

Objectifs du chapitre

- Maîtriser la loi binomiale $B(n, p)$: calcul de probabilités, espérance, variance.
- Comprendre et utiliser la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et savoir quand l'utiliser.
- Connaître les propriétés de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et la courbe de Gauss.
- Standardiser une variable normale et utiliser la table de la loi normale centrée réduite.
- Appliquer les approximations : binomiale \rightarrow Poisson et binomiale \rightarrow normale.
- Construire et interpréter un intervalle de confiance.
- Résoudre des problèmes de contrôle qualité industriel : taux de défaut, fiabilité.
- Choisir la loi adaptée à une situation donnée selon les critères du problème.

Situation professionnelle

Contexte : Une technicienne qualité dans une usine de fabrication de composants électroniques doit mettre en place un plan de contrôle des lots de production. L'atelier produit des circuits intégrés avec un taux de défaut moyen de 2 %.

Trois types de problèmes se posent :

1. **Contrôle par lot de 50 pièces :** Quelle est la probabilité de trouver exactement 2 pièces défectueuses ? Plus de 3 défectueuses ? Elle utilise la **loi binomiale** $B(50; 0,02)$.
2. **Analyse des pannes sur une ligne :** La ligne enregistre en moyenne 3 pannes par semaine. Quelle est la probabilité de 0 panne lundi ? Elle utilise la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(0,6)$.
3. **Mesure des dimensions d'une pièce :** Le diamètre suit une loi normale $\mathcal{N}(50 \text{ mm}; 0,04 \text{ mm}^2)$. Quelle est la proportion de pièces hors tolérance $[49,6; 50,4] \text{ mm}$? Elle utilise la **loi normale**.

Ces trois situations illustrent les trois lois fondamentales de ce chapitre.

1. Rappels — Loi de Bernoulli et variables aléatoires

Définition

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues :

- "Succès" avec probabilité p (où $0 < p < 1$)
- "Échec" avec probabilité $1 - p = q$

La variable aléatoire associée X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= p & P(X = 0) &= 1 - p \\E(X) &= p & V(X) &= p(1 - p)\end{aligned}$$

Définition

Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

Si X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété — Combinaisons

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (lire "k parmi n") représente le nombre de façons de choisir k éléments parmi n :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples : $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{10}{3} = 120$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2. Loi binomiale $B(n, p)$

Définition

Loi binomiale

On répète n épreuves de Bernoulli **indépendantes**, chacune de paramètre p . Si X est le nombre de succès, alors X suit la loi binomiale $B(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Propriété

Espérance et variance de $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) = npq \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Exemple 1 — Contrôle qualité (situation professionnelle)

Un lot de 50 composants est prélevé. Le taux de défaut est $p = 0,02$. Soit $X \sim B(50; 0,02)$.

a) Probabilité d'exactly 2 défectueux :

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} (0,02)^2 (0,98)^{48} = 1225 \times 0,0004 \times (0,98)^{48}$$

$$(0,98)^{48} \approx e^{48 \ln 0,98} \approx e^{-0,974} \approx 0,378$$

$$P(X = 2) \approx 1225 \times 0,0004 \times 0,378 \approx 0,185$$

b) Espérance et écart-type :

$$E(X) = 50 \times 0,02 = 1 \quad \text{défectueux en moyenne}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \times 0,02 \times 0,98} = \sqrt{0,98} \approx 0,99$$

c) Probabilité de trouver au plus 3 défectueux :

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = (0,98)^{50} \approx 0,364$$

$$P(X = 1) = 50 \times 0,02 \times (0,98)^{49} \approx 0,372$$

$$P(X = 2) \approx 0,186 \quad P(X = 3) \approx 0,061$$

$$P(X \leq 3) \approx 0,364 + 0,372 + 0,186 + 0,061 = 0,983$$

Il y a donc environ 98,3 % de chance que le lot ne contienne pas plus de 3 pièces défectueuses.

