrice triangulaire. Donc,

$$\det(A) = a_n \times \prod_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}).$$

On note $B = (\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. En prenant $a_1 = 1, \dots, a_n = n$, on a $B = (a_{\max(i, j)})$ et, d'après ce qui précède :

$$\det(B) = n \times \prod_{k=1}^{n-1} (k - (k+1)) = (-1)^{n-1} \times n.$$

Pour calculer $\det(C)$, on applique successivement les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On a alors,

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. On note D la matrice dont on cherche le déterminant. On applique successivement les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1},$

$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On a alors,

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 20 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \times \det(A-B).$$

Réponse

On applique les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, C_2 \leftarrow C_2 - C_{n+2}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$.

Il vient :

$$\det \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix}$$

On applique les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1, L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} - L_2, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} - L_n$.

Il vient :

$$\det \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$

On reconnaît le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Donc,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \times \det(A-B).$$

Exercice 21 :

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+M) = \det(M).$$

Montrer que $A = 0$.

Réponse

Par l'absurde, supposons A non nulle. Il existe alors $C \neq 0$ une colonne de A . Disons la i -ème colonne.

On définit une matrice M de la manière suivante :

- La i -ème colonne de M est la colonne $-C$.
- Les $n-1$ autres colonnes de M sont choisies de telle sorte que M soit inversible (possible en complétant la famille libre $(-C)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

On a alors $\det(M) \neq 0$. De plus, par construction, la i -ème colonne de $A+M$ est nulle. Donc, $\det(A+M) = 0$. Or $\det(A+M) = \det(M)$. Contradiction. Ainsi,

$$A = 0.$$

Exercice 22 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{rg}(B) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $B = C \times L$.
2. Montrer que

$$\det(A+B) \times \det(A-B) \leq \det(A^2).$$

Réponse

- La matrice B est de rang 1, donc la famille des colonnes de B forment une famille de rang 1. On en déduit que les colonnes de B sont proportionnelles et il existe une colonne C de B non nulle.
D'où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que la i -ème colonne de B est $\lambda_i \cdot C$.
On note $L = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$. On vérifie alors que $C \times L = B$.
- On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A . Par la question précédente, on a

$$\det(A + B) = \det(C_1 + \lambda_1 \cdot C | C_2 + \lambda_2 \cdot C | \dots | C_n + \lambda_n \cdot C).$$

En appliquant la linéarité par rapport à la première colonne du déterminant, on a

$$\det(A + B) = \det(C_1 | C_2 + \lambda_2 \cdot C | \dots | C_n + \lambda_n \cdot C) + \lambda_1 \times \det(C | C_2 + \lambda_2 \cdot C | \dots | C_n + \lambda_n \cdot C)$$

De plus, en appliquant des transvections de la deuxième à la dernière colonne dans le deuxième déterminant, on a :

$$\det(A + B) = \det(C_1 | C_2 + \lambda_2 \cdot C | \dots | C_n + \lambda_n \cdot C) + \lambda_1 \times \det(C | C_2 | \dots | C_n).$$

En recommençant ces opérations avec la deuxième colonne, puis la troisième, jusqu'à la dernière, obtient :

$$\det(A + B) = \det(C_1 | C_2 | \dots | C_n) + \sum_{k=1}^n \underbrace{\det(C_1 | \dots | C | \dots | C_n)}_{\text{La colonne } C \text{ est la } k\text{-ième colonne}}.$$

De la même manière, on a :

$$\det(A - B) = \det(C_1 - \lambda_1 \cdot C | C_2 - \lambda_2 \cdot C | \dots | C_n - \lambda_n \cdot C) = \det(C_1 | C_2 | \dots | C_n) - \sum_{k=1}^n \underbrace{\det(C_1 | \dots | C | \dots | C_n)}_{\text{La colonne } C \text{ est la } k\text{-ième colonne}}.$$

On en déduit que

$$\det(A + B) \times \det(A - B) = (\det(C_1 | C_2 | \dots | C_n))^2 - \left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\det(C_1 | \dots | C | \dots | C_n)}_{\text{La colonne } C \text{ est la } k\text{-ième colonne}} \right)^2$$

Or, les matrices sont à coefficients réels, donc $\left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\det(C_1 | \dots | C | \dots | C_n)}_{\text{La colonne } C \text{ est la } k\text{-ième colonne}} \right)^2 \geq 0$. D'où,

$$\det(A + B) \times \det(A - B) \leq \det(A)^2.$$

Or, $\det(A)^2 = \det(A^2)$. Donc,

$$\det(A + B) \times \det(A - B) \leq \det(A^2).$$

Exercice 23 :

On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (\lambda \cdot X^n + \mu) \cdot P(1) + X \times P'(X). \end{aligned}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Indication : on pourra commencer par le cas $n = 2$.

