

Calculs de valeurs propres de matrices, vecteurs propres

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] – *Cours – Raisonner* – Soit f un endo-morphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$.

- Déterminer $\text{rg } f$ à vue.
- En déduire une première valeur propre de f et déterminer la dimension de l'espace propre associé.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
 - Vérifier que $f(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.
 - En déduire une deuxième valeur propre $\mu \neq 0$.
- En déduire que f est diagonalisable.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Déterminer les éléments propres (vap et vep) des matrices M suivantes.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot sur la matrice.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ en cherchant des opérations pour simplifier la matrice

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant un système pour recherche les vap

- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

en faisant d'abord un maximum d'opérations sur les lignes.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

avec la méthode de votre choix

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] – *Cours* – Dire, dans chacun des cas de l'exercice précédent, si les matrices sont

- diagonalisables (dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?)
- inversibles ?

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Déterminer les puissances $n^{\text{ème}}$ des matrices, avec $n \in \mathbb{N}$.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Les formules se généralisent-elles à $n \in \mathbb{Z}$?**EXERCICE 5:** [Indications] [Correction] – *Calculer* – Pour s'entraîner au calcul : Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables et si oui, en donner les éléments propres.

- $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

- $M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$
(uniquement vap)

- $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

- pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$, $M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] – *Raisonner – Chercher* – Soit A une matrice réelle.

- Montrer que si $A^2 + I_n = 0$, alors les seules valeurs propres possibles pour A sont i et $-i$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Valeurs propres d'endomorphismes

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - *Raisonner* -

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M et déterminer sa valeur propre associée.
- Montrer à vue que 0 est valeur propre de M et déterminer la dimension de son espace propre E_0 .
- Montrer que M est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est à déterminer.

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] - *cours*

Soit $u : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$, $f \mapsto f''$.

- Montrer que toute valeur réelle α est une valeur propre de u et déterminer son espace propre E_α associé (On prendra soin de distinguer les cas $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.)
- Montrer que E_α si celui-ci est de dimension finie et déterminer sa dimension.
- u est-elle injective?

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] - *Calculer - Raisonner - Cours* -

On se donne $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme de matrice M suivante dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = X^2 - X$, $P_2 = X^2 - X - 1$, $P_3 = X^2 - 2X - 2$.

- Montrer que P_1 est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre.
- Exprimer $f(P_3)$ en fonction de P_2, P_3 .
- Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
- En déduire l'ensemble des valeurs propres de f et dire si elle est diagonalisable.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] - *Calculer - Mobiliser - Raisonner* -

- Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
- M est-elle diagonalisable? (Sans calcul!)
- Montrer que M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Déterminer M^n .

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] - *Calculer - Raisonner - Cours* - On

pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M .
- La matrice est-elle diagonalisable?
- Montrer que M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star \\ 0 & -1 & \star \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
- Déterminer les 2 valeurs possibles de α .

Applications

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] - *Calculer - Mobiliser* -

Soient $(p_n), (q_n), (r_n)$ trois suites telles que
$$\begin{cases} p_{n+1} = 2q_n - r_n \\ q_{n+1} = 3p_n - 2q_n \\ r_{n+1} = -2p_n + 2q_n + r_n \end{cases}$$

- Pour tout n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire le terme général de ces trois suites en fonction de p_0, q_0, r_0 et de n .

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] - *Calculer - Chercher - Mobiliser* -

☆

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable?
- Calculer A^n , pour tout n entier naturel.
- Montrer que l'inverse A^{-1} de A existe, et calculer A^{-n} , pour tout n entier naturel.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X = n)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_{n+2} = -p_{n+1} + \frac{3}{4}p_n$. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n , et reconnaître la loi suivie par $X + 1$.

5. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 3.e^{-3x/2} + e^{x/2}, \quad g(x) = -2.e^{-3x/2} + 2.e^{x/2}$$

- Exprimer les dérivées f' et g' en fonction de f et g .
- Soient $u : x \mapsto e^{-3x/2}$, $v : x \mapsto e^{x/2}$ et $E = \text{Vect}(u, v)$. Justifier que (f, g) est une base de E et que $f', g' \in E$.
En déduire que l'application $L : E \rightarrow E$; $w \mapsto w'$ est linéaire et bien définie.
- Comment déterminer une fonction F , combinaison linéaire de f et g , telle que la dérivée 2002^{ème} de F soit f ? ☆

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Calculer – Modéliser –

Une puce se déplace totalement au hasard sur les sommets $ABCD$ d'un carré de coté 1, de manière à ne faire que des sauts de longueur exactement 1. Déterminer la probabilité pour la puce d'être sur D après le $n^{\text{ème}}$ saut, sachant qu'elle démarre du point A

- Par le calcul
- Intuitivement.

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Chercher – ☆

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X+1)P(X+1) - (X-1)P(X-1).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f .
- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = 2; \quad \forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{6}((n+1)u_{n+1} - (n-1)u_{n-1})$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E$ vérifiant : $\forall n \geq 1, u_n = P(n)$.

Un peu de théorie

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Chercher – Raisonner – Montrer que si M est une matrice de rang 1, alors il existe $\alpha \neq 0$ tel que M soit semblable à

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – Chercher – Cours – Quelques questions de compréhension

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

- Montrer que $0 \notin \text{sp}(u) \Leftrightarrow u$ surjectif.
- Si u est un automorphisme, établir $\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} / \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

- Si λ est une valeur propre de u , peut-on déterminer une valeur propre de $u \circ \dots \circ u = u^n$?
- Si λ est une valeur propre de u et μ une valeur propre de $v \in \mathcal{L}(E)$, peut-on dire que $\mu\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$? (On pourra considérer le cas où u, v diagonalisable avec des espaces propres de dimension 1.)

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – Chercher – ☆

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \text{sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \text{sp}(f)$.

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – Chercher –

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

- Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g .
- Que peut-on dire si cette espace propre est une droite ?
- Montrer que si f admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, alors g est diagonalisable dans une même base que celle qui diagonalise f . (On dit que f et g sont *codiagonalisables*).

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] – Chercher – Raisonner – ☆

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Expliquer sans calcul, pourquoi A est diagonalisable ?
- Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. ☆
- Trouver **toutes** les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. ☆☆

Indications

Exercice 10 [Correction]

- On pourra raisonner par l'absurde sur la matrice diagonale D semblable à M et sur la signification de "être semblable à D ".
- On pourra poser f une application linéaire associée à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et observe que T serait alors la matrice de f dans une autre base $B' = (g_1, g_2, g_3)$.
Se demander exprimer $f(g_1), f(g_2), f(g_3)$ en fonction de g_1, g_2, g_3 grâce à la matrice T . On pourra alors les chercher un par un en résolvant un système adéquat.

Exercice 11 [Correction]

- 2 matrices sont semblables si ce sont les matrices d'un même endomorphisme f dans 2 bases différentes.
On pourra donc se demander ce que signifie "être de matrice du type triangulaire demandé" dans une autre base (v_1, v_2, v_3) . (Trouver le lien avec les questions précédentes.)

4. On pourra se demander quel est le lien avec les valeurs propres.

Exercice 15 [Correction]

2. On peut éventuellement :
- étudier la matrice de f dans une base donnée,
 - ou alors faire une étude directe $f(P) = \alpha P$ (mais ce n'est clairement pas le plus simple ici!!!)
3. En cas d'existence de ce polynôme, observer qu'on a nécessairement $f(P)(n) = 6P(n)$. On pourra alors tenter de prendre un candidat dans les polynômes trouvés dans les questions précédentes puis justifier (par récurrence éventuellement) que le P choisi est adéquat.

Exercice 16 [Correction]

Déterminer le lien avec les valeurs propres ainsi que la dimension des espaces propres.

Exercice 17 [Correction]

1. Voir dans un premier temps le lien avec l'injectivité ou le noyau
2. Transformer par exemple l'écriture $Av = \lambda v$ grâce à A^{-1} .
3. Se ramener à la définition initiale du vecteur propre et de la valeur propre.

Exercice 18 [Correction]

L'hypothèse dit que $\ker f^n \neq \{0\}$ et on veut montrer que $\ker f \neq \{0\}$.