Exemple 2 — Test en série

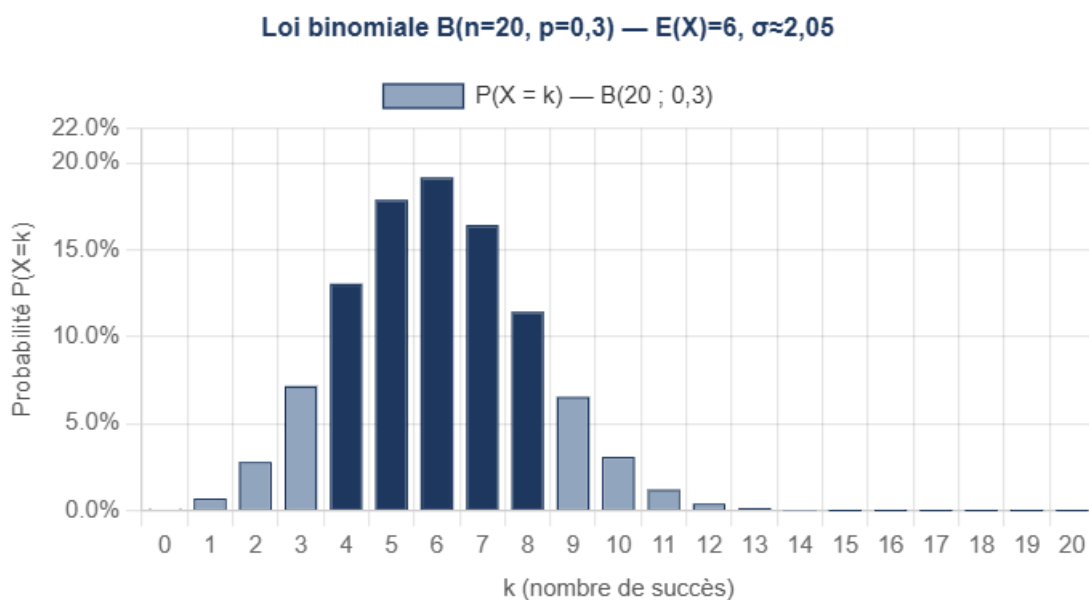
Un technicien de maintenance teste 8 fusibles indépendants, chacun ayant 10 % de chance d'être défectueux. Soit $X \sim B(8; 0,1)$.

$$P(X = 0) = (0,9)^8 \approx 0,430$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,430 = 0,570$$

$$E(X) = 8 \times 0,1 = 0,8 \quad \text{fusible défectueux en moyenne}$$

Visualisation de la loi binomiale $B(n = 20; p = 0,3)$



Exercice

Dans une chaîne de production, 5 % des pièces sont hors tolérance. On prélève un échantillon de 20 pièces.

1. Quelle loi suit le nombre X de pièces hors tolérance dans l'échantillon ?
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 2)$.

3. Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition

Loi de Poisson

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. L'ensemble des valeurs est \mathbb{N} (sans limite supérieure).

Propriété

Espérance et variance de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Pour la loi de Poisson, l'espérance est égale à la variance — propriété caractéristique.

Propriété — Contextes d'application

La loi de Poisson modélise le nombre d'événements rares survenant dans un intervalle de temps ou d'espace donné, lorsque les événements sont :

- Indépendants les uns des autres
- Survenus à un taux moyen constant λ
- Peu probables pour un petit intervalle

Exemples : nombre de pannes par semaine, nombre d'appels par heure, nombre de défauts par mètre de câble.

Exemple 1 — Pannes d'une ligne de production

Une ligne de production subit en moyenne 3 pannes par semaine ($\lambda = 3$). Soit $X \sim \mathcal{P}(3)$

a) Probabilité d'aucune panne :

$$P(X = 0) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = e^{-3} \approx 0,0498$$

Environ 5 % de chance de passer une semaine sans panne.

b) Probabilité d'exactly 2 pannes :

$$P(X = 2) = e^{-3} \frac{3^2}{2!} = e^{-3} \times \frac{9}{2} \approx 0,0498 \times 4,5 \approx 0,224$$

c) Probabilité d'au moins 4 pannes :

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$P(X = 1) = 3e^{-3} \approx 0,149 \quad P(X = 3) = e^{-3} \frac{27}{6} \approx 0,224$$

$$P(X \leq 3) \approx 0,050 + 0,149 + 0,224 + 0,224 = 0,647$$

$$P(X \geq 4) \approx 1 - 0,647 = 0,353$$

Exemple 2 — Changement d'unité temporelle

Si $\lambda = 3$ pannes/semaine, alors sur une journée (1/5 de semaine) :

$$\lambda_j = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ panne/jour}$$

Probabilité de 0 panne un lundi :

$$P(X = 0) = e^{-0,6} \approx 0,549$$

Plus d'une chance sur deux de passer la journée sans panne.

