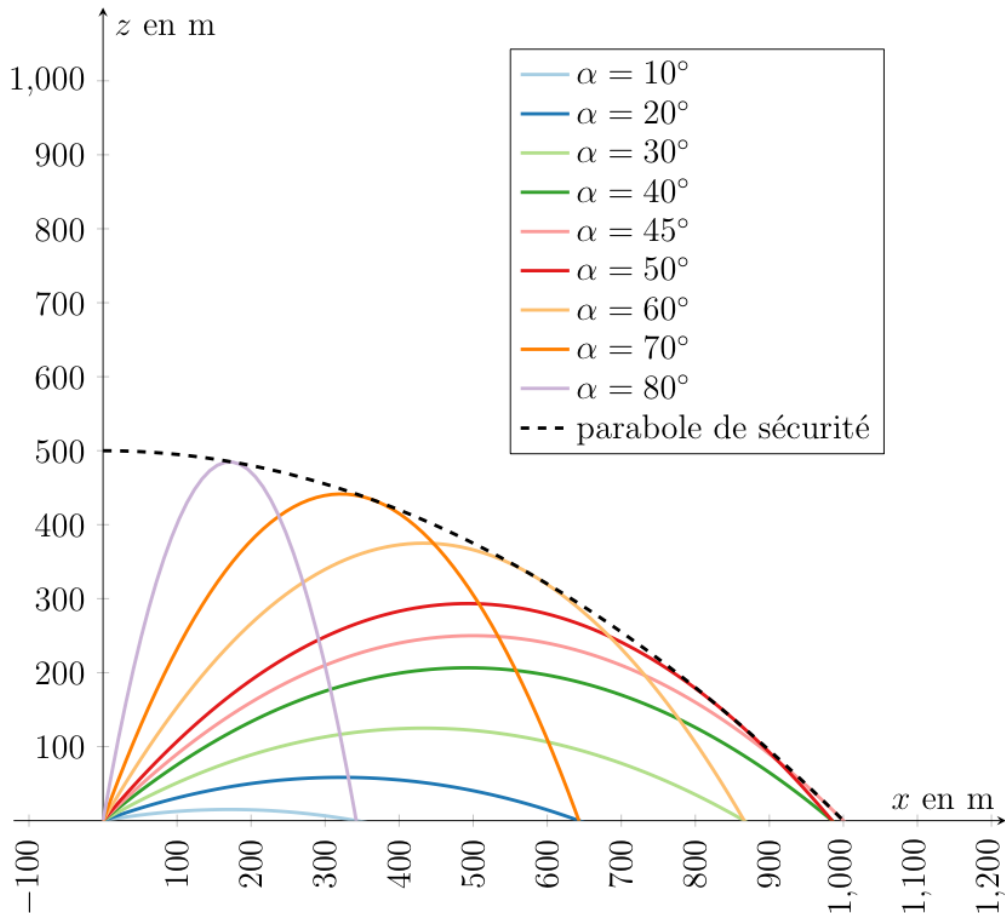


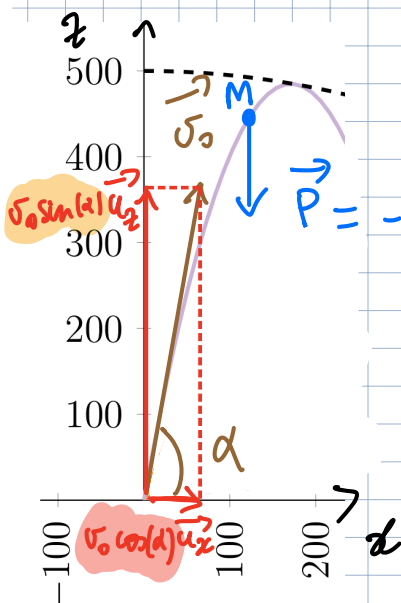
1 Tir d'un projectile

Un obus de masse $m = 1 \text{ kg}$ est tiré par un char à la date $t = 0$ au niveau du sol à partir d'un point O qui sera pris comme origine du repère cartésien tel que l'axe (Oz) coïncide avec la verticale ascendante. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est uniforme tout au long de la trajectoire avec $\|\vec{g}\| = g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et les forces de frottement sont négligées. Le vecteur vitesse initial contenu dans le plan (Oxz) a pour norme $\|\vec{v}_0\| = v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et sa direction variable est telle que $(\vec{e}_x, \vec{v}_0) = \alpha$

Trajectoire $z(x)$ de l'obus pour différentes valeurs de α



1.1. Déterminer les équations $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de l'obus puis l'équation de sa trajectoire $z(x)$, en fonction de v_0 , g et α .



