

Fonctions polynômes de degré 2

1ère Bac Pro | Algèbre – Analyse | Mathématiques

Objectifs du chapitre

- Reconnaître et définir une fonction polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$
- Représenter graphiquement une parabole et identifier ses caractéristiques (signe de a , sommet, axe de symétrie)
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2
- Définir une racine et tester si un nombre réel est racine d'un polynôme de degré 2
- Visualiser graphiquement le nombre de solutions de $f(x) = 0$ (0, 1 ou 2 racines)
- Utiliser la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ et factoriser quand les racines sont connues
- Déterminer la seconde racine quand une première est connue
- Étudier le signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée
- Encadrer une racine par un algorithme de balayage

1. Introduction — Situation professionnelle

Situation professionnelle — Menuisier agenceur

Contexte : Un menuisier agenceur fabrique des panneaux rectangulaires pour habiller un mur. Chaque panneau a une largeur de $(x + 2)$ mètres et une hauteur de $(x - 1)$ mètres, où x est un paramètre de conception (en mètres).

L'aire de chaque panneau est :

$$A(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2 \quad (\text{en m}^2)$$

Le menuisier doit résoudre plusieurs questions :

- Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire est-elle nulle ? (les **racines** du polynôme)
- Pour quelle(s) valeur(s) l'aire est-elle positive ? (**étude du signe**)
- Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ? (le **sommet** de la parabole)
- Comment encadrer une solution par calcul pas à pas ? (**balayage**)

Ces questions nous amènent à étudier les **fonctions polynômes de degré 2**, appelées aussi *fonctions du second degré*.

2. Fonction polynôme de degré 2 — Définition et forme générale

Définition Fonction polynôme de degré 2 :

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

On dit aussi que $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un **polynôme de degré 2** (ou du *second degré*).

Propriété Identification des coefficients :

Dans $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- a est le **coefficient dominant** (coefficient de x^2) — il ne peut **pas** être nul
- b est le coefficient de x — il peut être nul
- c est le **terme constant** — c 'est la valeur $f(0)$ (ordonnée à l'origine)

Exemples — Identifier les coefficients

Expression	a	b	c
$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$	3	-5	2
$g(x) = -2x^2 + 4$	-2	0	4
$h(x) = x^2 + x - 6$	1	1	-6
$p(x) = -x^2$	-1	0	0

Attention Ce qui n'est PAS un polynôme de degré 2 :

- $f(x) = 2x + 3$: c'est un polynôme de degré **1** (pas de terme en x^2)
- $f(x) = 0 \cdot x^2 + 3x - 1$: si $a = 0$, ce n'est plus de degré 2
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$: ce n'est pas un polynôme (puissance négative)
- $f(x) = x^3 - 2x$: c'est un polynôme de degré **3**, pas 2

APPLICATION

L'aire d'un panneau rectangulaire est modélisée par $A(x) = 2x^2 - 3x + 1$ (en m^2).

1. Identifier les coefficients a , b , c . 2. Calculer $A(0)$, $A(2)$ et $A(5)$.

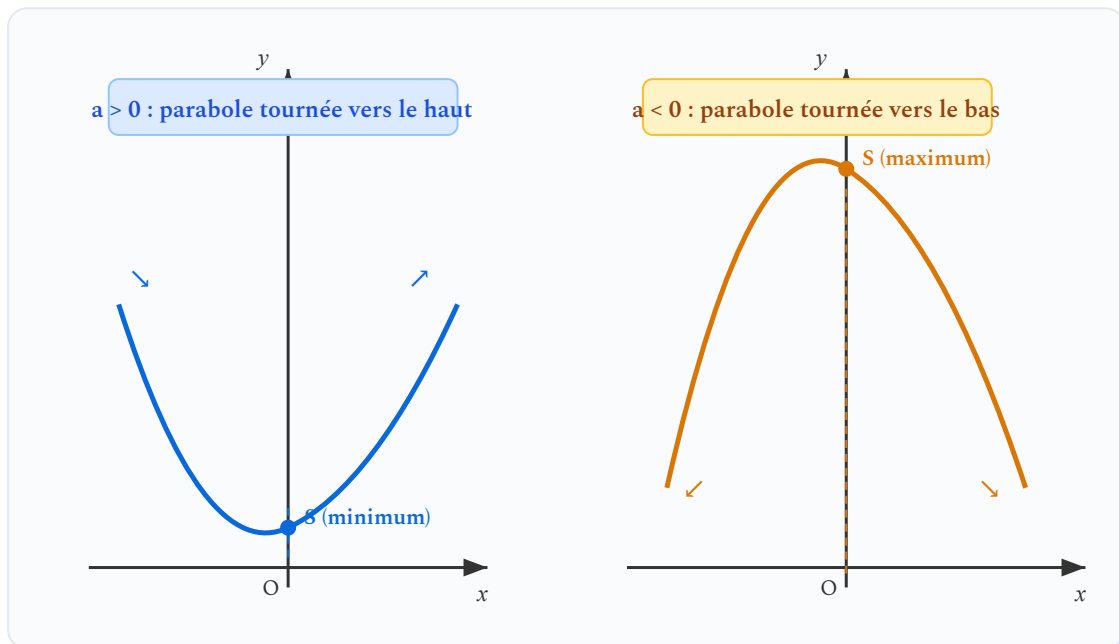
3. Représentation graphique — La parabole

Propriété Courbe représentative (admise) :

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

Cette parabole possède :

- Un **axe de symétrie** vertical, d'équation $x = -\frac{b}{2a}$
- Un **sommet** S (point le plus haut ou le plus bas) situé sur cet axe
- Une **ouverture** vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$
- Une intersection avec l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; c)$



Quand $a > 0$ la parabole s'ouvre vers le haut (minimum) ; quand $a < 0$ elle s'ouvre vers le bas (maximum).

À retenir — Sens d'ouverture de la parabole

- Si $a > 0$: la parabole est **tournée vers le haut** (forme de « U ») — le sommet est un **minimum**
- Si $a < 0$: la parabole est **tournée vers le bas** (forme de « ∩ ») — le sommet est un **maximum**

4. Axe de symétrie et sommet

Propriété Axe de symétrie et sommet (admise) :

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- L'**axe de symétrie** a pour équation : $x_S = -\frac{b}{2a}$
- Le **sommet** S a pour coordonnées $(x_S ; f(x_S))$

Formule du sommet

$$x_S = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad y_S = f(x_S)$$

Méthode

Calculer les coordonnées du sommet :

- 1 Identifier les coefficients a , b et c .
- 2 Calculer $x_S = -\frac{b}{2a}$.
- 3 Calculer $y_S = f(x_S)$ en remplaçant x par x_S dans l'expression de f .
- 4 En déduire si le sommet est un minimum ($a > 0$) ou un maximum ($a < 0$).