Propriété — Approximation de la binomiale par Poisson

Si $X \sim B(n, p)$ avec n grand ($n \geq 50$) et p petit ($p \leq 0,1$), alors :

$$B(n, p) \approx \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{avec } \lambda = np$$

Cette approximation simplifie les calculs car $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ est plus facile que la formule binomiale pour n grand.

Exemple 3 — Approximation de Poisson

Sur 200 pièces, le taux de défaut est $p = 0,01$. Soit $X \sim B(200; 0,01)$.

Conditions : $n = 200 \geq 50$ et $p = 0,01 \leq 0,1 \rightarrow$ on approche par $\mathcal{P}(\lambda = 2)$.

$$P(X = 0) \approx e^{-2} \approx 0,135 \quad P(X = 3) \approx e^{-2} \frac{8}{6} \approx 0,180$$

Calcul exact avec la binomiale : $P(X = 0) = (0,99)^{200} \approx 0,134$ — très proche.

4. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition

Loi normale (loi de Gauss)

Une variable aléatoire continue X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- μ : espérance (centre de la courbe)
- σ : écart-type ($\sigma > 0$) — mesure l'étalement
- La courbe est symétrique par rapport à $x = \mu$ (courbe en cloche)

Propriété — Règle des 1, 2, 3 sigmas

Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,27\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,45\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$$

Définition

Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

C'est la loi normale avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Sa densité est :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

La fonction de répartition est notée $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ et se lit dans une **table de la loi normale centrée réduite**.

Méthode — Standardisation

Pour calculer des probabilités avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on effectue le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Étape 1. Identifier μ et σ dans l'énoncé.

Étape 2. Transformer les bornes : $a \rightarrow z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$ et $b \rightarrow z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$.

Étape 3. Lire les valeurs dans la table : $P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$.

Étape 4. Utiliser la symétrie si nécessaire : $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Table de la loi normale centrée réduite (valeurs usuelles)

z	$\Phi(z) = P(Z \leq z)$	$P(-z \leq Z \leq z)$
0	0,5000	0 %
0,5	0,6915	38,3 %
1,0	0,8413	68,3 %
1,28	0,9000	80,0 %
1,5	0,9332	86,6 %
1,645	0,9500	90,0 %
1,96	0,9750	95,0 %
2,0	0,9772	95,4 %
2,33	0,9901	98,0 %
2,576	0,9950	99,0 %
3,0	0,9987	99,7 %

Exemple 1 — Contrôle dimensionnel

Le diamètre d'une pièce suit $\mathcal{N}(50; 0,04)$, soit $\mu = 50$ mm et $\sigma = 0,2$ mm. La tolérance est $[49,6; 50,4]$ mm.

Proportion de pièces dans la tolérance :

$$z_1 = \frac{49,6 - 50}{0,2} = -2 \quad z_2 = \frac{50,4 - 50}{0,2} = 2$$

$$\begin{aligned} P(49,6 \leq X \leq 50,4) &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0,9772 - 1 = 0,9544 = 95,44 \% \end{aligned}$$

Environ 4,56 % des pièces seront hors tolérance — soit environ 46 pièces sur 1000.

Exemple 2 — Probabilité unilatérale

La résistance d'un câble suit $\mathcal{N}(100 \Omega; 9 \Omega^2)$, soit $\mu = 100$ et $\sigma = 3 \Omega$. Quelle est la probabilité que la résistance dépasse 104Ω ?

$$z = \frac{104 - 100}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

$$P(X > 104) = 1 - \Phi(1,33) \approx 1 - 0,9082 = 0,0918$$

Il y a environ 9,2 % de chance que la résistance dépasse 104Ω .