D'après la seconde loi de Newton :

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = \int_0^t -g dt' = -gt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t & (1) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$(2) \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + \cancel{v_0} \sin(\alpha) \times \frac{x}{\cancel{v_0} \cos(\alpha)}$$

$$z(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x \quad \left. \vphantom{z(x)} \right\} \text{eq. de la trajectoire}$$

On remarque que c'est une parabole de concavité négative ce qui est

1.2. Exprimer en fonction de v_0 , g et α , le temps t_s nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude et les coordonnées de ce point S ainsi atteint. Faire l'application numérique pour $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$ et $\alpha_3 = 90^\circ$.

cohérent

Lorsque l'altitude maximale est atteinte la composante de la vitesse verticale est nul
ainsi $t = t_s$

$$\dot{z}(t_s) = -g t_s + v_0 \sin(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = t_s$$

On remplace t par t_s dans les équations horaires :

$$\text{ordonnée de } S : z(t_s) = -\frac{1}{2} g \times t_s^2 + t_s \times v_0 \times \sin(\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2} \cancel{g} \times \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{\cancel{g^2}} + \frac{v_0 \sin(\alpha) \times v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2 \times g} \quad \text{noté } z_s$$

Abscisse de S: $x(t_s) = v_0 \cos(\alpha) \times t_s = v_0 \cos(\alpha) \times v_0 \frac{\sin(\alpha)}{g}$
 $= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$ note x_s

Remarque : $[x(t)] = \frac{[v_0^2]}{[g]} = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L.$

On en déduit les coord. de S : $S(x_s; z_s)$

AN pour $\alpha_1 = 30^\circ \Rightarrow t_s = 5 \text{ s}$ et $S(433; 125)$ (en m)
 $\alpha_2 = 60^\circ \Rightarrow t_s = 8,71$ et $S(433; 375)$
 $\alpha_3 = 90^\circ \Rightarrow t_s = 10 \text{ s}$ et $S(0; 500)$

1.3. Déterminer la portée maximale x_p du tir quand la cible est située à la même altitude que le char.

* L'instant t_p pour lequel l'obus touche le sol est tel que :

$$z(t_p) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t_p^2 + v_0 \sin(\alpha) t_p = 0$$

$$\Leftrightarrow t_p = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

* La portée du tir p est telle que $p = x(t_p)$

$$\Leftrightarrow p = v_0 \cos(\alpha) \times t_p = v_0 \cos(\alpha) \times \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

$$\Leftrightarrow p(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \text{ qui est maximale pour } 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

d'où $x_p = p(\alpha = \frac{\pi}{4}) = \frac{v_0^2}{g} = \frac{10^4}{10} = 10^3 \text{ m}$

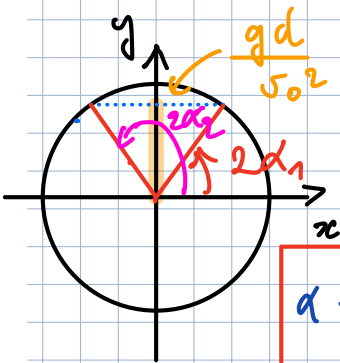
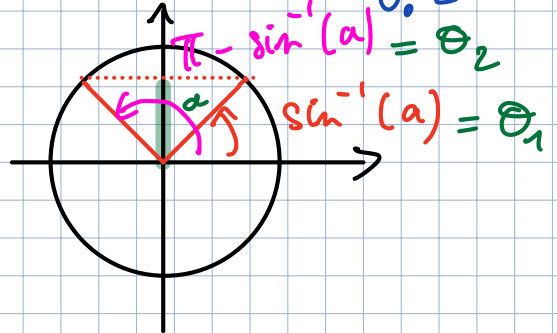
1.4. La norme du vecteur vitesse v_0 étant fixée, déterminer la (les) valeur(s) de l'angle α permettant d'atteindre une cible située à la même altitude que le char et à une distance $d < x_p$ de l'origine du tir.

On veut atteindre une cible située à $x(t_f) = d < x_p$

$$\Leftrightarrow p(\alpha) = d \Leftrightarrow \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = d \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{gd}{v_0^2}$$

Rappel : $\sin(\theta) = a$

$$\Rightarrow \theta = \begin{cases} \theta_1 \\ \text{ou } \theta_2 \end{cases}$$



$$2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) = 2\alpha_1 \text{ ou } 2\alpha = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) = 2\alpha_2$$

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right) \text{ ou } \alpha = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)$$

On remarque que $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

1.5. La norme du vecteur vitesse v_0 étant donnée, montrer qu'une cible de coordonnées (x_c, z_c) peut être atteinte si $\tan(\alpha)$ vérifie une équation du second degré que l'on précisera en fonction de v_0 , g , x_c et z_c . On rappelle que $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$.

Le point $C(x_c; z_c)$ est atteignable s'il $\in$ à la trajectoire, c'est-à-dire si ses coord. vérifient l'équation de la trajectoire :

$$z(x_c) = z_c \Leftrightarrow -\frac{g x_c^2}{2 v_0^2} \times \frac{1}{\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) x_c = z_c \quad \text{Or } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{g x_c^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) x_c - z_c = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{g x_c^2}{2 v_0^2} \times \underbrace{\tan^2(\alpha)}_{x^2} + x_c \times \underbrace{\tan(\alpha)}_x - \left(z_c + \frac{g x_c^2}{2 v_0^2}\right) = 0$$

$$a \times x^2 + b \times x + c = 0$$

1.6. En étudiant le signe du discriminant Δ de cette équation du second degré en $\tan(\alpha)$, trouver l'équation de la **parabole de sécurité**, qui délimite l'ensemble des points accessibles par le projectile de ceux qui ne le sont pas, toujours pour une vitesse initiale de norme v_0 donnée.

