

## Fonction logarithme népérien - L'essentiel du cours

### a) Existence

$\ln x$  n'existe que si  $x > 0$ .

► *Exemple* : La fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(x - 1)$  n'est définie que sur  $]1; +\infty[$  car il faut que  $x - 1$  soit strictement positif.

### b) Lien entre $\ln x$ et $e^x$

- $\ln b = a \Leftrightarrow b = e^a$
- $\ln(e^x) = x$  ;  $e^{\ln x} = x$  (pour  $x > 0$ )

► *Exemple* :  $\ln(e^{-2}) = -2$

### c) Valeurs particulières

$\ln 1 = 0$  ;  $\ln e = 1$

### d) Propriétés algébriques

Si  $a > 0$  et  $b > 0$  :  
 $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  ;  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$  ;  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Pour tout entier  $n$ ,  $\ln(a^n) = n \ln a$  ;  $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

► *Exemple* : Si  $x > 0$ ,  $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2 \ln x$

### e) Signe de $\ln x$

- Si  $0 < x < 1$  alors  $\ln x$  est strictement négatif.
- Si  $x > 1$  alors  $\ln x$  est strictement positif.

### f) Limites

**En 0** :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

**En  $+\infty$**  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

### g) Dérivées

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0)$$

► *Exemple* :  $[\ln(x^2 + 1)]' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

### h) Équations et inéquations

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$  ;  $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$  ;  $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$   
 $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$  ;  $\ln x \leq a \Leftrightarrow 0 < x \leq e^a$   
 $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$  ;  $\ln x \geq a \Leftrightarrow x \geq e^a$

► *Remarque* : Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations* :

•  $\ln x + \ln 2 = 5$ . Condition d'existence :  $x > 0$ .

Avec cette condition :

$$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2}. \quad S = \left\{ \frac{e^5}{2} \right\}$$

•  $\ln(x + 2) \leq 1$ . Condition d'existence :  $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ .

Avec cette condition :

$$\ln(x + 2) \leq 1 \Leftrightarrow x + 2 \leq e \Leftrightarrow x \leq e - 2. \quad S = ]-2; e - 2]$$

i) **Détermination du plus petit entier  $n$  tel que  $q^n \geq a$  (si  $q > 1$ ) ou tel que  $q^n \leq a$  (si  $0 < q < 1$ )**

**Méthode :** on isole  $q^n$  et on utilise que  $\ln(q^n) = n \ln q$ .

► *Exemples :*

• Recherche du plus petit entier  $n$  tel que  $2^n \geq 3000$  :

$$2^n \geq 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(3000) \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 3000 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3000}{\ln 2} \quad (\text{car } \ln 2 > 0).$$

Or  $\frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$ . Le plus petit entier qui convient est donc 12.

• Recherche du plus petit entier  $n$  tel que  $0,8^n \leq 0,01$  :

$$0,8^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \quad (\text{car } \ln 0,8 < 0).$$

Or  $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$ . Le plus petit entier qui convient est donc 21.

j) **Logarithme décimal**

- Pour tout  $x > 0$ ,  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
- Pour tout entier (positif ou négatif)  $n$ ,  $\log(10^n) = n$

► *Exemples :*

$$\log 1 = 0 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1 \quad ; \quad \log 0,01 = -2$$

# Fonction logarithme népérien

## ► Exercice n°1

Exprimer les nombres suivants en fonction de  $\ln(2)$  :

1.  $\ln(8)$
2.  $\ln(8) + \ln(32)$
3.  $\ln(64) - \ln(8)$
4.  $\ln(16) - 3\ln(2)$

## ► Exercice n°2

Exprimer les nombres suivants en fonction de  $\ln(3)$  :  
( $e$  est le nombre tel que  $\ln e = 1$ )

1.  $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$
2.  $\ln(81) - 2\ln(3)$
3.  $\ln\left(\frac{3}{e}\right)$
4.  $\ln(9e^2)$