Exercice 20 [Correction]

2. On pourra diagonaliser A (on appelle D la matrice diagonale obtenue) et essayer de trouver B en fonction de la matrice de passage des vecteurs propres et d'une matrice trouvée grâce à D .

Exercice 1

1. Clairement, toutes les lignes étant colinéaires, on a $\text{rg } f = 1$.
2. $\text{rg } f \neq 3$, ainsi, $\ker f \neq \{\vec{0}\}$. 0 est donc vap.
3. c) $\dim \mathfrak{Im} f = 1$, par exemple $\mathfrak{Im} f = \text{Vect}(v)$, où on note $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors, par stabilité de $\mathfrak{Im} f$, $f(v)$ et v sont proportionnels, avec

$$f(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -v$$

-1 est une autre valeur propre.

4. $\dim E_0 + \dim E_{-1} = 3$.

Exercice 2

1. $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{7}-1 & -\sqrt{7}-1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}$
2. Manipulations possibles :
 $L_1 + L_2 + L_3$ ou $C_1 - C_3$.
 $Sp(f) = \{2; 3\}$ $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$
3. $Sp(f) = \{1; 2; -4\}$
 $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$, $E_{-4} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
4. $Sp(f) = \{1, 2\}$
 $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$, $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

5. Voici une possibilité de recherche de valeurs propres, en mélangeant opérations sur les lignes et colonnes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_4 \leftarrow \widetilde{L}_4 + L_2} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_2 \leftarrow \widetilde{C}_4 - C_2} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_2 \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow \widetilde{C}_2, C_3 \rightarrow C_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_4 \leftarrow \widetilde{C}_4 + \lambda C_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda & -1-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{rg}(M - \lambda Id) < 4$ ssi $\lambda = 0$, ou $\lambda = 1$, ou $\lambda^2 + 1 = 0$, d'où

$$Sp(M) = \{0, 1, i, -i\}$$

La recherche des vecteurs propres se fait donc à partir de la deuxième matrice au plus "tard". De plus, rappelons qu'ici, E_{-i} est l'espace conjugué de E_i . Il n'est donc pas nécessaire de faire deux fois les calculs. On trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$: Rappelons que M est diagonalisable ;

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{7}-1 & -\sqrt{7}-1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \sqrt{7}+1 & 2 \\ \sqrt{7}-1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{\sqrt{7}^{n-1}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{7}(1+(-1)^n) + 1 - (-1)^n & 2(1-(-1)^n) \\ 3(1-(-1)^n) & \sqrt{7}(1+(-1)^n) - 1 + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Plus simplement :

$$\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ pair :} & M^n = \sqrt{7}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{si } n \text{ impair :} & M^n = \sqrt{7}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: On rappelle que M est diagonalisable. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}+(-4)^n}{3} & \frac{-2*(-4)^n+2}{5} & -\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \\ 2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{2} & \frac{3}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} & -2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{10} + \frac{3}{5} \\ -\frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{3} & -\frac{2}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} & \frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Valeurs propres

La matrice étant triangulaire, on constate aisément que $Sp(M) = \{1, 2\}$ (coefficients sur la diagonale.)

- Vecteurs propres

On constate également à vue que e_1, e_2 sont des vecteurs propres de valeur propre 1, donc $\dim E_1 + \dim E_2 \geq 3$ et M est diagonalisable, de matrice semblable

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et de plus $\dim E_1 = 2$ car ne peut pas être plus grand que $3 - \dim E_2 = 2$. Par calcul des vecteurs propres de 2, on obtient finalement

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$: On rappelle qu'encore une fois, M est diagona-

lisable, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1+i \\ 1 & -1 & -1 & -1-i \end{pmatrix}$

D'où pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^n + (-i)^n & -i^n - (-i)^n & -i^n - (-i)^n + 2 & (-1+i)i^n + (-1-i)(-i)^n \\ i^n i - (-i)^n i & -i^n i + (-i)^n i & -i^n i + (-i)^n i & (-1-i)i^n + (-1+i)(-i)^n \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -i^n i + (-i)^n i & i^n i - (-i)^n i & i^n i - (-i)^n i & (1+i)i^n + (1-i)(-i)^n \end{pmatrix}$$

$$M^n = \begin{pmatrix} \Re(i^n) & -\Re(i^n) & -\Re(i^n) + 1 & \Re((-1+i)i^n) \\ -\Im(i^n) & \Im(i^n) & \Im(i^n) & \Re((-1-i)i^n) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Im(i^n) & -\Im(i^n) & -\Im(i^n) & \Re((1+i)i^n) \end{pmatrix}$$