Cette équation du 2nd deg. admet des solutions réelles si $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow x_c^2 - 4 \times \frac{g x_c^2}{2 v_0^2} \left(z_c + \frac{g x_c^2}{2 v_0^2} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times \cancel{x_c^2} > \cancel{4} \frac{\cancel{g} \cancel{x_c^2}}{\cancel{2} v_0^2} \left(z_c + \frac{g x_c^2}{2 v_0^2} \right)$$

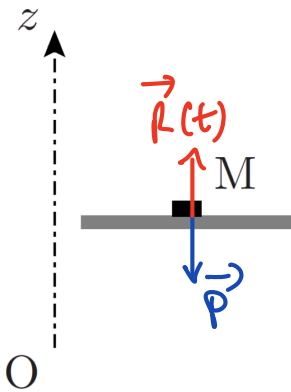
$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2g} > z_c + \frac{g x_c^2}{2 v_0^2}$$

$$\Leftrightarrow z_c < \frac{-g}{2 v_0^2} x_c^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Equation de la parabole de sécurité.

Le point C doit donc se trouver en dessous de la parabole de sûreté être atteignable.

2 Plateau vibrant



On dépose sur un plateau horizontal un objet M de masse m . Le plateau a un mouvement de translation sinusoïdal vertical : la cote $z(t)$ de tout point du plateau, mesurée suivant un axe (Oz) ascendant, est de la forme $z(t) = Z_m \cos(2\pi f t)$ où Z_m représente l'amplitude du mouvement et f sa fréquence. On note $\vec{R}(t) = R(t)\vec{u}_z$ la réaction exercée par le plateau sur l'objet M au cours du mouvement.

2.1. On suppose le contact entre l'objet et le plateau constamment maintenu. Déterminer l'expression de la réaction $R(t)$ en fonction de m , g , Z_m et f .

* Principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse M :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = -mg\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{R} = R\vec{u}_z$$

en notant $g = \|\vec{g}\| > 0$ et $R = \|\vec{R}\| > 0$

* En projection sur l'axe (Oz), on obtient :

$$m \ddot{z} = -mg + R$$

$$\Rightarrow R(t) = m\ddot{z} + mg = -m z_m \omega^2 \cos(\omega t) + mg \quad \text{avec } \omega = 2\pi f.$$

2.2. Quelle est l'expression de la valeur minimale de $R(t)$ au cours du temps, notée $R_{\min}$.

$R(t)$ sera minimale quand $\cos(\omega t) = 1$, c-à-d quand $z(t)$ est maximale, et vaudra alors:

$$R_{\min} = mg - m z_m \omega^2$$

2.3. À quelle condition sur f le contact entre l'objet et le plateau est-il effectivement constamment maintenu?

Pour que la réaction du support soit positive à tout instant, il faut que son minimum soit positif, c'est-à-dire :

$$R_{\min} > 0$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g - \cancel{m} z_m (2\pi f)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow z_m (2\pi f)^2 < g \Leftrightarrow 2\pi f < \sqrt{\frac{g}{z_m}} \Leftrightarrow f < \sqrt{\frac{g}{z_m}} \times \frac{1}{2\pi} = f_{\min}$$

donc

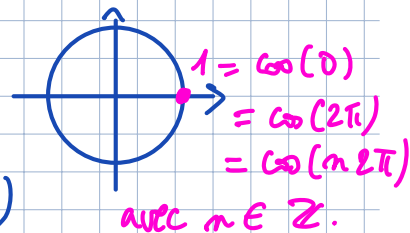
2.4. Sous cette hypothèse, pour quelles positions du plateau la réaction $R(t)$ est-elle minimale au cours du mouvement?

$R(t)$ est minimale quand $\cos(\omega t) = 1$, c-à-d quand $z(t) = +z_m$, lorsque le plateau est dans sa position la plus haute.

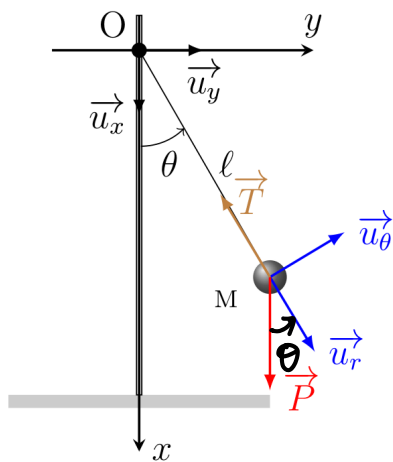
Cela correspond aux instants tels que $\cos(2\pi f t_m) = 1$

$$\Leftrightarrow 2\pi f t_m = n \times 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow t_m = \frac{n}{f} = nT \quad \text{avec } T = \frac{1}{f} \text{ (période)}$$