Exemple 3 — Recherche de quantile

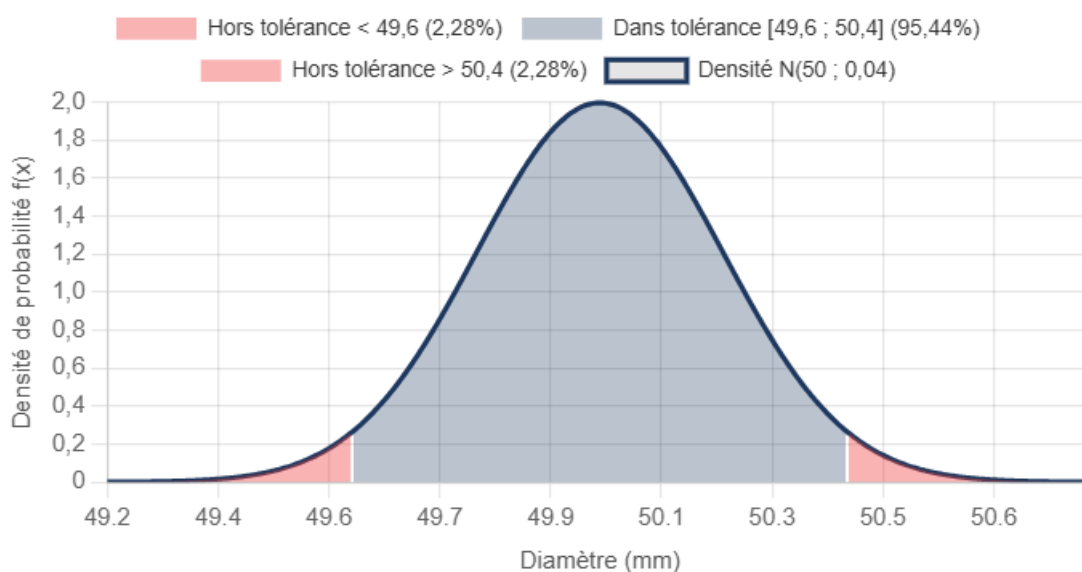
Même câble. Trouver la valeur a telle que 95 % des câbles ont une résistance inférieure à a .

$$P(X \leq a) = 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a - 100}{3}\right) = 0,95$$

Dans la table : $\Phi(1,645) = 0,95$, donc :

$$\frac{a - 100}{3} = 1,645 \Rightarrow a = 100 + 3 \times 1,645 = 104,9 \Omega$$

Loi normale $N(\mu=50 \text{ mm}, \sigma=0,2 \text{ mm})$ — Contrôle dimensionnel



5. Intervalle de confiance

Définition

Intervalle de confiance pour la proportion

On observe k succès dans un échantillon de taille n . La fréquence observée est $\hat{p} = k/n$. L'intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour la proportion p de la population est :

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \hat{p} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{avec } \sigma \approx \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$$

Valeurs usuelles de $z_{\alpha/2}$:

- Niveau 90 % : $z_{\alpha/2} = 1,645$
- Niveau 95 % : $z_{\alpha/2} = 1,96$
- Niveau 99 % : $z_{\alpha/2} = 2,576$

Exemple — IC sur le taux de défaut

Sur 500 pièces contrôlées, 12 sont défectueuses. Construire un intervalle de confiance à 95 % pour le taux de défaut réel p .

$$\hat{p} = \frac{12}{500} = 0,024 \quad \hat{\sigma} = \sqrt{0,024 \times 0,976} \approx 0,153$$

$$\text{marge d'erreur} = 1,96 \times \frac{0,153}{\sqrt{500}} = 1,96 \times 0,00685 \approx 0,0134$$

$$IC_{95\%} = [0,024 - 0,013 ; 0,024 + 0,013] = [0,011 ; 0,037]$$

On peut affirmer avec 95 % de confiance que le taux de défaut de la production est compris entre 1,1 % et 3,7 %.