Réponse

La matrice de u dans la base canonique dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ \lambda & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda & \lambda+n \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\det(A)$, on effectue les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$. On a alors,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \mu & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire, donc, $\det(A) = \mu \times n!$. Comme $n! \neq 0$. On en déduit que

$$u \in GL(E) \iff \det(A) \neq 0 \iff \mu \neq 0.$$

Exercice 24 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

On considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- On suppose que $a \neq b$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $D(x) = \det(A + x.U)$.
 - Montrer que D est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
 - Calculer $D(-a)$ et $D(-b)$.
 - En déduire $\det(A)$.
- On suppose que $a = b$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$. Calculer $\det(A)$.

Réponse

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$D(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \alpha_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \alpha_n + x \end{vmatrix}.$$

On applique les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$. Il vient :

$$D(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & a - \alpha_1 & \cdots & \cdots & a - \alpha_1 \\ b + x & \alpha_2 - b & a - b & \cdots & a - b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + x & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n - b \end{vmatrix}.$$

Remarque : il n'y a plus de x dans les colonnes 2 à n .

En développant par rapport à la première colonne, il vient

$$D(x) = (\alpha_1 + x)\Delta_{1,1} + \sum_{i=2}^n (b+x)\Delta_{i,1}.$$

où $\Delta_{i,1}$ est un complexe.

Donc, D est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

(b) On a $D(-a) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ b - a & \alpha_2 - a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b - a & \cdots & b - a & \alpha_n - a \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a)$ en reconnaissant le déterminant d'une matrice triangulaire. De même, $D(-b) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k - b)$.

(c) On sait que D est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1, donc il existe λ_0 et λ_1 des complexes tels que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $D(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$.

De plus, $D(0) = \det(A_b)$. Il suffit donc de déterminer λ_0 .

Or, $D(-a) = \lambda_0 - \lambda_1 a$ et $D(-b) = \lambda_0 - \lambda_1 b$.

$$\text{Donc, } \lambda_0 = \frac{bD(-a) - aD(-b)}{b - a}.$$

Ainsi,

$$\det(A_b) = \frac{b \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a) - a \prod_{k=1}^n (\alpha_k - b)}{b - a}.$$

2. D'après le résultat admis : $f(b) \xrightarrow{b \rightarrow a} f(a) = \det(A_a)$.

$$\text{De plus, pour tout } b \neq a, \text{ on a montré que } f(b) = \frac{b \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a) - a \prod_{k=1}^n (\alpha_k - b)}{b - a}.$$

$$\text{Pour tout } b \in \mathbb{R}, \text{ on note } g(b) = b \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a) - a \prod_{k=1}^n (\alpha_k - b). \text{ On a } f(b) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

$$\text{De plus, } g \text{ est polynomiale donc, } g \text{ est dérivable en } a \text{ et } f(b) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \xrightarrow{b \rightarrow a} g'(a).$$

D'où, par unicité de la limite, $f(a) = g'(a)$.

$$\text{De plus, pour tout } b \in \mathbb{R}, g'(b) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a) + a \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - b).$$

$$\text{Donc, } f(a) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k - a) + a \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\alpha_i - a).$$

Exercice 25 : Autour du déterminant de Vandermonde

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $a_1, \dots, a_n$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

2. Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

3. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts.

Montrer que la famille : $((X - a_0)^n, (X - a_1)^n, \dots, (X - a_n)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}_{(n)}$.

5. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des scalaires. Calculer le déterminant de la matrice : $A = ((a_i + b_j)^{n-1})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Réponse

1. Les scalaire $a_1, \dots, a_n$ sont distincts deux à deux.
2. Par linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes, on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^{n-2} & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^{n-2} & n^n \end{vmatrix}_{(n)} = n! \times V_n(1, 2, \dots, n).$$

Or,

$$V_n(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j - i) = \prod_{j=2}^n (j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1} j!.$$

Donc,

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n j!.$$

3. On note $(X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

La famille $\mathcal{F} = ((X - a_0)^n, (X - a_1)^n, \dots, (X - a_n)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. Or, pour

tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(X - a_j)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-a_j)^k X^{n-k}$. D'où,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \times (-a_0) & \binom{n}{1} \times (-a_1) & \dots & \binom{n}{1} \times (-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} \times (-a_0)^n & \binom{n}{n} \times (-a_1)^n & \dots & \binom{n}{n} \times (-a_n)^n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

Par linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-a_0)^n & (-a_1)^n & \dots & (-a_n)^n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

On reconnaît le déterminant de Vandermonde des scalaires $-a_0, \dots, -a_n$. Ces scalaires sont deux à deux distincts, donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ (les coefficients binomiaux sont non nuls). Ainsi,

$\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. On note D_n le déterminant à calculer.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{K}, \text{ on a : } V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}_{(n+1)}.$$

En développant $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$ par rapport à la dernière ligne, on remarque que $x \mapsto V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n . De plus, le coefficient de x^{n-1} est $(-1)^{n+1+n} \times D_n = -D_n$.