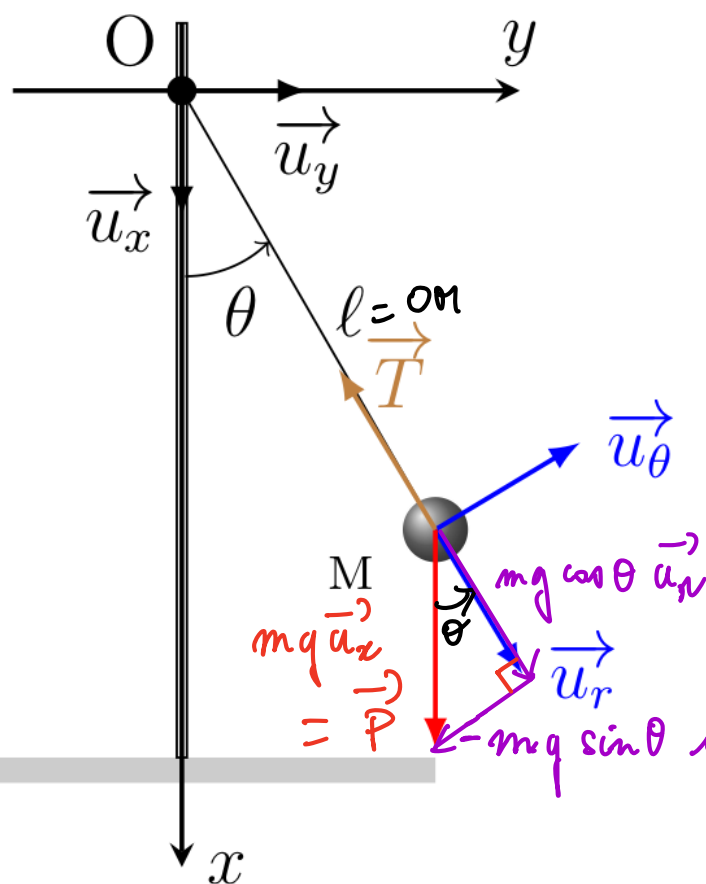
3 Pendule simple



On considère un pendule simple de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$ auquel on a accroché un mobile M de masse $m = 100 \text{ g}$. On donne le module du champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et les frottements sont négligés. On lâche M sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$. On note $T = \|\vec{T}\|$ la norme de la tension du fil.

3.1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ puis l'écrire avec l'approximation des petits angles : $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ (E) avec $\vec{T} = -T\vec{u}_n$



et $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_n - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$

On $\vec{OM} = \ell \vec{u}_n$ avec $\ell = \text{cst}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \ell \frac{d\vec{u}_n}{dt} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ell \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ell \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\vec{a} = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{u}_n + \ell \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

(E) $\Rightarrow \begin{cases} -m\ell \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T & (1) \\ m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (2) \end{cases}$

(2) $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$

Dans l'approximation des petits angles on obtient donc :

$\ddot{\theta}(t) + \underbrace{\frac{g}{\ell}}_{\omega_0^2} \theta(t) = 0$ (2a)

ω_0 est la pulsation propre du pendule.

3.2. Résoudre cette équation différentielle et calculer la période propre $\mathcal{T}_0$ du mouvement.

la solution générale de (2a) est : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Or $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (vitesse initiale nulle).

CI 1 $\left[\begin{aligned} \theta_0 &= A \underbrace{\cos(\omega_0 \times 0)}_1 + B \underbrace{\sin(\omega_0 \times 0)}_0 \\ \theta_0 &= A \end{aligned} \right.$

$$\dot{\theta}(0) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 \times 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \times 0)$$

de même si $\dot{\theta}(0) = 0$

$$0 = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 \times 0) + \omega_0 B \cos(\omega_0 \times 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = B \text{ car } \omega_0 \neq 0$$

En conclusion : $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$$\text{d'où } \mathcal{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

3.3. En intégrant l'équation du mouvement non linéarisée entre $t_0 = 0$ et t quelconque, après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}(t)$, montrer que :

$$\ell \dot{\theta}^2(t) = 2g(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))$$

Bien entendu, quand nous l'aurons étudiée au prochain chapitre, on préférera utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour trouver cette relation.

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow \int_0^t \ell \dot{\theta}(t') \ddot{\theta}(t') dt' &= \int_0^t -g \dot{\theta}(t') \sin(\theta(t')) dt' \\ \Rightarrow \left[\frac{\ell \dot{\theta}^2(t')}{2} \right]_0^t &= \left[g \cos(\theta(t')) \right]_0^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} l \dot{\theta}^2(t) - 0 = m g l (\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))$$

$$\Rightarrow l \dot{\theta}^2(t) = 2 g l (\cos \theta(t) - \cos \theta_0)$$

3.4. Exprimer la norme de la tension du fil $T(\theta)$ en fonction de θ , m , g et θ_0 . Quand est-elle maximale ? Calculer la valeur correspondante T_{max} .

$$-m l \dot{\theta}^2 = m g \cos \theta - T \quad (1) \Rightarrow T = m g \cos \theta + m l \dot{\theta}^2$$

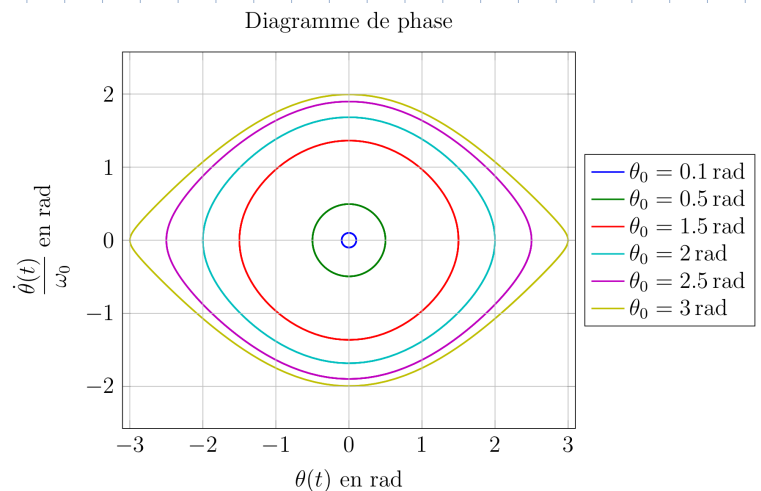
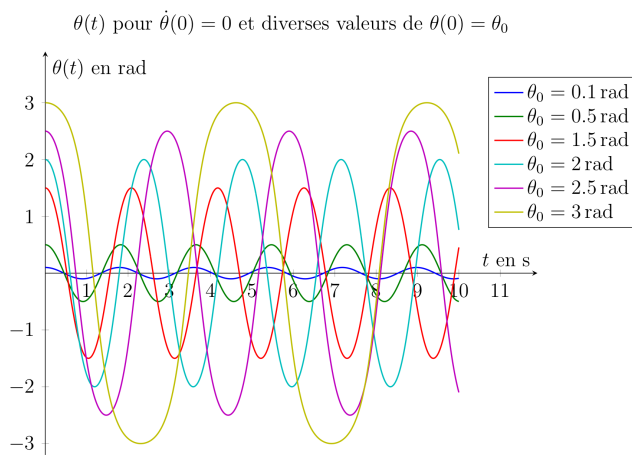
$$\Rightarrow T = m g \cos \theta + m (2 g l (\cos \theta - \cos \theta_0))$$