6. Approximations entre lois

Propriété — Approximation binomiale → normale

Si $X \sim B(n, p)$ avec n grand et $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, alors :

$$B(n, p) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{avec } \mu = np \text{ et } \sigma^2 = np(1 - p)$$

On utilise alors la **correction de continuité** : $P(X \leq k) \approx P\left(Z \leq \frac{k + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Exemple — Approximation normale

Soit $X \sim B(100; 0,3)$. Calculer $P(X \leq 25)$ par approximation normale.

$$\mu = 100 \times 0,3 = 30 \quad \sigma = \sqrt{100 \times 0,3 \times 0,7} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Conditions : $np = 30 \geq 5$ et $n(1 - p) = 70 \geq 5 \checkmark$

$$P(X \leq 25) \approx P\left(Z \leq \frac{25,5 - 30}{4,58}\right) = P(Z \leq -0,98) = 1 - \Phi(0,98) \approx 1 - 0,8365 = 0,164$$

Synthèse des approximations

Loi de départ	Approximation	Condition
$B(n, p)$	$\mathcal{P}(\lambda = np)$	$n \geq 50$ et $p \leq 0,1$
$B(n, p)$	$\mathcal{N}(np, npq)$	$np \geq 5$ et $nq \geq 5$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$	$\lambda \geq 20$

7. Applications industrielles

7.1 Contrôle qualité par attribut

Exemple — Plan de contrôle

Un atelier décide d'accepter un lot si, parmi 30 pièces prélevées, il y a au plus 2 défectueuses. Le taux de défaut réel d'un lot est p .

Calculer la probabilité d'acceptation pour $p = 0,05$ et $p = 0,15$.

$X \sim B(30; p)$ et on accepte si $X \leq 2$.

Pour $p = 0,05$:

$$P(X = 0) = (0,95)^{30} \approx 0,215$$

$$P(X = 1) = 30 \times 0,05 \times (0,95)^{29} \approx 0,339$$

$$P(X = 2) = 435 \times (0,05)^2 \times (0,95)^{28} \approx 0,259$$

$$P_{\text{accept}} = 0,215 + 0,339 + 0,259 = 0,812$$

Pour $p = 0,15$:

$$P(X = 0) = (0,85)^{30} \approx 0,008$$

$$P(X = 1) = 30 \times 0,15 \times (0,85)^{29} \approx 0,041$$

$$P(X = 2) \approx 0,100$$

$$P_{\text{accept}} \approx 0,149$$

Le plan distingue bien les bons lots (81 % d'acceptation à 5 %) des mauvais lots (15 % à 15 %).

7.2 Durée de vie et fiabilité

Exemple — Fiabilité d'un composant

La durée de vie d'un capteur de température suit une loi normale $\mathcal{N}(5000 \text{ h}; 250\,000 \text{ h}^2)$, soit $\mu = 5000 \text{ h}$ et $\sigma = 500 \text{ h}$.

a) Probabilité que le capteur tombe en panne avant 4000 h :

$$z = \frac{4000 - 5000}{500} = -2 \Rightarrow P(X < 4000) = \Phi(-2) = 1 - 0,9772 = 0,023$$

Seulement 2,3 % des capteurs tombent en panne avant 4000 h.

b) Garantie minimale couvrant 90 % des capteurs :

$$\begin{aligned} P(X \geq t_G) &= 0,90 \Rightarrow P(X < t_G) = 0,10 \\ \Phi\left(\frac{t_G - 5000}{500}\right) &= 0,10 \Rightarrow \frac{t_G - 5000}{500} = -1,28 \\ t_G &= 5000 - 1,28 \times 500 = 4360 \text{ h} \end{aligned}$$

8. Choisir la bonne loi

Méthode — Arbre de décision

Question 1 : La variable est-elle continue ou discrète ?

- **Continue** (mesure, dimensions, durée, résistance...) → **Loi Normale** si la distribution est symétrique en cloche
- **Discrète** (comptage d'événements, nombre de défauts...) → question 2

Question 2 : Compte-t-on des succès dans n épreuves identiques ?

