

Ondes électromagnétiques dans le vide



The origin of Electromagnetic waves, and why they behave as they do

I – Les équations de propagations du champ EM dans le vide :

Obtention des équations de propagation du champ EM :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad ; \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$$

Dans une région sans charges ni courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

fréquence de l'onde en Hz	longueur d'onde dans le vide	énergie du photon en eV	Domaine d'application
50	6000 km	$2 \cdot 10^{-13}$	Distribution EDF
$50 \text{ à } 10^5$	6000 km à 3 km	$2 \cdot 10^{-13} \text{ à } 4 \cdot 10^{-10}$	Fréquences industrielles Téléphonie
$10^5 \text{ à } 4 \cdot 10^5$	3 km à 800 m	$4 \cdot 10^{-10} \text{ à } 2 \cdot 10^{-9}$	Grandes ondes (LF)
$10^6 \text{ à } 3 \cdot 10^6$	300 m à 100 m	$4 \cdot 10^{-9} \text{ à } 10^{-8}$	Ondes moyennes (MF)
$10^7 \text{ à } 3 \cdot 10^7$	30 m à 10 m	$4 \cdot 10^{-8} \text{ à } 10^{-7}$	Ondes courtes (HF)
$3 \cdot 10^7 \text{ à } 10^8$	10 m à 3 m	$10^{-7} \text{ à } 4 \cdot 10^{-7}$	Modulation de fréquence
$10^8 \text{ à } 3 \cdot 10^{10}$	3 m à 1 cm	$4 \cdot 10^{-7} \text{ à } 10^{-4}$	Télévision et Radar
$3 \cdot 10^{10} \text{ à } 8 \cdot 10^{11}$	1 cm à 0,4 mm	$10^{-4} \text{ à } 3 \cdot 10^{-3}$	Micro-ondes
$8 \cdot 10^{11} \text{ à } 4 \cdot 10^{14}$	400 μm à 0,8 μm	$3 \cdot 10^{-3} \text{ à } 1,6$	Infrarouge
$4 \cdot 10^{14} \text{ à } 8 \cdot 10^{14}$	0,8 μm à 0,4 μm	1,6 à 3,1	Lumière visible
$8 \cdot 10^{14} \text{ à } 3 \cdot 10^{16}$	0,4 μm à 10 nm	3,1 à 120	Ultraviolet
$3 \cdot 10^{16} \text{ à } 3 \cdot 10^{18}$	10 nm à 0,1 nm	120 à 10^4	Rayons X mous
$3 \cdot 10^{18} \text{ à } 3 \cdot 10^{20}$	0,1 nm à 1 pm	$10^4 \text{ à } 10^6$	Rayons X durs
10^{21}	0,3 pm	$4 \cdot 10^6$	Rayons γ
10^{22}	0,03 pm	$4 \cdot 10^7$	Rayons cosmiques

Ces équations sont les équations de propagation du champ EM.

Si l'on note $s(t)$ l'une des six coordonnées des champ EM ($E_x, \dots, B_x, \dots$), alors :