Exemple 1 — Axe de symétrie et sommet

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. Ici $a = 2$, $b = -8$, $c = 3$.

$$\text{Axe de symétrie : } x_S = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Ordonnée du sommet : } f(2) = 2 \times 4 - 8 \times 2 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$$

Le sommet est donc $S(2; -5)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = 2$.

Comme $a = 2 > 0$, la parabole est **ournée vers le haut** et S est le point le **plus bas** : f admet un **minimum** égal à -5 .

Exemple 2 — Contexte sport : trajectoire d'un ballon

La hauteur (en mètres) d'un ballon de football après un tir est modélisée par :

$$h(x) = -0,5x^2 + 3x + 1$$

où x est la distance horizontale parcourue (en mètres).

Ici $a = -0,5$, $b = 3$, $c = 1$.

$$\text{Sommet : } x_S = -\frac{3}{2 \times (-0,5)} = -\frac{3}{-1} = 3 \text{ m}$$

$$h(3) = -0,5 \times 9 + 3 \times 3 + 1 = -4,5 + 9 + 1 = 5,5 \text{ m}$$

Le sommet est $S(3; 5,5)$. Comme $a < 0$, le sommet est un **maximum**.

Interprétation : le ballon atteint sa hauteur maximale de **5,5 m** à une distance horizontale de **3 m** du tireur.

Propriété Ordonnée à l'origine (admise) :

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; c)$.

En effet, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$.

APPLICATION

Un fabricant de mobilier modélise le bénéfice mensuel par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ (en centaines d'euros), où x est le nombre de meubles produits.

1. Déterminer l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet.
2. Le sommet est-il un maximum ou un minimum ? Justifier.

5. Variations d'une fonction polynôme de degré 2

Propriété Sens de variation (admise) :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec le sommet en $x_S = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$: f est **décroissante** sur $] -\infty ; x_S]$ puis **croissante** sur $[x_S ; +\infty[$. Le sommet est un **minimum**.
- Si $a < 0$: f est **croissante** sur $] -\infty ; x_S]$ puis **décroissante** sur $[x_S ; +\infty[$. Le sommet est un **maximum**.

Exemple — Tableau de variations

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. On a trouvé $x_S = 2$ et $f(2) = -5$. Comme $a = 2 > 0$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		↘ décroissante	-5 (min)	↗ croissante	

f est décroissante avant le sommet, croissante après. Le minimum est $f(2) = -5$.

À retenir — Variations selon le signe de a

$a > 0$: minimum

↘ décroissante puis ↗ croissante

Le sommet est le point le plus bas

$a < 0$: maximum

↗ croissante puis ↘ décroissante

Le sommet est le point le plus haut

6. Racines d'un polynôme de degré 2

Définition Racine d'un polynôme de degré 2 :

Un nombre réel x_0 est une **racine** (ou **zéro**) du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ si :

$$f(x_0) = 0$$

Graphiquement, les racines sont les **abscisses des points d'intersection** de la parabole avec l'axe des abscisses.

Méthode

Tester si un nombre est racine :

- 1 Remplacer x par la valeur à tester dans l'expression $f(x)$.
- 2 Calculer le résultat.
- 3 Si le résultat est **égal à 0**, le nombre est une racine. Sinon, il ne l'est pas.

Exemple — Tester si un nombre est racine

Soit $f(x) = x^2 - x - 6$. Tester si $x = 3$, $x = -2$ et $x = 1$ sont des racines.

Test de $x = 3$:

$$f(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

Comme $f(3) = 0$, $x = 3$ est bien une racine de f .

Test de $x = -2$:

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

Comme $f(-2) = 0$, $x = -2$ est aussi une racine de f .

Test de $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 1 - 6 = 1 - 1 - 6 = -6 \neq 0$$

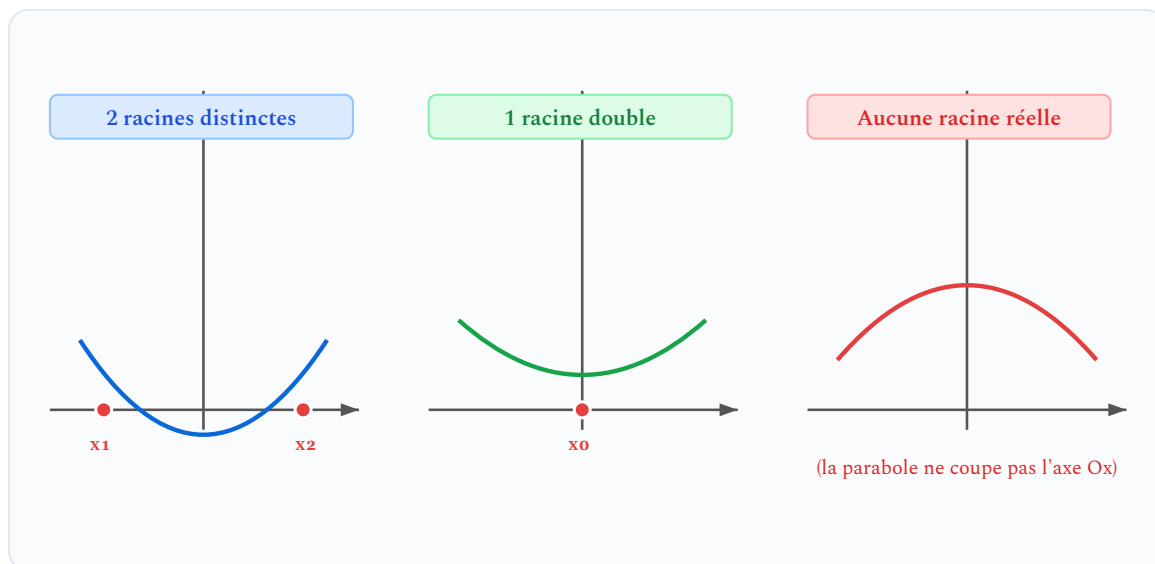
Comme $f(1) \neq 0$, $x = 1$ n'est pas une racine.