## ► Exercice n°3

Dériver la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1.  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x$
2.  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = (\ln x)^2$
3.  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
4.  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4 \ln x}{x^2}$

## ► Exercice n°4

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \ln x$
2.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)$
4.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) + x^2$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} - \ln x$$

## ► Exercice n°5

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\ln(x + 1) = 0$
2.  $\ln(2 - 3x) = \ln 4$
3.  $\ln(4x) = \ln(x - 3)$
4.  $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6$
5.  $\ln x = 4$
6.  $\ln(2x) = 5$
7.  $\ln(3x) = 1$
8.  $\ln(1 + x) = -2$

## ► Exercice n°6

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $\ln(x + 1) \leq 0$
2.  $\ln x \geq 3$
3.  $1 - \ln x \geq 0$

## ► Exercice n°7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln x$ .

Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  et étudier ses variations sur  $]0; +\infty[$ .

## ► Exercice n°8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,5; +\infty[$  par  $f(x) = x(\ln x - 1)$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0,5; +\infty[$ .
3. Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $[0,5; +\infty[$ .

## ► Exercice n°9

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique  $x$ , exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8,68 \times \ln x + 93,28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.

2. Justifier que  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels.
  - a) On cherche à connaître le premier nombre entier  $x$  de bars pour lequel l'intensité  $f(x)$  dépasse 120 décibels à l'aide d'un script python. Pour cela on part d'une pression  $x = 1$  que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.  
Compléter la 3<sup>e</sup> ligne du code python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```