$$\Delta s - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \right)$$

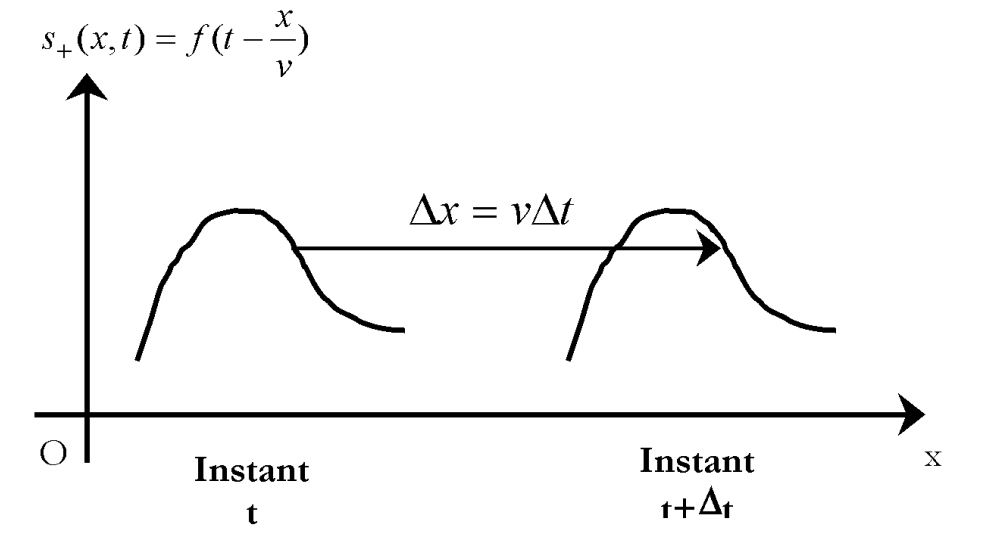
C'est l'équation de d'Alembert (équation classique de propagation des ondes, encore appelée équation des cordes vibrantes) établie au XVIII^{ème} siècle pour modéliser les vibrations d'une corde tendue.

Les solutions de cette équation traduisent un phénomène de propagation de célérité c .

Ondes progressives : ([Animation JJ. Rousseau](#))

Interprétation physique : on considère une fonction de la forme :

$$s_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$



Une fonction de la forme $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ est appelée onde plane progressive.

La solution :

$$s_-(x, t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif.

Remarque :

Des ondes sphériques sont également solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle : on cherche, par exemple, des solutions à symétrie sphérique $s(r, t)$.

Soit :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

II – Ondes planes progressives monochromatiques (ou harmoniques) :

1 – Ondes planes électromagnétiques :

Une onde plane EM de direction de propagation $\vec{u}_z$ est une structure du champ EM dans laquelle les coordonnées des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions de la forme :

$$s(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

Toute coordonnée du champ a, à un instant donné, même valeur en tout point d'un plan $z = \text{cste}$.

Un tel plan, orthogonal à la direction de propagation $\vec{u}_z$, est appelé plan d'onde.

2 – Solutions sinusoïdales de l'équation d'ondes de d'Alembert :

On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert.

En notation réelle, le champ électrique pourra s'écrire :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

Avec :

$$\vec{k} = k\vec{u}_z = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z \quad (\text{vecteur d'onde})$$

En notation complexe, on notera le champ EM sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(z,t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

Si la direction de l'onde est quelconque, dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(x, y, z, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où :

$$\vec{k} = k \vec{u}$$

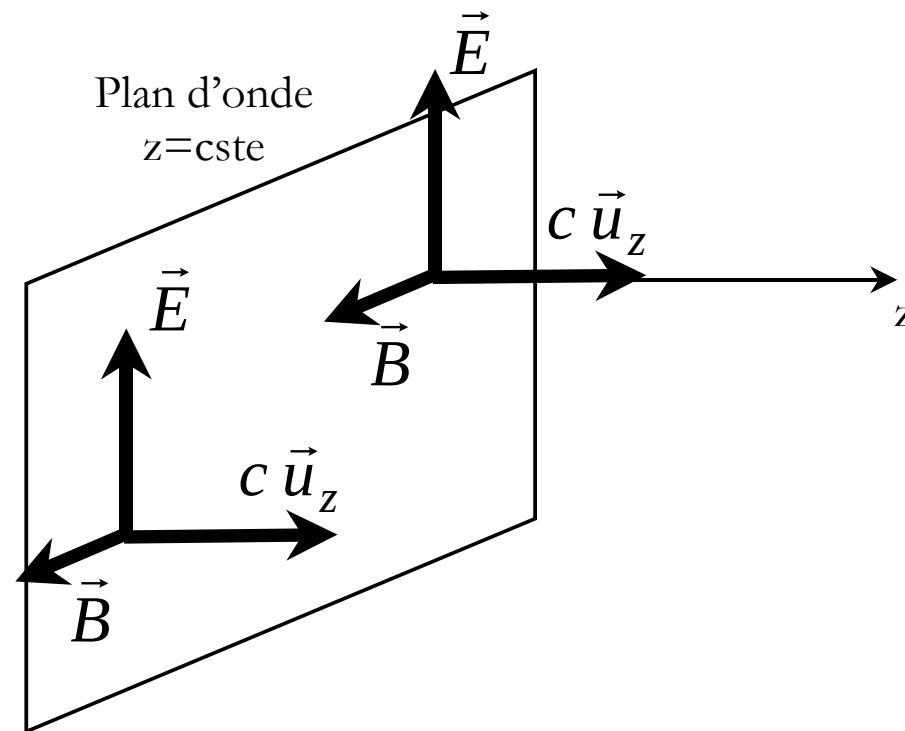
($\vec{u}$ vecteur unitaire donnant le sens de propagation) est le vecteur d'onde et :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad (\text{O, origine du repère et M le point d'observation})$$