De plus, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times \prod_{k=1}^n (x - a_k).$$

En développant $\prod_{k=1}^n (x - a_k)$, on a : $\prod_{k=1}^n (x - a_k) = x^n - (a_1 + \dots + a_n) \times x^{n-1} + \dots + \prod_{k=1}^n (-a_k)$.

Donc,

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times x^n - \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times (a_1 + \dots + a_n) \times x^{n-1} + \dots + \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times \prod_{k=1}^n (-a_k).$$

On a développé de deux manières la fonction polynomiale $x \mapsto V_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$. Donc, on identifiant les coefficients de x^{n-1} , on a :

$$-D_n = -(a_1 + \dots + a_n) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Ainsi,

$$D_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

5. *il y avait une erreur dans l'énoncé, il fallait lire $a_i + b_j$.*

Par la formule du binôme, pour tout $(i, j) \in [1, n]^n$, on a : $(a_i + b_j)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_i^k \times b_j^{n-1-k}$. Cette somme fait penser à la formule du produit matriciel, on le fait apparaître avec un changement d'indice ($l = k + 1$) :

$$(a_i + b_j)^{n-1} = \sum_{l=1}^n \underbrace{\binom{n-1}{l-1} a_i^{l-1}}_{\alpha_{i,l}} \times \underbrace{b_j^{n-l}}_{\beta_{l,j}}.$$

On pose $B = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $\alpha_{i,j} = \binom{n-1}{j-1} a_i^{j-1}$, et $C = (\beta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $\beta_{i,j} = b_j^{n-i}$. Avec ces notations, on a : $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$. Or,

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} a_1 & \dots & \binom{n-1}{n-1} a_1^{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} a_2 & \dots & \binom{n-1}{n-1} a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} a_n & \dots & \binom{n-1}{n-1} a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \times \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

On a

$$\det(C) = \begin{vmatrix} b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \\ b_1^{n-2} & b_2^{n-2} & \dots & b_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$$

On cherche à échanger les lignes pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.

Pour cela, on pose $P_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on remarque que :

$$C = P_n \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-2} & b_2^{n-2} & \dots & b_n^{n-2} \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\det(C) = \det(P_n) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i).$$

On note $D_n = \det(P_n)$. En développant par rapport à la première ligne, on a $D_n = (-1)^{n-1} \times D_{n-1}$. Donc (réurrence),

$$D_n = (-1)^{n-1} \times (-1)^{n-2} \times \dots \times (-1)^2 \times (-1)^1 D_1 = (-1)^{\frac{n \times (n-1)}{2}}.$$

Donc,

$$\det(C) = (-1)^{\frac{n \times (n-1)}{2}} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_i - b_j).$$

Ainsi,

$$\det(A) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \times (b_i - b_j).$$

Remarque : avec l'énoncé original, on trouve $\det(A) = (-1)^{\frac{n \times (n-1)}{2}} \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2$.

Compléments sur le calcul matriciel – Exercices supplémentaires

Matrices

Exercice 26 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse de A en résolvant un système linéaire.

Réponse

On résout, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ce système se réécrit

$$\begin{cases} x & & + 2z & = a \\ & - y & + z & = b \\ x & - 2y & & = c. \end{cases}$$

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes du système pour échelonner et réduire le système. On aboutit à :

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{2} \times a - b + \frac{1}{2} \times c \\ y & = \frac{1}{4} \times a - \frac{1}{2} \times b - \frac{1}{4} \times c \\ z & = \frac{1}{4} \times a + \frac{1}{2} \times b - \frac{1}{4} \times c. \end{cases}$$

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède une unique solution, donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 27 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer l'inverse de A en utilisant la matrice augmentée.

Réponse

On écrit la matrice $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On applique la méthode du pivot (uniquement des opérations sur les lignes). Après calculs, on a

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

On en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 28 :

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i \neq j \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Réponse

► On a $A = U - I_n$ où U est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous coefficients sont des 1. Les matrices U et $-I_n$ commutent donc, par la formule du binôme de Newton,

$$A^p = (U - I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} U^k \times (-I_n)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} U^k.$$

► Par récurrence, on montre que, pour tout $k \geq 1$, $U^k = n^{k-1} \cdot U$.