$$T = 3 m g \cos \theta - 2 m g \cos \theta_0$$

* $T(\theta)$ est maximale quand $\cos \theta = 1$, c-à-d quand $\theta = 0$:

$$T_{max} = T(\theta=0) = m g (3 - 2 \cos \theta_0) = 1,01 \text{ N}$$

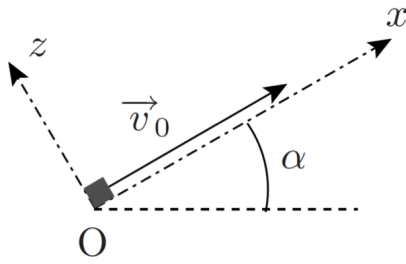
3.5. Commenter l'allure des courbes et du diagramme de phase ci-dessous :



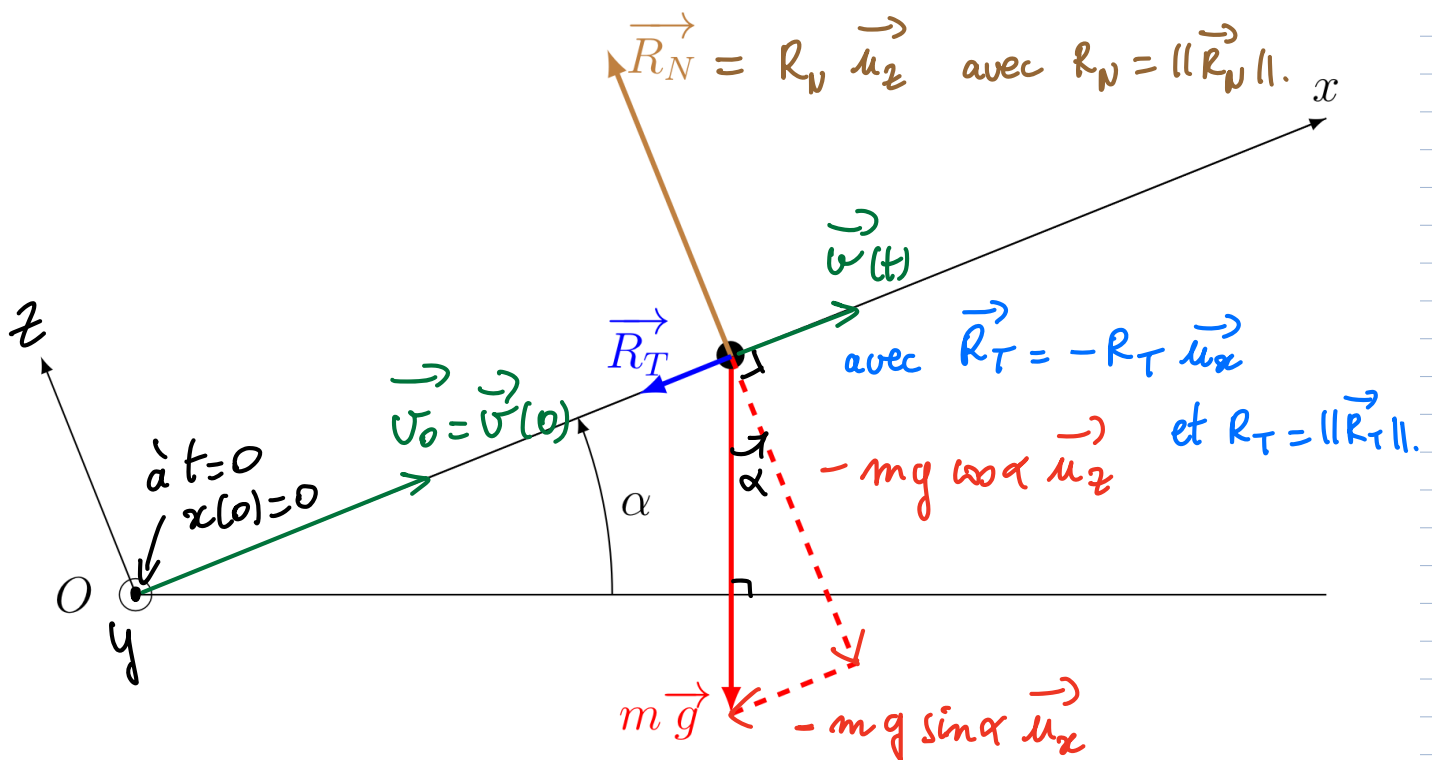
Lorsque l'on est plus dans l'approximation des petits angles, on remarque que le mouvement n'est plus sinusoïdal, comme en témoigne l'aspect du diagramme de phase qui ne ressemble plus à un cercle.