Nombre de racines réelles — Visualisation graphique

Propriété Nombre de racines (admise, observée graphiquement) :

Un polynôme de degré 2 peut avoir :

- **Deux racines réelles distinctes** x_1 et x_2 : la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points
- **Une racine réelle double** x_0 : la parabole est tangente à l'axe des abscisses (le touche en un seul point)
- **Aucune racine réelle** : la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses



Les trois situations possibles pour le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 2

Méthode — trouver les racines

Plusieurs méthodes existent :

- **Tester des valeurs** : on remplace x par des valeurs simples (0, 1, -1, 2...) et on vérifie si $f(x) = 0$.
- **Forme factorisée** : si on connaît une racine x_1 , on peut factoriser et trouver l'autre.
- **Somme et produit des racines** (*hors programme — poursuite d'études*) :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Hors programme — pour aller plus loin La méthode du discriminant ne figure pas au programme officiel du Bac Professionnel. Cependant, elle est **indispensable pour la poursuite d'études** (BTS, études supérieures) et sera réutilisée en Terminale pour l'étude des polynômes de degré 3.

Pour $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule le **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$: deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: une solution double $x = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle

Voir la [fiche méthode](#) pour un exemple détaillé.

7. Forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$

Définition Forme factorisée :

Si x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors on peut écrire :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Cette écriture s'appelle la **forme factorisée** du polynôme.

Propriété Vérification de la forme factorisée (admise) :

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, alors :

- $f(x_1) = a \times \underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0} \times (x_1 - x_2) = 0$ — c'est bien une racine
- $f(x_2) = a \times (x_2 - x_1) \times \underbrace{(x_2 - x_2)}_{=0} = 0$ — c'est bien une racine

Factoriser un polynôme dont les racines sont connues

Méthode

Passer à la forme factorisée :

- 1 Identifier le coefficient a (coefficient de x^2).
- 2 Identifier les deux racines x_1 et x_2 (données ou trouvées par test).
- 3 Écrire : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- 4 *Vérification (facultative mais conseillée)* : développer pour retrouver la forme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 — Factoriser un polynôme

Soit $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$. On nous dit que $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$ sont ses racines.

Ici $a = 2$.

Forme factorisée : $f(x) = 2(x - 2)(x - 3)$

Vérification par développement :

$$2(x - 2)(x - 3) = 2(x^2 - 5x + 6) = 2x^2 - 10x + 12 \checkmark$$

Vérification des racines :

$$f(2) = 2(2 - 2)(2 - 3) = 2 \times 0 \times (-1) = 0 \checkmark$$

$$f(3) = 2(3 - 2)(3 - 3) = 2 \times 1 \times 0 = 0 \checkmark$$

Exemple 2 — Contexte menuiserie : surface de découpe

Un métreur modélise la surface perdue lors de la découpe d'un panneau par la fonction $S(x) = x^2 - 7x + 10$ (en dm^2), où x est la largeur de découpe en décimètres.

On lui indique que les racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 5$. Ici $a = 1$.

Forme factorisée : $S(x) = (x - 2)(x - 5)$

Interprétation : la surface perdue est nulle quand $x = 2$ dm ou $x = 5$ dm. Ce sont les largeurs de découpe optimales qui ne produisent pas de chute.

Attention Cas particulier : racine double :

Si la parabole est tangente à l'axe des abscisses, les deux racines sont égales :

$$x_1 = x_2 = x_0.$$

La forme factorisée est alors : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

8. Trouver la seconde racine quand on en connaît une

Propriété Relation entre les racines et les coefficients (admise) :

Si x_1 et x_2 sont les deux racines de $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors en développant la forme factorisée :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

En identifiant avec $ax^2 + bx + c$, on obtient :

- **Somme des racines :** $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- **Produit des racines :** $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Somme et produit des racines

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Méthode

Trouver la seconde racine :

- 1 On connaît une racine x_1 et le polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- 2 Calculer la somme des racines : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, d'où $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$.
- 3 *Alternative avec le produit* : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, d'où $x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}$ (si $x_1 \neq 0$).
- 4 Vérifier en calculant $f(x_2)$: le résultat doit être 0.

Exemple — Trouver la seconde racine

Soit $f(x) = x^2 - 5x + 4$. On sait que $x_1 = 1$ est une racine.

Ici $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$.

Méthode 1 — par la somme :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$$

$$x_2 = 5 - x_1 = 5 - 1 = 4$$

Méthode 2 — par le produit :

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$x_2 = \frac{4}{x_1} = \frac{4}{1} = 4$$

Vérification : $f(4) = 16 - 20 + 4 = 0 \checkmark$

Forme factorisée : $f(x) = (x - 1)(x - 4)$

APPLICATION

On sait que $f(x) = x^2 - 7x + 10$ admet $x_1 = 2$ comme racine. Trouver la seconde racine x_2 par la somme, puis écrire la forme factorisée.

9. Signe d'un polynôme de degré 2 sous forme factorisée

Propriété Signe sous forme factorisée (admise) :

Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$.

Le signe de $f(x)$ dépend du signe de a :

- Si $a > 0$: $f(x)$ est **positif en dehors** des racines et **négatif entre** les racines
- Si $a < 0$: $f(x)$ est **négatif en dehors** des racines et **positif entre** les racines

À retenir — Règle du signe

Le signe de $f(x)$ est le même que le signe de a en dehors des racines.

Entre les racines, le signe est opposé à celui de a .

Tableau de signes — Méthode

Méthode

Construire un tableau de signes :

- 1 Identifier a , x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$).
- 2 Placer x_1 et x_2 dans la première ligne du tableau.
- 3 Écrire le signe de chaque facteur a , $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$ dans chaque intervalle.
- 4 Multiplier les signes ligne par ligne (règle des signes : $+$ \times $+$ = $+$, $+$ \times $-$ = $-$, $-$ \times $-$ = $+$).