from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 ..... :
    x=x+1
print(x)
```

*Remarque : avec python le logarithme népérien est donné par  $\log()$*

- b) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation  $f(x) = 120$  et retrouver ce que devrait afficher le script python.

► **Exercice n°10**

La fonction  $B$  définie sur  $[1; 6]$  par  $B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$  représente le bénéfice mensuel (en dizaines de milliers d'euros) réalisé par une entreprise lors de la vente de  $x$  centaines d'objets produits par mois.

En étudiant les variations de  $B$ , déterminer la quantité d'objets à produire par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

► **Exercice n°11**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 3 - 2x - \ln x$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Dériver  $f$  et étudier ses variations sur  $]0; +\infty[$ .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1.
4. Étudier, par le calcul, la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de la droite  $D$  d'équation  $y = 3 - 2x$  sur  $]0; +\infty[$ .
5. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $[1; 2]$ . Déterminer une valeur approchée de  $x_0$  à 0,1 près par défaut.
6. Justifier que  $f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .

► **Exercice n°12**

Dériver la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1.  $f$  est définie sur  $]2; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(3x - 6)$
2.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(1 + x^2)$
3.  $f$  est définie sur  $] -\infty; 2[$  par  $f(x) = \ln(-2x + 4)$
4.  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln\left(3 + \frac{1}{x}\right)$
5.  $f$  est définie sur  $]2; +\infty[$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x-2}\right)$

► **Exercice n°13**

Une étude portant sur le prix d'un type de cahiers aboutit à la modélisation suivante :

- $f$  est la fonction définie sur  $]0; 1]$  par  $f(x) = -4 \ln x$ ;
- $g$  est la fonction définie sur  $]0; 1]$  par  $g(x) = 4 \ln(6x + 1)$ ;
- $f(x)$  et  $g(x)$  représentent respectivement la quantité de cahiers demandée et offerte, exprimée en milliers, en fonction du prix unitaire  $x$  du cahier exprimé en euros.

1. Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en 0.
2. Étudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $]0; 1]$  et dresser leur tableau de variation.
3. En économie, le prix d'équilibre est la valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) = g(x)$ . Déterminer la valeur exacte de ce prix d'équilibre.

► **Exercice n°14**

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entier positif  $n$  vérifiant la relation donnée :

1.  $3^n \geq 800$
2.  $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01$
3.  $(1,03)^n \geq 2$
4.  $(0,95)^n \leq 0,2$

► **Exercice n°15**

Le pH d'une solution est défini par  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$  où  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  désigne la concentration en moles par litre d'ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  contenus dans la solution.

1. Une solution de 150 millilitres admet une concentration d'ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  de  $10^{-2}$  moles par litre.
  - a) Calculer le pH de cette solution.
  - b) Combien de moles d'ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  contient cette solution ?

2. On ajoute à la solution 850 millilitres d'eau distillée.
  - a) Quelle est la concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans la nouvelle solution obtenue ?
  - b) En déduire le nouveau pH.

► **Exercice n°16**

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par  $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$  où  $A$  représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et  $A_0$  une amplitude référence.

1. Que vaut  $\frac{A}{A_0}$  pour un séisme de magnitude égale à 5 ?
2. Si l'amplitude maximale des ondes  $A$  est multipliée par 100, de combien augmente la magnitude ?

► **Exercice n°17**

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par  $A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$  où  $L$  est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique,  $P_e$  est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et  $P_s$  est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1. Un technicien effectue une mesure à la sortie d'une fibre de 5 km dont la puissance d'entrée est  $P_e = 5$  mW. Il obtient une puissance de sortie égale à  $P_s = 3,5$  mW. Calculer la valeur du coefficient d'atténuation correspondant.
2. Lorsque  $P_s = \frac{1}{10} \times P_e$ , on considère que la fibre optique doit être remplacée. Quelle est alors la valeur de  $A$  pour une fibre de 10 km ?