5 Glissement avec frottements solide

Un petit parallélépipède, assimilable à un point matériel M de masse m , est lancé depuis le point origine O d'un plan (Oxy) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ dirigé suivant la ligne de plus grande pente (Ox) et vers le haut. La position du point M à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$. On tient compte des forces de frottement solide avec un coefficient de frottement f , par contre les frottements fluide de l'air peuvent être négligés.



5.1. Montrer qu'au début du mouvement, c'est-à-dire tant qu'il y a glissement vers le haut, l'accélération $\ddot{x}$ du mobile est du type $\ddot{x} = -Kg$. Exprimer K en fonction de α et f .



le PFD donne :
$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -R_T - mg \sin \alpha & (1) \\ m \ddot{z} = R_N - mg \cos \alpha & (2) \end{cases}$ or $\ddot{z} = 0$: pas de movt sur (Oz) .

la loi de Coulomb indique que : $R_T = f R_N$ (3)

Ainsi (2) $\Rightarrow R_N = mg \cos \alpha$
 (3) $\Rightarrow R_T = f mg \cos \alpha$

$$(3) \Rightarrow m \ddot{x} = -fmg \cos \alpha - mg \sin \alpha$$

$$\cancel{m} \ddot{x} = -(\cancel{f} \cancel{m} \cos \alpha + \cancel{m} \sin \alpha) g$$

$$(ED) \ddot{x} = -K g \text{ avec } K = f \cos \alpha + \sin \alpha.$$

5.2. Quelle distance d le mobile parcourt-il avant que sa vitesse ne s'annule?

Nous avons $\ddot{x} = -kg$; Nous l'intégrons entre $t_0 = 0$ et t quelconque:

$$\underbrace{\dot{x}(t) - \dot{x}(0)}_{v_0} = -Kgt$$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -kgx + v_0$; Nous l'intégrons entre $t_0 = 0$ et t quelconque:

$$\Rightarrow \underbrace{x(t) - x(0)}_0 = -Kg \frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

$$x = -\frac{1}{2} \times kg t^2 + v_0 t$$

* On cherche l'instant d'arrêt t_1 tq $\dot{x}(t_1) = 0$:

$$\text{Ainsi } 0 = -kg \times t_1 + v_0$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{kg}$$

* la distance d'arrêt est $d = x(t_1)$ telle que:

$$\text{Ainsi; } d = -\frac{1}{2} \times kg \times \left(\frac{v_0}{kg}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{kg}$$

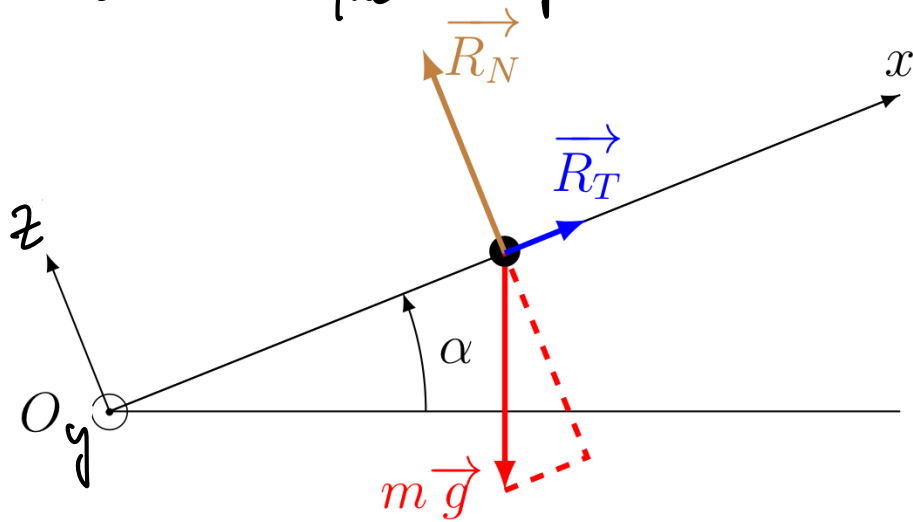
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{v_0^2}{kg} + \frac{v_0^2}{kg}$$

$$= \frac{-v_0^2}{2kg} + \frac{2v_0^2}{2kg}$$

$$d = \frac{v_0^2}{2kg}$$

5.3. À quelle condition sur l'angle α le mobile s'arrête-t-il définitivement ?

schéma lorsque l'objet est immobile :



$$R_N = mg \cos \alpha$$

$$R_T = mg \sin \alpha$$

l'objet reste immobile, c-à-d il n'y a pas de glissement si :

$$R_T < f R_N$$

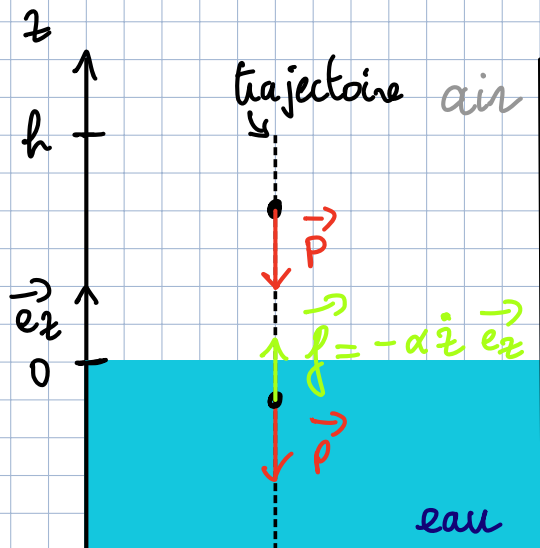
$$mg \sin \alpha < f mg \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha < f \Rightarrow \alpha < \text{Arctan}(f)$$