Exemple 1 — Tableau de signes avec $a > 0$

Soit $f(x) = 2(x - 1)(x - 4)$. On a $a = 2 > 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$a = 2$	+++++						
$(x - 1)$	--		0		+++++		++
$(x - 4)$	---				---		0 ++
$f(x)$	+		0		-		0 +

Conclusion :

- $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty ; 1[$ et pour $x \in]4 ; +\infty[$ (en dehors des racines : signe de a , c'est-à-dire +)
- $f(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 4$
- $f(x) < 0$ pour $x \in]1 ; 4[$ (entre les racines)

Exemple 2 — Tableau de signes avec $a < 0$

Soit $g(x) = -3(x + 2)(x - 5)$. On a $a = -3 < 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$a = -3$	-----						
$(x + 2)$	-		0		+++		++
$(x - 5)$	-				--		0 +
$g(x)$	-		0		+		0 -

Quand $a < 0$, le polynôme est **positif entre les racines** et **négatif en dehors** (c'est l'inverse du cas $a > 0$).

10. Algorithme de balayage — Encadrer une racine

Définition Algorithme de balayage :

L'**algorithme de balayage** est une méthode numérique qui permet d'encadrer une racine d'un polynôme avec la précision souhaitée.

On teste des valeurs successives de x et on repère un **changement de signe** de $f(x)$: quand f change de signe entre deux valeurs consécutives, il y a une racine entre ces deux valeurs.

Propriété Changement de signe (admise) :

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de **signes contraires** (l'un positif, l'autre négatif), alors il existe au moins une racine de f dans l'intervalle $]a ; b[$.

Méthode

Balayage pour encadrer une racine :

- 1 Choisir un intervalle $[a ; b]$ où on pense qu'il y a une racine (vérifier que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés).
- 2 Choisir un pas p (par exemple $p = 0,1$ pour une précision au dixième).
- 3 Calculer $f(a)$, $f(a + p)$, $f(a + 2p)$, ... jusqu'à trouver un changement de signe.
- 4 La racine est encadrée entre les deux valeurs où le changement de signe se produit.
- 5 Pour plus de précision, recommencer avec un pas plus petit sur le nouvel intervalle.

Exemple — Balayage sur $f(x) = x^2 - 3$

On cherche la racine positive de $f(x) = x^2 - 3$, c'est-à-dire une valeur approchée de $\sqrt{3}$.

On sait que $f(1) = 1 - 3 = -2 < 0$ et $f(2) = 4 - 3 = 1 > 0$, donc la racine est dans $[1 ; 2]$.

Balayage avec un pas de 0,1 :

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,7	1,8
$f(x) = x^2 - 3$	-2	-1,79	-1,56	-1,31	-1,04	-0,11	+0,24

$f(1,7) < 0$ et $f(1,8) > 0$: changement de signe ! La racine est dans $[1,7 ; 1,8]$.

Soit $\sqrt{3} \approx 1,7$ à 0,1 près.

Balayage avec un pas de 0,01 (sur $[1,7 ; 1,8]$) :

x	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
$f(x)$	-0,11	-0,076	-0,042	-0,007	+0,028

La racine est dans $[1,73 ; 1,74]$, soit $\sqrt{3} \approx 1,73$ à 0,01 près.

11. Exemples résolus complets

Exemple 1 — Contexte professionnel : aire d'un cadre

Situation : Un artisan menuisier réalise un cadre rectangulaire dont les dimensions sont $(x + 1)$ cm et $(x - 3)$ cm. Il veut savoir pour quelle valeur de x l'aire vaut 40 cm^2 .

L'aire est : $A(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$.

On résout $x^2 - 2x - 3 = 40$, soit $f(x) = x^2 - 2x - 43 = 0$.

Recherche d'une racine positive par balayage :

$f(7) = 49 - 14 - 43 = -8 < 0$ et $f(8) = 64 - 16 - 43 = 5 > 0$.

La racine positive est dans $[7; 8]$.

x	7,5	7,6	7,7	7,8
$f(x)$	-1,75	-0,44	+0,89	+2,24

La racine est entre 7,6 et 7,7, soit $x \approx 7,6$ cm à 0,1 près.

Conclusion : le cadre a des dimensions d'environ 8,6 cm et 4,6 cm pour une aire d'environ 40 cm^2 ($8,6 \times 4,6 \approx 39,56 \text{ cm}^2$).

Exemple 2 — Étude complète d'un polynôme de degré 2

Situation : Un technicien d'agencement modélise le coût de découpe (en euros) d'une bande de bois de longueur x mètres par la fonction $C(x) = x^2 - 6x + 8$.

Étape 1 — Coefficients : $a = 1, b = -6, c = 8$.

Étape 2 — Tester si $x_1 = 2$ est une racine :

$$C(2) = 4 - 12 + 8 = 0 \checkmark \text{ — donc } x_1 = 2 \text{ est bien une racine.}$$

Étape 3 — Trouver la seconde racine :

$$\text{Somme des racines : } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

$$\text{Donc } x_2 = 6 - 2 = 4.$$

$$\text{Vérification : } C(4) = 16 - 24 + 8 = 0 \checkmark$$

Étape 4 — Forme factorisée : $C(x) = (x - 2)(x - 4)$

Étape 5 — Axe de symétrie et sommet :

$$x_S = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$$

$$C(3) = 9 - 18 + 8 = -1$$

Le sommet est $S(3; -1)$. Comme $a = 1 > 0$, c'est un minimum.

Étape 6 — Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x - 2)$		-	0		+		+
$(x - 4)$		-			-	0	+
$C(x)$		+	0		-	0	+

Interprétation : le coût modélisé est négatif pour $x \in]2; 4[$, ce qui n'a pas de sens physique (un coût ne peut pas être négatif). Cela signifie que le modèle $C(x)$ n'est

valide qu'en dehors de $[2 ; 4]$ mètres.

Exemple 3 — Contexte physique : hauteur d'un projectile

Situation : En physique, la hauteur h (en mètres) d'un objet lancé verticalement est modélisée par :

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1,5$$

où t est le temps en secondes.

1. **Coefficients :** $a = -5, b = 20, c = 1,5$.

2. **Sommet :** $t_S = -\frac{20}{2 \times (-5)} = -\frac{20}{-10} = 2 \text{ s}$

$$h(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 + 1,5 = -20 + 40 + 1,5 = 21,5 \text{ m}$$

Comme $a < 0$, le sommet $S(2; 21,5)$ est un **maximum**.

Interprétation : l'objet atteint sa hauteur maximale de **21,5 m** au bout de **2 secondes**.

3. **Quand l'objet retouche le sol :** on cherche $t > 0$ tel que $h(t) = 0$.