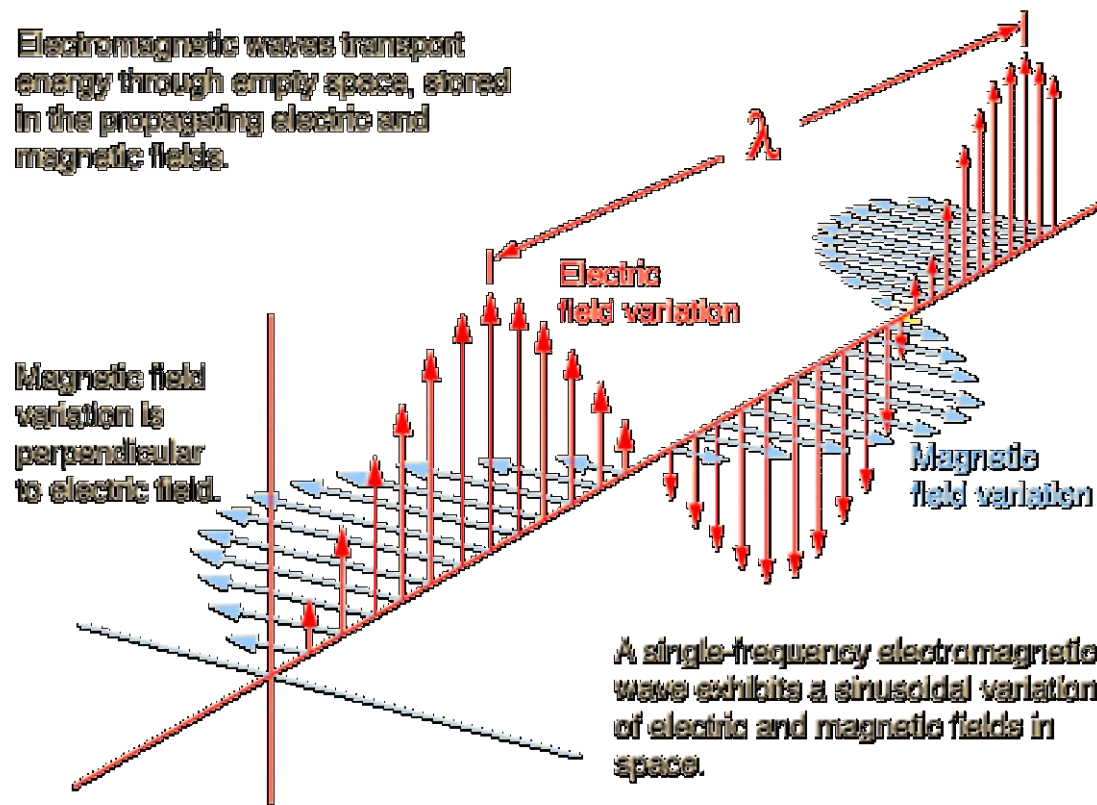
3 – Structure des ondes planes progressives monochromatiques :

$$\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}_z \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge c \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$



Electromagnetic waves transport energy through empty space, stored in the propagating electric and magnetic fields.