4 Chute d'un caillou dans un puits

Un garçon jette, sans vitesse initiale, un caillou de masse m dans un puits très profond. La surface de l'eau se trouve à une profondeur h du point de lancé du caillou. Les frottements de l'air sont négligés et l'évolution du caillou dans l'eau se fait en présence d'une force de frottement du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. On donne $m = 200 \text{ g}$, $\alpha = 0,2 \text{ kg.s}^{-1}$ et $h = 8 \text{ m}$. L'axe (Oz) est pris vertical ascendant avec pour origine la surface de l'eau du puits.

4.1. Exprimer la vitesse algébrique du caillou $\bar{v}(t) = \dot{z}(t)$ lors de sa chute dans l'air et déterminer l'instant t_1 et sa vitesse algébrique v_1 lors du contact avec l'eau.



$$\text{CI : } \dot{z}(0) = 0 \text{ et } z(0) = h.$$

le PFD en projection sur (Oz) donne :

$$m \ddot{z} = -mg \Rightarrow \ddot{z}(t) = -g \quad (1)$$

On intègre (1) entre $t=0$ et t qcq :

$$\dot{z}(t) - \underbrace{\dot{z}(0)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(t) = -gt \quad (2)$$

On intègre (2) entre $t=0$ et t qcq :

$$z(t) - \underbrace{z(0)}_{=h} = 0 \Leftrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$\text{On cherche } z(t_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}gt_1^2 + h = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1^2 = \frac{-h}{-\frac{1}{2}g} = \frac{2h}{g}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On en déduit $\bar{v}_1 = \dot{z}(t_1)$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_1 = -gt_1$$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_1 = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} < 0$$

4.2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\bar{v}(t) = \dot{z}(t)$ pour $t > t_1$ et montrer que $\bar{v}(t)$ atteint une vitesse limite $\bar{v}_\ell$ que l'on déterminera, puis résoudre cette équation différentielle pour exprimer $\bar{v}(t)$ en fonction de $\bar{v}_1$, t_1 , $\bar{v}_\ell$ et $\tau = \frac{m}{\alpha}$.

le PFD en projection sur (Oz) donne :

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -mg - \alpha \bar{v} \quad \text{avec } g = \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m.s}^{-2}.$$

$\bar{v} \rightarrow \frac{m}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} = -\frac{mg}{\alpha}$ $\times \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} = \bar{v}_{\text{lim}}$

$\bar{v}_{\text{lim}} = -9,81 \text{ m/s}$

* Solution générale pour $t > t_1$: $\bar{v}(t) = A e^{-t/\tau} + \bar{v}_{\text{lim}}$

* Or $\bar{v}(t_1) = \bar{v}_1 \Rightarrow \bar{v}_1 = A e^{-t_1/\tau} + \bar{v}_{\text{lim}} \Rightarrow A = (\bar{v}_1 - \bar{v}_{\text{lim}}) e^{t_1/\tau}$