- **Oui**, n fixé et chaque épreuve = Bernoulli(p) → **Loi Binomiale $B(n,p)$**
- **Non**, on compte des événements rares sur un intervalle (temps, surface...) → **Loi de Poisson $P(\lambda)$**

Approximations disponibles :

- $n \geq 50$ et $p \leq 0,1$ → remplacer $B(n, p)$ par $\mathcal{P}(np)$
- $np \geq 5$ et $nq \geq 5$ → remplacer $B(n, p)$ par $\mathcal{N}(np, npq)$

Tableau récapitulatif

Situation	Loi	Paramètres	Formule $P(X = k)$
n épreuves Bernoulli indép.	$B(n,p)$	n, p	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Événements rares, taux constant	$P(\lambda)$	$\lambda = np$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$
Variable continue, symétrique	$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ	Table après standardisation

Exercice de synthèse

Identifier la loi et résoudre chaque problème :

1. Un menuisier coupe des planches. La longueur suit $\mathcal{N}(200 \text{ cm}; 0,25 \text{ cm}^2)$. Quelle proportion de planches mesure entre 199,5 cm et 200,5 cm ?
2. Un technicien chauffagiste relève en moyenne 2 fuites par chantier sur une installation de chauffage. Quelle est la probabilité d'avoir 0 fuite sur le prochain chantier ?
3. Un électricien vérifie 15 prises indépendantes dont 8 % présentent un défaut. Quelle est la probabilité qu'exactly 1 prise soit défectueuse ?

À retenir — Formules essentielles

Loi binomiale $B(n,p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$$

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$$

Loi normale $N(\mu, \sigma^2)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

Approximations

$$n \geq 50, p \leq 0,1 : B(n, p) \approx \mathcal{P}(np)$$

$$np \geq 5, nq \geq 5 :$$

$$B(n, p) \approx \mathcal{N}(np, npq)$$

Règle des sigmas

$$P(\mu \pm \sigma) \approx 68\% \quad P(\mu \pm 2\sigma) \approx 95\% \quad P(\mu \pm 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Intervalle de confiance (niveau $1 - \alpha$)

$$\left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Probabilités 2

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Extrait de la table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$:

z	1,0	1,28	1,645	1,96	2,0	2,576
$\Phi(z)$	0,8413	0,9000	0,9500	0,9750	0,9772	0,9950

Exercice 1 — Loi binomiale (4 pts)

Dans une chaîne de production, 5 % des pièces sont hors tolérance. On prélève $n = 15$ pièces et on note X le nombre de pièces hors tolérance.

- Préciser la loi de X . (1 pt)
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. (1,5 pt)
- Calculer $P(X = 0)$. On donne $(0,95)^{15} \approx 0,4633$. (1,5 pt)

Exercice 2 — Loi de Poisson (4 pts)

Une ligne de production subit en moyenne 2 pannes par semaine. Soit X le nombre de pannes par semaine, $X \sim \mathcal{P}(2)$. On donne $e^{-2} \approx 0,135$.

- Rappeler $E(X)$ et $V(X)$. (1 pt)
- Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$. (2 pts)
- Calculer $P(X \geq 2)$. (1 pt)

Exercice 3 — Loi normale (5 pts)

La résistance X (en Ω) d'un composant suit la loi $\mathcal{N}(100; 9)$, soit $\mu = 100 \Omega$ et $\sigma = 3 \Omega$.

- Calculer la probabilité que la résistance dépasse 106Ω , $P(X > 106)$. (2,5 pts)
- Déterminer la valeur a telle que 95 % des composants aient une résistance inférieure à a . (2,5 pts)

Exercice 4 — Approximation binomiale \rightarrow Poisson (3 pts)

Sur 100 pièces, le taux de défaut est $p = 0,02$. Soit $X \sim B(100; 0,02)$.

- a. Vérifier les conditions de l'approximation par une loi de Poisson et donner le paramètre λ . (1,5 pt)
- b. Calculer $P(X = 0)$ avec l'approximation de Poisson. On donne $e^{-2} \approx 0,135$. (1,5 pt)

Exercice 5 — Intervalle de confiance (4 pts)

Sur 400 pièces contrôlées, 8 sont défectueuses. On veut estimer le taux de défaut réel p au niveau de confiance 95 % ($z_{\alpha/2} = 1,96$).

- a. Calculer la fréquence observée \hat{p} et $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$. (1,5 pt)
 - b. Calculer la marge d'erreur, puis donner l'intervalle de confiance à 95 %. (2,5 pts)
-