Par balayage : $h(4) = -80 + 80 + 1,5 = 1,5 > 0$ et

$$h(4,1) = -84,05 + 82 + 1,5 = -0,55 < 0.$$

L'objet touche le sol entre $t = 4 \text{ s}$ et $t = 4,1 \text{ s}$, soit environ 4 secondes après le lancer.

12. Synthèse

À retenir — Les formules essentielles

Forme générale

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a \neq 0$, courbe = parabole

Forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

si x_1 et x_2 sont les racines

Axe de symétrie /

Sommet

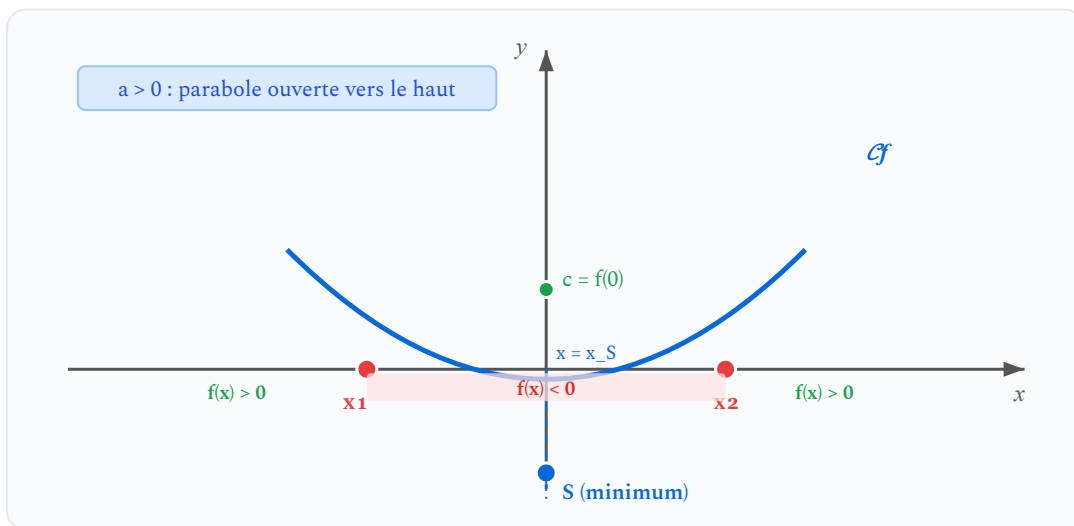
$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Sommet : $(x_S; f(x_S))$

Relations entre racines

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$



Récapitulatif des éléments caractéristiques d'une parabole ($a > 0$, deux racines réelles)

Notion	Ce qu'on fait	Ce qu'on obtient
Identifier les coefficients	Lire a, b, c dans $ax^2 + bx + c$	Sens d'ouverture, ordonnée à l'origine
Trouver le sommet	$x_S = -\frac{b}{2a}$ puis $f(x_S)$	Coordonnées du sommet, min ou max
Tester une racine	Calculer $f(x_0)$	Si $f(x_0) = 0$: oui, sinon non
Trouver la 2e racine	$x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$	La seconde racine
Factoriser	Écrire $a(x - x_1)(x - x_2)$	Forme factorisée
Étudier le signe	Tableau de signes (forme factorisée)	Intervalles positifs/négatifs
Encadrer une racine	Balayage (repérer un changement de signe)	Encadrement à la précision voulue

13. Erreurs fréquentes

✗ Oublier que $a \neq 0$

Si $a = 0$, la fonction n'est plus du second degré mais du premier (affine). Le terme en x^2 est indispensable.

Conseil : toujours vérifier que le coefficient devant x^2 est non nul avant d'appliquer les formules du second degré.

✗ Se tromper de signe pour l'axe de symétrie

L'axe de symétrie est $x_S = -\frac{b}{2a}$ (avec un signe moins devant b). Oublier ce signe est une erreur très fréquente.

Conseil : mémoriser la formule complète avec le signe moins, et vérifier en calculant $f(x_S)$.

✗ Confondre racine et valeur du sommet

L'abscisse du sommet x_S n'est pas une racine du polynôme (sauf cas particulier). Les racines sont les valeurs où $f(x) = 0$.

Conseil : tester $f(x_S)$ pour savoir si c'est une racine ; en général, $f(x_S) \neq 0$.

✗ Inverser le sens de la parabole

Si $a > 0$ la parabole s'ouvre vers le haut (sommet en bas = minimum). Si $a < 0$ elle

s'ouvre vers le bas (sommet en haut = maximum).

Conseil : penser à la lettre U pour $a > 0$ (U s'ouvre vers le haut) et à \cap pour $a < 0$.

Simulation interactive

[Fonction du second degré — Traceur](#)

Fonctions polynômes de degré 2

1ère Bac Pro | Algèbre - Analyse | Mathématiques

Socle

Standard

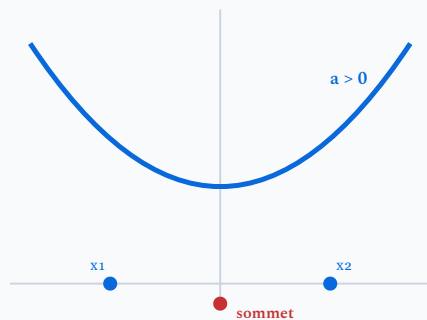
Approfondissement

Tout voir

 Objectifs du chapitre[cliquer pour développer](#)

Rappels essentiels

- **Forme générale** : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
- **Sommet** : $x_S = \frac{-b}{2a}$, $y_S = f(x_S)$. Minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.
- **Discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$: 2 racines, si $\Delta = 0$: 1 racine, si $\Delta < 0$: aucune.
- **Racines** : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (si $\Delta \geq 0$).
- **Signe** : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé entre les racines.

Parabole : sommet, racines x_1 et x_2

Exercices guidés pas à pas

EXERCICE 1 Identifier les coefficients

SOCLE

Pour chaque fonction, identifier les coefficients a , b et c , puis indiquer si la parabole est ouverte vers le haut ou vers le bas.