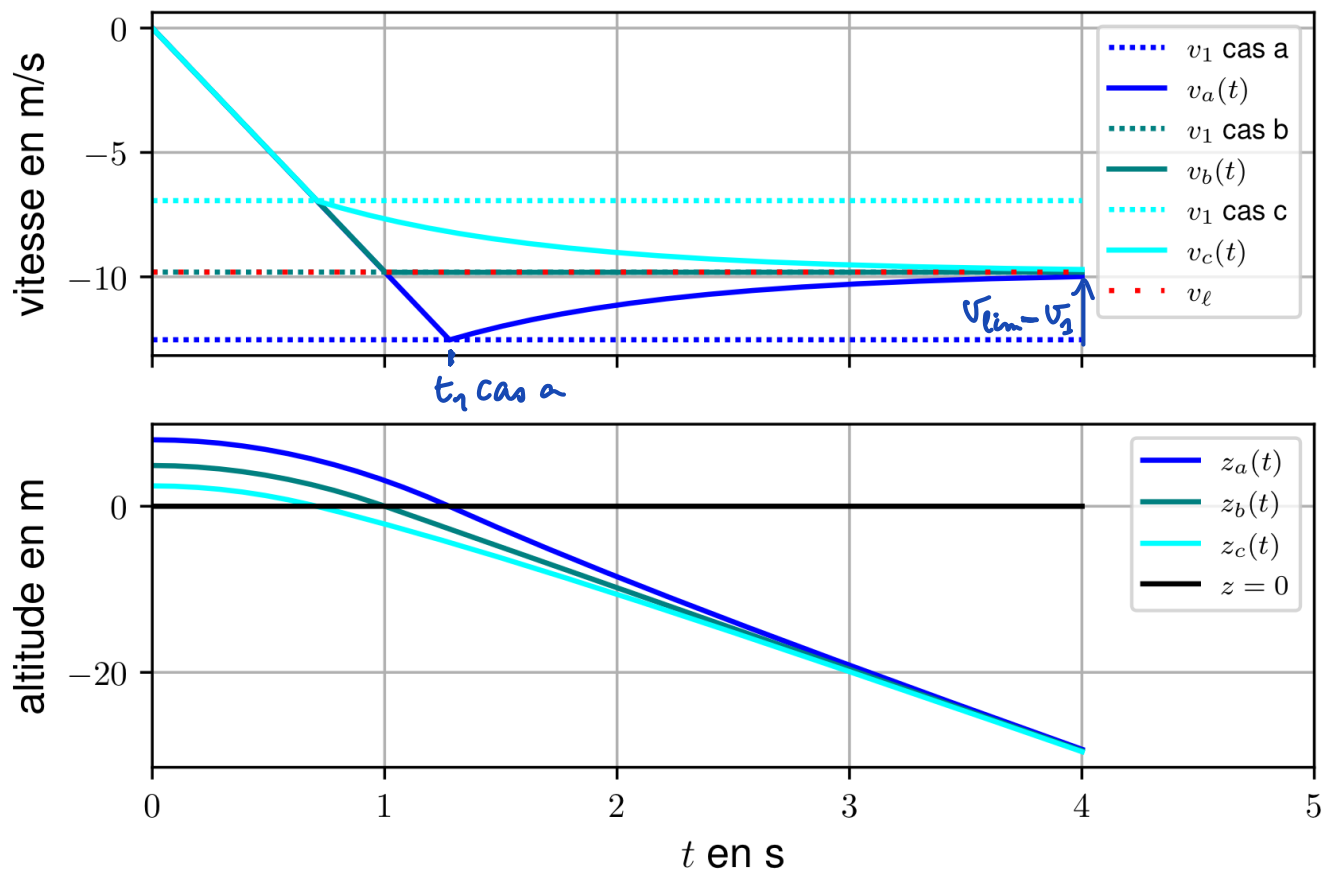
* Au final: $v(t) = (\bar{v}_1 - \bar{v}_{\text{lim}}) e^{-(t-t_1)/\tau} + \bar{v}_{\text{lim}} - \bar{v}_1 + \bar{v}_1$

facteur commun

$$v(t) = \bar{v}_1 + (\bar{v}_{\text{lim}} - \bar{v}_1) \left[1 - e^{-(t-t_1)/\tau} \right]$$

manche

4.3. Tracer le graphe de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps (cas a).



4.4. Quelle devrait être la hauteur h_ℓ du lâché pour que dans l'eau, le caillou évolue avec un mouvement rectiligne uniforme. Tracer le graphe de $v(t)$ correspondant (cas b).

le caillou évolue avec un mt rectiligne uniforme dans l'eau si:

$v_1 = v_{\text{lim}}$ pour lâché d'une hauteur $h = h_\ell$

$$\Rightarrow -\sqrt{2gh_\ell} = -\frac{mg}{\alpha}$$

$$\Rightarrow h_\ell = \frac{0,2^2 \times 9,81}{2 \times 0,2^2}$$



$$\Rightarrow 2gh_\ell = \left(\frac{mg}{\alpha}\right)^2$$

$$= 4,9 \text{ mètres}$$

$$\Rightarrow h_\ell = \frac{\frac{m^2 g^2}{\alpha^2} \times 2g}{2 \times 2g}$$

$$\Rightarrow h_\ell = \frac{m^2 g}{2\alpha^2}$$

4.5. Tracer l'allure de $v(t)$ dans le cas où $h < h_\ell$ (cas c).

(voir ci-dessus).

4.6. Trouver l'expression de $z(t)$ pour $t > t_1$.

$$v(t) = (v_1 - v_{\text{lim}}) e^{-(t-t_1)/\tau} + v_{\text{lim}}$$

On intègre cette équation entre $t = t_1$ et $t > t_1$ quelconque :

$$\int_{t_1}^t v(t') dt' = \int_{t_1}^t (v_1 - v_{\text{lim}}) e^{-(t'-t_1)/\tau} + v_{\text{lim}} dt'$$

$$z(t) - \underbrace{z(t_1)}_0 = \left[-\tau (v_1 - v_{\text{lim}}) e^{-(t'-t_1)/\tau} + v_{\text{lim}} t' \right]_{t_1}^t$$

$$z(t) = -\tau (v_1 - v_{\text{lim}}) e^{-(t-t_1)/\tau} + v_{\text{lim}} t + \tau (v_1 - v_{\text{lim}}) - v_{\text{lim}} t_1$$

$$\text{Or } \tau v_1 - v_{\text{lim}} t_1 = -\frac{m}{\alpha} \times \sqrt{2gh} + \frac{mg}{\alpha} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0$$

$$\text{et } -\tau v_{\text{lim}} = -\frac{m}{\alpha} \times \left(-\frac{mg}{\alpha}\right) = \frac{m^2 g}{\alpha^2}$$

$$\text{d'où } z(t) = -\tau (v_1 - v_{\text{lim}}) e^{-(t-t_1)/\tau} + v_{\text{lim}} t - \tau v_{\text{lim}}$$

Ce résultat numérique confirme l'observation des 3 courbes, en effet on remarque que pour un temps long les trois courbes se rejoignent:

$$z(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} v_{\text{lim}} t - \tau v_{\text{lim}}.$$

