

Compléments sur les espaces vectoriels – TD₁

Familles de vecteurs

Exercice 1 :

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x - i|$$

1. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
2. Quel résultat peut-on en déduire sur E ?

Exercice 2 : CCINP 2024

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X + k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^n = 0$.

2. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k (X + k)^p = 0$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$. Conclure.

Exercice 3 : CCINP 2023

1. Montrer, sans les calculer, que le polynôme $P = X^3 + X + 1$ admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On les note α, β, γ .
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z &= 0. \end{cases}$$

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 4 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cap G = F + G$ si, et seulement si, $F = G$.

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 5 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ alors $(P_k(X + a))_{0 \leq k \leq n}$ aussi.
2. Soit $a \neq b$. Montrer que $((X - a)^k (X - b)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et $b = 1$.

Décomposer $Q = \frac{d^n}{dX^n} (X^n \times (X - 1)^n)$ dans la base $(X^k (X - 1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul. On note $p = \deg(B)$ et on pose $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid B \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Exprimer la dimension de F en fonction de p .
3. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{K}_n[X]$ et donner une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Applications linéaires**Exercice 7 : Résultats à retenir**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
2. Donner les inclusions qui sont vraies entre les sous-espaces vectoriels de E suivants :
 - (a) $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g)$.
 - (b) $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Ker}(f)$.
 - (c) $\text{Im}(f + g)$ et $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
 - (d) $\text{Ker}(f + g)$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.
3. Que peut-on en déduire pour les suites de sous-espaces vectoriels de E : $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$?
4. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que : $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Exercice 8 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que f est surjective. Montrer que f^2 est surjective.
2. On suppose que $f^3 = f$. Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 9 : Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \text{Ker}(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que, pour tout $q \geq r$, $N_q = N_r$.
3. Montrer que la suite (I_k) est décroissante pour l'inclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, I_k \supset I_{k+1}$.
4. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $I_r = I_{r+1}$. Montrer que, pour tout $q \geq r$, $I_q = I_r$.

Dans la suite, on suppose que E est de dimension finie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = \dim(N_k)$.

5. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$.
Indication : on pourra montrer que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
6. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.
7. Montrer que $E = N_r \oplus I_r$.
8. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{k+2} - d_{k+1} \leq d_{k+1} - d_k.$$

Exercice 10 :

Soient E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$.

1. Montrer que l'image et le noyau de u sont supplémentaires.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 11 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit G un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\text{Ker}(f) \cap G)$.

Indication : considérer $g : G \rightarrow F$ la restriction au départ de f à G .

$$x \mapsto f(x)$$

2. Soit H un sous-espace vectoriel de F . Montrer que $\dim(f^{-1}(H)) = \dim(E) - \text{rg}(f) + \dim(\text{Im}(f) \cap H)$.

Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 12 :

Soient E et F des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{Id}_E$.
Montrer que $\text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u) = F$.

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère f et g deux endomorphismes de E . On suppose que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ et que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$.

Exercice 14 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u^2 + 2u$. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E).$$

Projecteurs et symétries

Exercice 15 :

On pose $E = \mathbb{R}^n$ et on considère $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

1. Montrer que H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Déterminer le projeté de u sur H parallèlement à D et le projeté de u sur D parallèlement à H .

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq \dim(E)$.

1. Montrer que $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) = \dim(E)$.
2. Montrer que $\dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(q)$.
3. Montrer que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$.
4. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 17 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur, si et seulement si, $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que dans ce cas $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Hyperplans

Exercice 18 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et G un sous-espace vectoriel de dimension p de E . Montrer que G est l'intersection de $n - p$ hyperplans de E .

Exercice 19 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Montrer que pour tout vecteur x non nul de E , il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(x) = 1$.
2. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Montrer que l'application $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme.
$$x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$
3. En déduire qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Compléments sur les espaces vectoriels – Exercices supplémentaires

Famille de vecteurs

Exercice 20 :

On note $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (3, 2, 1)$. On pose $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

1. Déterminer une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. On pose $G = \{(x, y, z) \in E \mid x - 2y + z = 0\}$. Déterminer une base de G et montrer que $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 21 : CCINP 2023

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.
2. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 22 :

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f = \sin$. La famille $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ est-elle libre ?

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 23 :

On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$P_k = \frac{X \times (X-1) \times \dots \times (X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que, pour tous $l \in \mathbb{Z}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k(l) \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $P(l) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24 :

On pose

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid (X^4 + 1) \times P(X) = P(X^2)\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $P \in E \setminus \{0\}$. Déterminer le degré de P .
3. Donner un polynôme non nul appartenant à E .
4. Déterminer la dimension de E .

Applications linéaires

Exercice 25 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{rg}(u+v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \iff \begin{cases} \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \\ \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E. \end{cases}$$

Exercice 26 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $g : \begin{array}{ccc} \text{Im}(f) & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$

1. Montrer que $\text{Im}(g) = \text{Im}(f^2)$ et que $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\dim(\text{Ker} f) \leq \dim(\text{Ker} f^2) \leq 2 \dim(\text{Ker} f)$.

Sommes directes, projecteurs et symétries

Exercice 27 :

On pose $E = \mathbb{C}^3$ et on considère $H = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2z = 0\}$ et $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Montrer que H et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
2. Soit $(x, y, z) \in E$. Déterminer le projeté de (x, y, z) sur H parallèlement à D et le projeté de (x, y, z) sur D parallèlement à H .
3. Déterminer la symétrie s par rapport à H parallèlement à D .

Exercice 28 :

1. On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$, $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$, $G = \{P \in E \mid P(-1) = P(0) = 0\}$ et $H = \{P \in E \mid P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 29 :

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)\}$. On pose, pour tout $f \in E$, $u(f) = f''$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker}(u)$.
3. Déterminer les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin$.
4. Déterminer les vecteurs $f \in E$ tels que $u(f) = \sin^2$.
5. Déterminer $\text{Im}(u)$.
6. Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

Exercice 30 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que v est une surjection.
2. Montrer que u est une injection.
3. Montrer que $v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 31 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(E))^p$. On suppose que $f_1 + \dots + f_p = \text{Id}_E$ et que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_i est un projecteur.
2. En déduire que $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Exercice 32 :

Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P(X) \mapsto P(X^2) + (1 + X^2) \times P(X)$ est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Hyperplan

Exercice 33 :

Montrer que $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et donner un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 34 :

Soient $n \geq 1$ et $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\right\}$.

Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 35 :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si f est de rang 1, alors il existe un vecteur non nul $u \in E$ et une forme linéaire sur E non nulle φ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(x).u$
2. Montrer que la réciproque est vraie.

Dans la suite, on suppose que f est de rang 1.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.
4. Pour tout entier $k \geq 1$, déterminer f^k .