$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

4 – Propagation de l'énergie :

La densité d'énergie u_{em} pour une onde plane progressive vaut :

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

Vecteur de Poynting :

Vecteur de Poynting moyen et puissance moyenne reçue par un détecteur :

Ordres de grandeur :

- Amplitudes des champs EM d'un faisceau laser :

Un laser hélium-néon émet un faisceau cylindrique de section droite 1 mm^2 et de puissance 1 mW . Il produit une onde polarisée rectilignement. Déterminer l'amplitude des champs EM.

L'onde est quasi-plane sinusoïdale car la largeur du faisceau est bien supérieure à la longueur d'onde. Les champs EM valent :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{S}} = 8,7.10^2 \text{ V.m}^{-1} \quad ; \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 2,9.10^{-6} \text{ T}$$

III – Polarisation des ondes EM : ([Vidéos de la « Physique animée »](#))

[Animation sur la polarisation de la lumière](#)

Dans le cas général (cas d'une propagation selon Oz dans le sens positif :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

Et :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

Intérêt : direction du champ électrique de l'onde

- Polarisation rectiligne :

La polarisation rectiligne correspond au cas où le champ électrique garde une direction constante au cours du temps, que l'on peut choisir parallèle à l'axe (Ox) :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

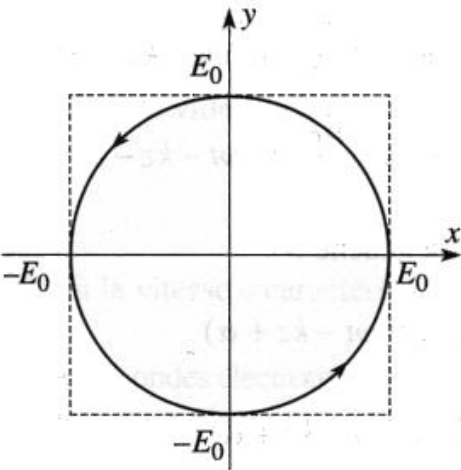
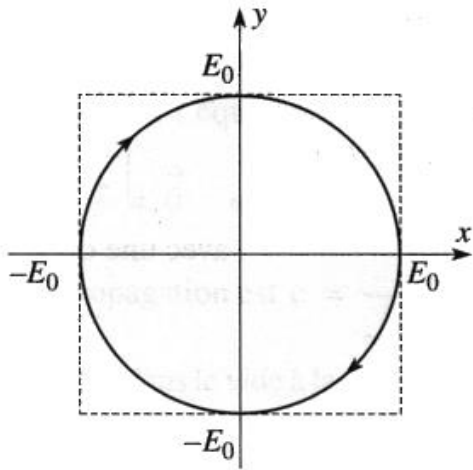
C'est le cas particulier où $\varphi = 0$:

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{E} = (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

- Polarisation circulaire :

polarisations circulaires	
circulaire gauche $\varphi = \frac{\pi}{2}$	circulaire droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
	
notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t) \end{cases}$	notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t) \\ E_y = -E_0 \sin(\omega t) \end{cases}$
notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0 e^{j\omega t} \end{cases}$	notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0 e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0 e^{j\omega t} \end{cases}$