3. Expliquer pourquoi le coefficient d'atténuation ne peut pas être négatif.

# Fonction logarithme népérien

## ► Exercice n°1

- $\ln(8) = \ln(2^3) = 3 \ln 2$
- $\ln(8) + \ln(32) = \ln(2^3) + \ln(2^5) = 3 \ln 2 + 5 \ln 2 = 8 \ln 2$
- $\ln(64) - \ln(8) = \ln(2^6) - \ln(2^3) = 6 \ln 2 - 3 \ln 2 = 3 \ln 2$
- $\ln(16) - 3 \ln(2) = \ln(2^4) - 3 \ln 2 = 4 \ln 2 - 3 \ln 2 = \ln 2$

## ► Exercice n°2

- $\ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 9 = -\ln(3^2) = -2 \ln 3$
- $\ln(81) - 2 \ln(3) = \ln(3^4) - 2 \ln 3 = 4 \ln 3 - 2 \ln 3 = 2 \ln 3$
- $\ln\left(\frac{3}{e}\right) = \ln 3 - \ln e = \ln 3 - 1$
- $\ln(9e^2) = \ln 9 + \ln(e^2) = \ln(3^2) + 2 = 2 \ln 3 + 2$

## ► Exercice n°3

- $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$
- $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$
- $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$
- $f'(x) = \frac{4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 4 \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{4x - 8x \ln x}{x^4} = \frac{4 - 8 \ln x}{x^3}$

## ► Exercice n°4

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \ln x = +\infty$ .
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^2 = 0$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3(\ln x) + x^2 = -\infty$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty, \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$$

## ► Exercice n°5

- CE :  $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ .  
 $\ln(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) = \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .  $S = \{0\}$ .
- CE :  $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} > x$   
 $\ln(2 - 3x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ .  $S = \{-\frac{2}{3}\}$ .
- CE :  $4x > 0$  et  $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$   
 $\ln(4x) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 4x = x - 3 \Leftrightarrow x = -1$  qui ne vérifie pas la CE.  $S = \emptyset$
- CE :  $x - 1 > 0$  et  $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$   
 $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln[(x - 1)(x - 2)] = \ln 6 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 6$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ .  $\Delta = 25$ ;  $x_1 = -1$  qui ne vérifie pas la CE;  $x_2 = 4$ .  $S = \{4\}$ .
- CE :  $x > 0$   
 $\ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ .  $S = \{e^4\}$ .
- CE :  $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$   
 $\ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^5$ .  $S = \{\frac{1}{2}e^5\}$ .
- CE :  $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$   
 $\ln(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}e$ .  $S = \{\frac{1}{3}e\}$ .
- CE :  $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$   
 $\ln(1 + x) = -2 \Leftrightarrow 1 + x = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2} - 1$ .  $S = \{e^{-2} - 1\}$ .

## ► Exercice n°6

- CE :  $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$   
 $\ln(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) \leq \ln 1 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ .  $S = ]-1; 0]$
- CE :  $x > 0$   
 $\ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3$ .  $S = [e^3; +\infty[$
- CE :  $x > 0$   
 $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow e^1 \geq x$ .  $S = ]0; e]$

## ► Exercice n°7

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- $f'(x) = x + \frac{1}{x}$  toujours strictement positif sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

► **Exercice n°8**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- $f'(x) = 1 \times (\ln x - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$ .

|                 |                    |    |           |
|-----------------|--------------------|----|-----------|
| $x$             | 0,5                | 1  | $+\infty$ |
| $f'(x) = \ln x$ |                    | -  | +         |
| $f(x)$          | $0,5(\ln 0,5 - 1)$ | -1 | $+\infty$ |

- Utilisons un tableau de signe car c'est un produit.  
Pour le signe de  $\ln x - 1$  sur  $]0,5; +\infty[$  :  $\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e^1$

|             |     |   |           |
|-------------|-----|---|-----------|
| $x$         | 0,5 | e | $+\infty$ |
| $x$         |     | + | +         |
| $\ln x - 1$ | -   | 0 | +         |
| $f(x)$      | -   | 0 | +         |

► **Exercice n°9**

- $f(5) = 107,25$  décibels
- $f'(x) = 8,68 \times \frac{1}{x}$  qui reste strictement positif si  $x > 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8,68 \times \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8,68 \times \ln x + 93,28 = +\infty$
- a)