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

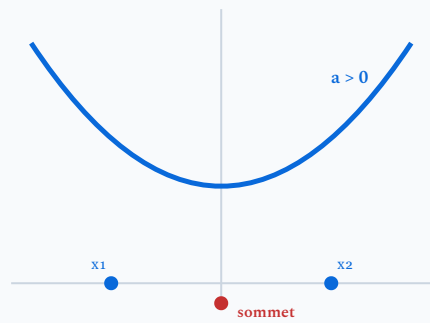
2. $g(x) = -x^2 + 5x$

3. $h(x) = 4x^2 - 9$

4. $k(x) = -0,5x^2 + 3x - 1$

Mes calculs :

EXERCICE 2 Calcul du sommet **SOCLE**



Parabole : sommet, racines x_1 et x_2

Pour chaque fonction, calculer les coordonnées du sommet S de la parabole.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 7$

2. $g(x) = -2x^2 + 12x - 10$

3. $h(x) = 3x^2 + 6x - 1$

Mes calculs :

EXERCICE 3 Discriminant et racines

SOCLE

Résoudre chaque équation en calculant le discriminant.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

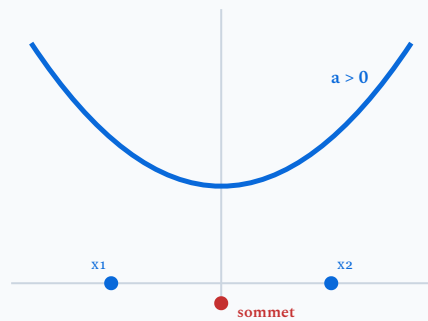
2. $2x^2 + 4x + 2 = 0$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

Mes calculs :

EXERCICE 4 Étude complète d'une fonction (guidé)

SOCLE

Parabole : sommet, racines x_1 et x_2

On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1. Étape 1 — Identifier les coefficients.

Compléter : $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$

Rappel : si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut ; si $a < 0$, vers le bas.

2. Étape 2 — Calculer le sommet.

Utiliser la formule $x_S = \frac{-b}{2a}$. Calculer ensuite $y_S = f(x_S)$.

3. Étape 3 — Calculer le discriminant.

Appliquer $\Delta = b^2 - 4ac = (\dots)^2 - 4 \times (\dots) \times (\dots)$.

4. Étape 4 — Trouver les racines.

Puisque $\Delta > 0$, calculer $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

5. Étape 5 — Forme factorisée.

Écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

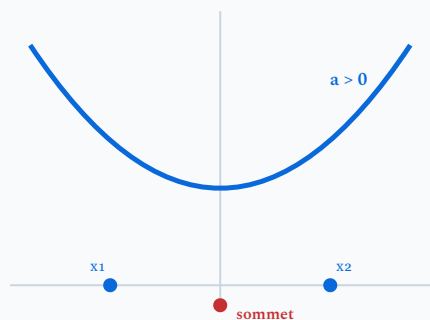
6. Étape 6 — Tableau de signes et inéquation.

Compléter le tableau de signes. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq 0$.

Mes calculs :

EXERCICE 5 Arche de pont — Charpentier (guidé)

SOCLE

Parabole : sommet, racines x_1 et x_2

Un charpentier conçoit une arche de pont dont le profil est modélisé par $h(x) = -0,5x^2 + 3x$ où x est la distance horizontale (en mètres) et $h(x)$ la hauteur (en mètres).

1. Étape 1 — Points au sol.

Résoudre $h(x) = 0$. Factoriser : $-0,5x^2 + 3x = x(\dots) = 0$.

2. Étape 2 — Largeur.

La largeur au sol est la distance entre les deux solutions trouvées à l'étape 1.

3. Étape 3 — Hauteur maximale.

Calculer $x_S = \frac{-b}{2a}$ avec $a = -0,5$ et $b = 3$, puis $h(x_S)$.

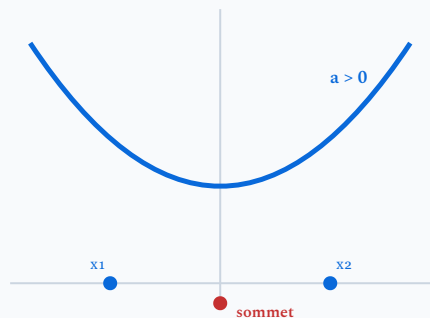
4. Étape 4 — Le bateau passe-t-il ?

Un bateau de 3 m de large (centré sous l'arche) et de 3,5 m de haut veut passer. Ses bords sont en $x = 1,5$ et $x = 4,5$. Calculer $h(1,5)$ et comparer à 3,5.

Mes calculs :

EXERCICE 6 Bénéfice d'un artisan menuisier (guidé)

SOCLE

Parabole : sommet, racines x_1 et x_2

Un artisan menuisier fabrique des tables en bois massif. Le bénéfice pour la fabrication de x tables par mois est modélisé par :

$$B(x) = -3x^2 + 48x - 180$$

1. Étape 1 — Identifier les coefficients.

Compléter : $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$

2. Étape 2 — Discriminant et racines.

Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$. Puis les racines x_1 et x_2 .

3. Étape 3 — Rentabilité.

Rappel : si $a < 0$, $B(x) \geq 0$ entre les racines. En déduire pour combien de tables l'artisan est rentable.

4. Étape 4 — Bénéfice maximal.

Calculer $x_S = \frac{-b}{2a}$ et $B(x_S)$.

Mes calculs :

Exercices d'application

EXERCICE 7 Coefficients, sommet et allure de la parabole

STANDARD

On considère la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

1. Identifier les coefficients a , b et c . La parabole est-elle ouverte vers le haut ou vers le bas ?
2. Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole.
3. Le sommet correspond-il à un minimum ou un maximum ? Justifier.
4. Calculer $f(0)$ et $f(4)$. Placer les points $(0 ; f(0))$, S et $(4 ; f(4))$ dans un repère et tracer l'allure de la parabole.

Mes calculs :

EXERCICE 8 Racines, forme factorisée et étude de signe

STANDARD

On considère la fonction $g(x) = x^2 - 2x - 8$.

1. Calculer le discriminant Δ .
2. En déduire les racines de g .
3. Écrire la forme factorisée de $g(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur \mathbb{R} .
5. Résoudre l'inéquation $g(x) \leq 0$.

Mes calculs :

EXERCICE 9 Optimisation d'une surface de vitrine — Menuisier agenceur

STANDARD

Un menuisier agenceur conçoit une vitrine rectangulaire dont le cadre utilise 20 mètres de profilé aluminium (périmètre = 20 m). Il souhaite maximiser la surface vitrée.