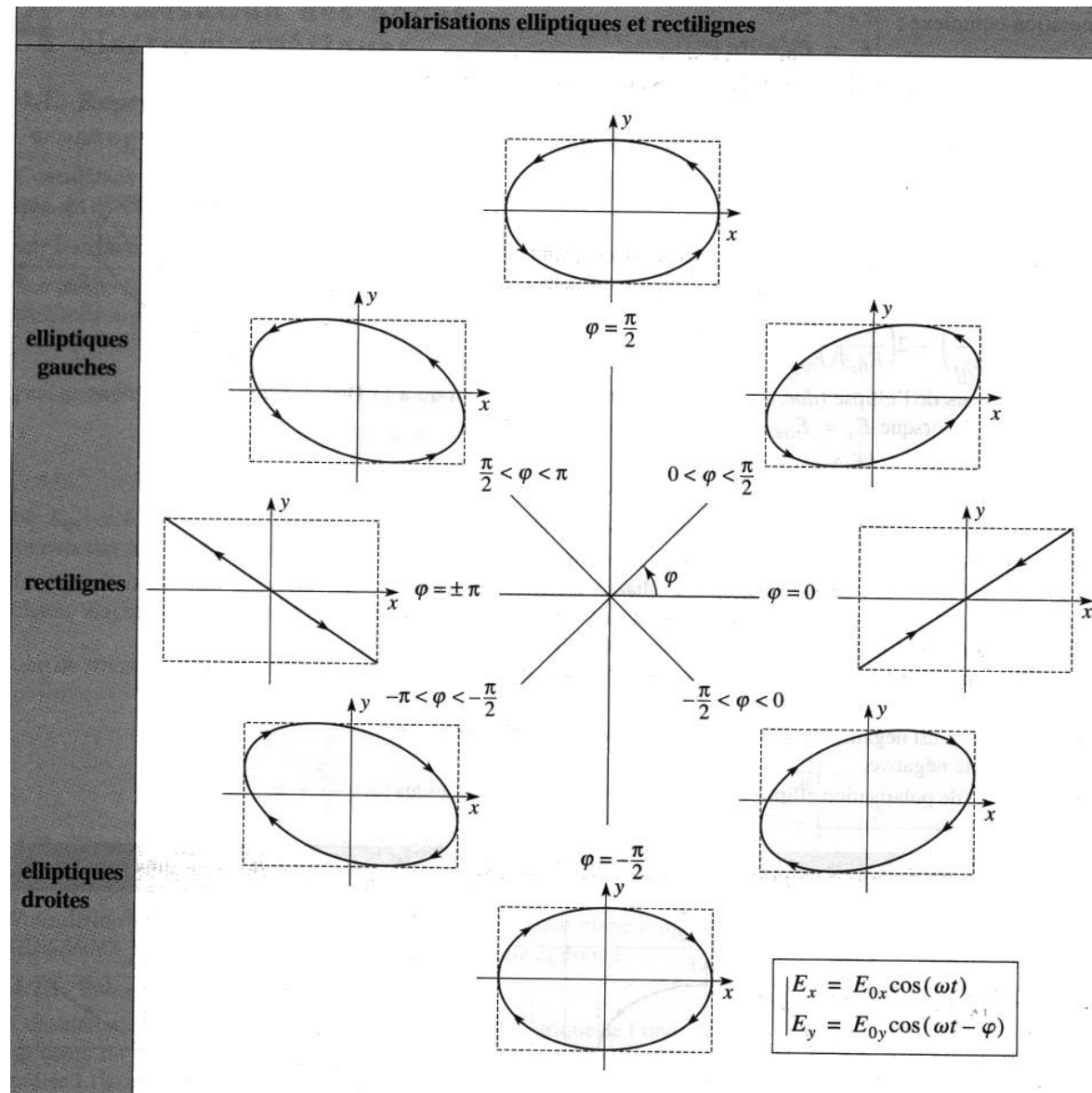
Application : décomposition d'une onde à polarisation rectiligne comme la superposition de deux ondes circulaires :

Le champ électrique d'une onde se propageant dans la direction (Oz) est donné par :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{cases} .$$

- 1) *Quelle est la polarisation de cette onde ? Faire un schéma.*
- 2) *Décomposer cette onde en deux ondes à polarisations circulaires de sens opposés.*

- Polarisation elliptique :



$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$