```
from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 <=120 :
    x=x+1
print(x)
```

- $8,68 \times \ln x + 93,28 = 120 \Leftrightarrow 8,68 \times \ln x = 26,72 \Leftrightarrow \ln x = \frac{26,72}{8,68}$   
 $\Leftrightarrow x = e^{\frac{26,72}{8,68}} \approx 21,72$ . Le premier entier qui convient est 22 et c'est ce que devrait afficher le script.

► **Exercice n°10**

$$B'(x) = -2x + 10 - 9,8 \times \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$$

Pour le signe de  $-2x^2 + 10x - 8$  :  $\Delta = 36$ ;  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 1$ .

|                   |   |        |        |
|-------------------|---|--------|--------|
| $x$               | 1 | 4      | 6      |
| $-2x^2 + 10x - 8$ | 0 | +      | 0      |
| $x$               |   | +      | +      |
| $B'(x)$           |   | -      | 0      |
| $B(x)$            | 0 | 3,9096 | 0,6659 |

Il faut produire 4 centaines d'objets pour obtenir un bénéfice maximal.

► **Exercice n°11**

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - 2x = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 2x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
- $f'(x) = -2 - \frac{1}{x}$  qui reste strictement négatif si  $x > 0$ .  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .
- $y = f(1) + f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 1 - 3(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 4$ .
- Étudions le signe de  $f(x) - (3 - 2x) = -\ln x$ .  
Sur  $]0; 1[$ ,  $\ln x < 0$  et  $-\ln x > 0$ . La courbe de  $f$  est au dessus de la droite  $D$  sur  $]0; 1[$ .  
Sur  $]0; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$  et  $-\ln x < 0$ . La courbe de  $f$  est en dessous de la droite  $D$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Sur  $[1; 2]$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante et 0 est compris entre  $f(1) = 1$  et  $f(2) \approx -1,7$ .  
La calculatrice indique que  $1,3 < x_0 < 1,4$ . Une valeur approchée de  $x_0$  à 0,1 près par défaut est donc 1,3.
- $f'(x) = -(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2}$  qui reste strictement positif.  $f$  est bien convexe sur  $]0; +\infty[$ .

► **Exercice n°12**

- $f'(x) = \frac{3}{3x-6} = \frac{1}{x-2}$
- $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
- $f'(x) = \frac{-2}{-2x+4} = \frac{1}{x-2}$
- $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{3x+1} = -\frac{1}{x(3x+1)}$
- $f'(x) = \frac{\frac{3 \times (x-2) - 3x \times 1}{(x-2)^2}}{\frac{3x}{x-2}} = \frac{-6}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{3x} = \frac{-2}{3(x-2)}$

► **Exercice n°13**

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 6x + 1 = 1$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln x = \ln 1 = 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$
- $f'(x) = \frac{-4}{x}$  et  $g'(x) = 4 \times \frac{6}{6x+1}$ .

|         |           |   |         |   |           |
|---------|-----------|---|---------|---|-----------|
| $x$     | 0         | 1 | $x$     | 0 | 1         |
| $f'(x)$ |           | - | $g'(x)$ |   | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0 | $g(x)$  | 0 | $4 \ln 7$ |

- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -4 \ln x = 4 \ln(6x+1)$  et  $0 < x \leq 1$   
 $\Leftrightarrow -\ln x = \ln(6x+1)$  et  $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(6x+1)$  et  $0 < x \leq 1$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 6x+1$  et  $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow 0 = 6x^2 + x - 1$  et  $0 < x \leq 1$   
 $\Delta = 25$ ;  $x_1 = -\frac{1}{2} \notin ]0; 1]$  et  $x_2 = \frac{1}{3} \in ]0; 1]$ . Le prix d'équilibre est égal à  $\frac{1}{3}$ .

► **Exercice n°14**

- $3^n \geq 800 \Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln(800) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln 3}_+ \geq \ln(800) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(800)}{\ln(3)} \approx 6,08$ .

Le plus petit entier qui convient est  $n = 7$ .

- $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}_- \leq \ln(0,01)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 4,19.$$

Le plus petit entier qui convient est  $n = 5$ .

- $(1,03)^n \geq 2 \Leftrightarrow \ln[(1,03)^n] \geq \ln(2) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(1,03)}_+ \geq \ln(2)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \approx 23,45. \text{ Le plus petit entier qui convient est } n = 24.$$

- $(0,95)^n \leq 0,2 \Leftrightarrow \ln[(0,95)^n] \leq \ln(0,2) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0,95)}_- \leq \ln(0,2)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \approx 31,37. \text{ Le plus petit entier qui convient est } n = 32.$$

► **Exercice n°15**

- $\text{pH} = -\log[10^{-2}] = 2$
  - $10^{-2} \times 0,15 = 0,0015$  moles
- Concentration = 0,0015 car on a 0,0015 moles dans une solution d'1 litre (150 + 850 millilitres).
  - $\text{pH} = -\log[0,0015] \approx 2,8$

► **Exercice n°16**

- $\log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^5$
- $\log\left(\frac{100 \times A}{A_0}\right) = \log(100) + \log\left(\frac{A}{A_0}\right) = 2 + \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ . La magnitude augmente de 2.

► **Exercice n°17**

- $A = \frac{1}{5} \times 10 \times \log\left(\frac{5}{3,5}\right) \approx 0,31$  décibels par kilomètre
- $A = \frac{1}{10} \times 10 \times \log(10) = 1$  décibel par kilomètre
- On a toujours  $P_s < P_e$  (la puissance de sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée)  
 Donc  $\frac{P_e}{P_s} > 1$  et  $\log\left(\frac{P_e}{P_s}\right) > 0$ .  $A$  ne peut donc pas être négatif.