1. On note x la largeur de la vitrine (en mètres). Exprimer la hauteur en fonction de x et montrer que la surface est $S(x) = -x^2 + 10x$.
2. Calculer le discriminant de $S(x) = 0$ et en déduire les valeurs de x pour lesquelles la surface est nulle.
3. Calculer les coordonnées du sommet. Quelles dimensions donnent la surface maximale ?
4. Le client souhaite une vitrine d'au moins 24 m^2 . Est-ce possible ? Résoudre $S(x) \geq 24$.

Mes calculs :

Exercices d'approfondissement

EXERCICE 10 Optimisation d'une aire APPROFONDISSEMENT

Un menuisier dispose d'un panneau de bois rectangulaire de périmètre 24 m. Il veut maximiser l'aire du panneau.

1. Si x est la longueur du panneau, exprimer la largeur en fonction de x . En déduire que l'aire est $A(x) = -x^2 + 12x$.
2. Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle positive ?
3. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale et cette aire maximale.

Mes calculs :

EXERCICE 11 Trajectoire d'un projectile — Physique

APPROFONDISSEMENT

On lance un ballon depuis le sol. Sa hauteur (en mètres) en fonction de la distance horizontale x (en mètres) est :

$$h(x) = -0,04x^2 + 2x$$

1. À quelle distance horizontale le ballon retombe-t-il au sol ?
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?
3. Un mur de 8 m de haut est situé à 10 m. Le ballon passe-t-il au-dessus ?
4. Pour quelles distances horizontales le ballon est-il à plus de 20 m de hauteur ?

Mes calculs :

EXERCICE 12 Comparaison de deux systèmes — Technicien chauffagiste

APPROFONDISSEMENT

Un technicien chauffagiste compare le rendement R (en %) de deux chaudières en fonction de la charge x (en %) :

- Chaudière A : $R_A(x) = -0,008x^2 + 1,2x + 50$
- Chaudière B : $R_B(x) = -0,005x^2 + 0,9x + 55$

Les deux fonctions sont définies pour $x \in [0 ; 100]$.

1. Calculer le rendement maximal de chaque chaudière (coordonnées du sommet).
2. Résoudre $R_A(x) = R_B(x)$. Pour quelle(s) charge(s) les rendements sont-ils égaux ?
3. Pour quelles charges la chaudière A est-elle plus performante que la B ?

Mes calculs :

Fonctions polynômes de degré 2

Fonctions polynômes de degré 2 | 1ère Bac Pro

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir

 Objectifs du chapitre

cliquer pour développer

 Durée : 1 heure  Calculatrice : autorisée  Barème : 20 points Documents : non autorisés

APP - S'Approprier

ANA - Analyser

REA - Réaliser

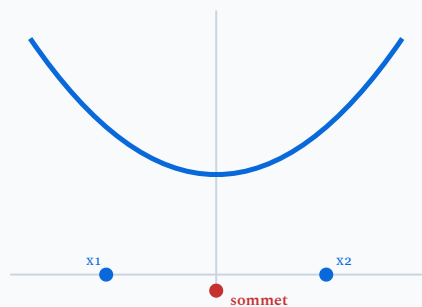
VAL - Valider

COM - Communiquer

SOCLE

Exercice 1 – Identifier et étudier un polynôme de degré 2

10 points

Parabole $a > 0$: sommet et racinesOn considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

1. **APP** Identifier les coefficients a , b et c en complétant : (1 pt)*Aide* : On compare $f(x) = x^2 - 6x + 5$ avec la forme générale $ax^2 + bx + c$.

$$a = \dots\dots \quad b = \dots\dots \quad c = \dots\dots$$

2. **ANA** Le coefficient a est-il positif ou négatif ? En déduire si la parabole est ouverte vers le haut ou vers le bas. (1 pt)

Aide : Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut (forme de « U »). Si $a < 0$, elle est ouverte vers le bas.

3. **REA** Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole. (3 pts)

Étape 1 : Calculer x_S avec la formule $x_S = \frac{-b}{2a}$:

$$x_S = \frac{-(\dots)}{2 \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Étape 2 : Calculer $f(x_S)$:

$$f(\dots) = (\dots)^2 - 6 \times (\dots) + 5 = \dots - \dots + 5 = \dots$$

Étape 3 : Écrire les coordonnées du sommet : $S(\dots ; \dots)$

4. **COM** Compléter le tableau de variations de f : (2 pts)

Aide : Comme $a > 0$, la fonction est d'abord **décroissante** puis **croissante**. Le minimum est atteint au sommet.

x	$-\infty$		\dots		$+\infty$
Variations de f		\searrow	\dots	\nearrow	

5. **VAL** Vérifier que $x = 1$ est une racine de f , puis que $x = 5$ est aussi une racine. (3 pts)

Étape 1 : Calculer $f(1)$:

$$f(1) = (1)^2 - 6 \times 1 + 5 = 1 - \dots + 5 = \dots$$

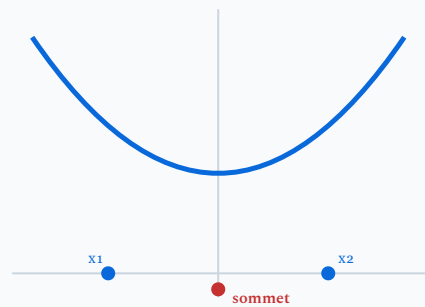
Étape 2 : Calculer $f(5)$:

$$f(5) = (5)^2 - 6 \times 5 + 5 = \dots - \dots + 5 = \dots$$

Étape 3 : Conclure : $f(1) = \dots$ et $f(5) = \dots$, donc $x = 1$ et $x = 5$ des racines de f .

Exercice 2 – Arche en bois d'un charpentier

10 points



Parabole $a > 0$: sommet et racines

Un charpentier fabrique une arche décorative en bois. Le profil de l'arche est modélisé par la fonction g définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$g(x) = -x^2 + 6x$$

où x est la distance horizontale (en mètres) et $g(x)$ la hauteur (en mètres).

1. **APP** Identifier les coefficients a , b et c de g . (1 pt)

Aide : On peut écrire $g(x) = -1 \times x^2 + 6 \times x + 0$.