Initialisation. Claire

Hérédité. Soit $k \geq 1$. On suppose que $U^k = n^{k-1} \cdot U$ et on montre que $U^{k+1} = n^k \cdot U$.

On a : $U^{k+1} = U^k \times U = n^{k-1} \times U^2$.

Or, effectuant le produit matriciel, on remarque que $U^2 = n \times U$.

Donc, $U^{k+1} = n^k \cdot U$, ce qui achève la récurrence.

► On a alors

$$A^p = (-1)^p \cdot I_n + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^{k-1} \cdot U = (-1)^p \cdot I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} n^k \right) \cdot U.$$

Par la formule du binôme de Newton, on a :

$$A^p = (-1)^p \cdot I_n + \frac{1}{n} ((n-1)^p - (-1)^p) \cdot U.$$

Remarque. On généralise cet exercice à la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par :

$$\begin{cases} a_{i,j} = b & \text{si } i \neq j \\ a_{i,j} = a & \text{si } i = j \end{cases}$$

où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Pour calculer A^p , on remarque que $A^p = (a-b) \cdot I_n + b \cdot U$ et on raisonne de la même manière en utilisant la formule du binôme : $A^p = (B + I_n)^p$.

Exercice 29 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.

Matrices définies par blocs

Exercice 30 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme fixé.

Écrire par blocs la matrice $P(B)$ à l'aide de $P(A)$ et $P'(A)$.

Réponse

► On écrit $P = \sum_{k=0} a_k X^k$, où $a_0, \dots, a_n$ sont des scalaires. On a alors,

$$P(B) = \sum_{k=0} a_k B^k.$$

► On se rend compte qu'on doit d'abord calculer les puissances de B . Pour cela, on commence par calculer les premières puissances de B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^3 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^4 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^4 = \begin{pmatrix} A^4 & 4A^5 \\ 0 & A^4 \end{pmatrix}$$

On conjecture alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n+1} \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$$

Montrons cette conjecture par récurrence sur n . On note $\mathcal{H}_n$: « $B^n = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n+1} \\ 0 & A^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : on a $B^0 = I_{2n}$ et $\begin{pmatrix} A^0 & 0 \times A^{0+1} \\ 0 & A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie et on montre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n+1} \\ 0 & A^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & A^{n+2} + nA^{n+2} \\ 0 & A^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & (n+1)A^{n+2} \\ 0 & A^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence.

► D'où,

$$P(B) = \sum_{k=0} a_k B^k = \sum_{k=0} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k+1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0} a_k A^k & \sum_{k=0} a_k kA^{k+1} \\ 0 & \sum_{k=0} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & \sum_{k=0} a_k kA^{k+1} \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\sum_{k=0} a_k kA^{k+1} = \sum_{k=1} a_k kA^{k+1} = A^2 \times \left(\sum_{k=1} a_k kA^{k-1} \right) = A^2 \times P'(A).$$

Donc,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A^2 \times P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

Exercice 31 :

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \text{tr}(A \times M)$.

Réponse

Montrons que l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A &\mapsto \psi(A) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ M &\mapsto \text{tr}(A \times M) \end{cases} \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

► Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On montre que $\psi(A)$ est une forme linéaire.

Par linéarité de la trace,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(A)(\lambda.M + N) = \text{tr}(A \times (\lambda.M + N)) = \lambda \times \text{tr}(A \times M) + \text{tr}(A \times N) = \lambda \times \psi(A)(M) + \psi(A)(N).$$

Donc, l'application $\psi(A)$ est linéaire et elle est aussi à valeurs dans $\mathbb{K}$. Donc, ψ est bien définie.

► Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(\lambda.A + B)(M) = \text{tr}((\lambda.A + B) \times M) = \lambda \times \text{tr}(A \times M) + \text{tr}(B \times M) = (\lambda.\psi(A) + \psi(B))(M).$$

Ainsi, $\psi(\lambda.A + B) = \lambda.\psi(A) + \psi(B)$. Donc, ψ est linéaire.

► Montrons que ψ est injective. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\psi(A) = 0$. On a alors : pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A \times M) = 0$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. La j -ème colonne de $A \times E_{i,j}$ est la i -ème colonne de A . Donc, $\text{tr}(A \times E_{i,j}) = a_{j,i}$. Ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{j,i} = 0$. Autrement dit, la matrice A est nul. Donc, $\text{Ker}(\psi) = \{0\}$.

► On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}))$. Donc, par théorème, l'application linéaire injective ψ est bijective.

► Comme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = \text{Im}(\psi)$, on en déduit par bijectivité de ψ que,

il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \text{tr}(A \times M)$