$a = \dots$ $b = \dots$ $c = \dots$

2. **REA** Calculer $g(0)$ et $g(6)$. Que représentent ces résultats pour l'arche ? (2 pts)

Étape 1 : $g(0) = -(0)^2 + 6 \times 0 = \dots$

Étape 2 : $g(6) = -(6)^2 + 6 \times 6 = -\dots + \dots = \dots$

Étape 3 : Interprétation : ces résultats signifient que l'arche

3. **REA** Calculer la hauteur maximale de l'arche. (3 pts)

Étape 1 : Calculer $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(...)}{2 \times (...)} = \frac{...}{...} = ...$

Étape 2 : Calculer $g(x_S)$:

$$g(...) = -(...) ^2 + 6 \times (...) = -... + ... = ... \text{ m}$$

Étape 3 : La hauteur maximale de l'arche est de ... mètres, atteinte à $x = ...$ m.

4. **VAL** Vérifier que $x = 0$ et $x = 6$ sont les racines de g en montrant que

$$g(x) = -x(x - 6). \text{ (2 pts)}$$

Aide : Développer $-x(x - 6)$:

$$-x(x - 6) = -x \times x + (-x) \times (-6) = ... + ... = ...$$

On retrouve bien $g(x)$, donc les racines sont $x = ...$ et $x = ...$

5. **ANA** Un panneau de bois de 2 m de large et 1,8 m de haut doit passer sous l'arche (centré). Est-ce possible ? (2 pts)

Aide : Le panneau est centré sous l'arche (milieu en $x = 3$). Il occupe l'espace entre $x = ...$ et $x = ...$

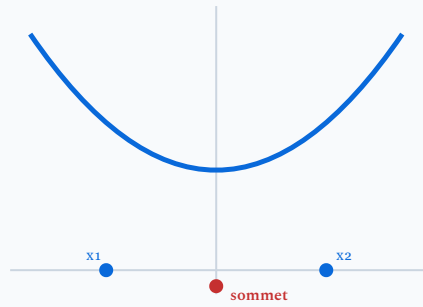
Étape 1 : Calculer $g(2)$: $g(2) = -(2)^2 + 6 \times 2 = -... + ... = ... \text{ m}$

Étape 2 : Comparer : $g(2) = ... \text{ m}$ et la hauteur du panneau est 1,8 m. Comme $... > 1,8$, le panneau passer.

STANDARD

Exercice 1 – Étude d'une fonction du second degré

8 points



Parabole $a > 0$: sommet et racines

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

1. **APP** Identifier les coefficients a , b et c . La parabole est-elle ouverte vers le haut ou vers le bas ? (1 pt)

2. **REA** Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole. (2 pts)

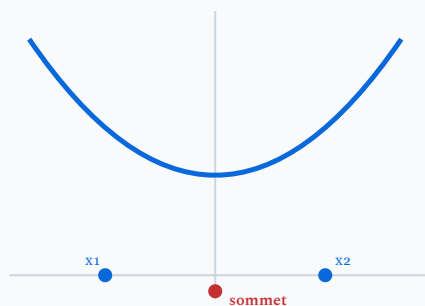
3. **COM** Donner l'équation de l'axe de symétrie de la parabole. (1 pt)

4. **REA** Calculer le discriminant Δ et en déduire les racines de $f(x) = 0$. (2,5 pts)

5. **VAL** Vérifier que $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)$ en développant cette expression. (1,5 pt)

Exercice 2 – Tableau de signes

7 points



Parabole $a > 0$: sommet et racines

On reprend la fonction $f(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x - 1)(x - 3)$ de l'exercice 1.

1. **ANA** Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} . (2 pts)

2. **REA** Compléter le tableau de signes de $f(x)$ sur \mathbb{R} . (2 pts)

x	$-\infty$			$+\infty$
Signe de $f(x)$							

3. **ANA** Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. (1,5 pt)

4. **VAL** Vérifier le résultat en calculant $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$. (1,5 pt)

Exercice 3 – Arche parabolique

5 points

Un charpentier conçoit une arche en bois pour l'entrée d'un jardin. La forme de l'arche est modélisée par la fonction h définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$h(x) = -x^2 + 4x$$

où x est la distance horizontale (en mètres) depuis le pied gauche de l'arche et $h(x)$ la hauteur (en mètres).

1. **APP** Vérifier que $h(0) = 0$ et $h(4) = 0$. Interpréter ces résultats. (1 pt)

2. **REA** Calculer la hauteur maximale de l'arche. Pour quelle distance horizontale est-elle atteinte ? (2 pts)

3. **ANA** Un camion de livraison mesure 2,5 m de haut et 2 m de large (centré sous l'arche). Le camion peut-il passer sous l'arche ? Justifier par un calcul. (2 pts)

APPROFONDISSEMENT

Exercice 1 – Forme factorisée et étude de signe

8 points

Soit $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

1. **REA** Calculer les coordonnées du sommet de la parabole et déterminer le sens de variation de f . (2 pts)

2. **REA** Montrer que $x = 1$ est racine de f , puis déterminer la seconde racine en utilisant la symétrie de la parabole. (2 pts)

3. **ANA** Écrire la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ puis dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur \mathbb{R} . (2 pts)

4. **ANA** Résoudre les inéquations $f(x) \geq 0$ puis $f(x) > -9$. (2 pts)

Exercice 2 – Optimisation d'un cadre en menuiserie

12 points

Un menuisier agenceur dispose d'une planche de longueur totale 6 m. Il souhaite fabriquer un cadre rectangulaire ouvert (trois côtés) pour un habillage mural. Le cadre est constitué de deux montants verticaux de largeur x (en mètres) et d'une traverse horizontale de longueur L (en mètres).

La contrainte de matière impose : $2x + L = 6$, soit $L = 6 - 2x$ avec $0 < x < 3$.

1. **APP** Exprimer l'aire $A(x) = x \times L$ en fonction de x seul. Montrer que $A(x)$ est un polynôme de degré 2 et identifier ses coefficients. (2 pts)

2. **REA** Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole représentant A . (2 pts)

3. **ANA** En déduire les dimensions du cadre qui maximisent l'aire. Quelle est cette aire maximale ? (2 pts)

4. **ANA** Le menuisier agenceur souhaite un cadre d'aire au moins égale à 4 m^2 . Résoudre $A(x) \geq 4$ en utilisant la forme factorisée et un tableau de signes. Donner l'ensemble des valeurs de x possibles. (3 pts)

5. **COM** Proposer des dimensions entières (en cm) qui rendent l'aire maximale. Rédiger la réponse en une phrase complète. (1 pt)

6. **VAL** Un charpentier dispose d'une planche de 8 m au lieu de 6 m pour le même type de cadre. Déterminer la nouvelle aire maximale et comparer avec le résultat précédent. (2 pts)