En bref,

Si n pair	$M^n = (-1)^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 + (-1)^{n/2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (-1)^{n/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Si n impair	$M^n = (-1)^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^{(n-1)/2} & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (-1)^{(n-1)/2} & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

1. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. La matrice est de rang 1, alors elle est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, où α

est tel que $f(v) = \alpha v$ pour $v \in \text{Im} A$, autrement dit, comme $v = (1, \dots, 1) \in \text{Im}(M)$, on a $f(v) = nv$.

Conclusion : M est diagonalisable.

3. seule vap : 1

4. (On constate que $\text{rg } M = 2$, une vap est donc 0, avec $\dim E_0 = n - 2$.)
Sinon, pour les éléments propres, on peut résoudre directement le système

$$S : \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, on trouve $x_n = 0$ et $x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$

Si $\lambda \neq 0$, on trouve

$$S : \begin{cases} x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{\lambda} x_n \\ (\lambda^2 - \lambda - (n-1))x_n = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $\lambda^2 - \lambda - (n-1)$ a comme discriminant $\Delta = 4n - 3 > 0$. Il y a donc deux racines distinctes, M diagonalisable

5. • Si $\alpha = 0[\pi]$, la matrice est diagonale.

• Sinon, $M = \begin{pmatrix} c - \lambda & -s \\ s & c - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 + 2\lambda c + \lambda^2 \\ s & c \end{pmatrix}$

Le discriminant de $-1 + 2\lambda c + \lambda^2$ est $\Delta = 4(c^2 - 1) < 0$.

Le polynôme n'a donc pas de racine réelle $\Rightarrow M$ non diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Toutefois, il a deux racines complexes distinctes, $\Rightarrow M$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

6. Vap $0, \pm \sqrt{-(ab + bc + ca)}$. (On pourra sommer les lignes de $M - \lambda Id$.)

7. Vap : $2, 2a$,

• Si $a \neq 1$, $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $E_{2a} = \text{Vect}((0, 1, 1))$

• Si $a = 1$, $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$

Méthode :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+1-\lambda & 1-a & a-1 \\ -1 & 3-\lambda & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$L_1 + L_2 - L_3 \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -1 & 3-\lambda & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$C_3 + C_1; C_2 - C_1 \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 2a-4 \\ a-2 & 4-2a & 4a-4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$L_2 - L_3 \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2a-\lambda & -2a+\lambda \\ a-2 & 4-2a & 4a-4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$C_3 + C_2 \sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2a-\lambda & 0 \\ a-2 & 4-2a & 2a-\lambda \end{pmatrix}$$

8. Vap : $a + (n-1)b, a - b$. (On peut sommer les lignes de la matrice $M - \lambda Id$ pour commencer.)
Vecteurs propres :
- $E_{a-b} : M - (a-b)Id = (1)$ D'où $x_1 + \dots x_n = 0$.
 - $E_{a+(n-1)b} = \text{Vect}((1, 1, \dots, 1))$: (on peut déterminer ceci en utilisant $\dim E_{a+(n-1)b} = 1$ et en voyant que $(1, 1, \dots, 1)$ est vecteur propre.

Exercice 6

1. Si λ est vp il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tq $AX = \lambda X$ puis $A^2X = \lambda^2X$ donc $\lambda^2 + 1 = 0$...
2. $A^2 = -I_4$. Les valeurs propres sont donc i et $-i$. La matrice n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En revanche, sur $\mathbb{C}$, il faut détailler plus. On observe que

$$A - i.I_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

On constate que

$$C_4 = iC_1, \quad C_2 = iC_3$$

Ainsi,

$$\text{rg}(A - i.I_4) = 2$$

et la dimension de l'espace propre de vap i est 2.

Comme A est réelle, il en va de même pour $-i$. En conclusion,

$$\dim E_i + \dim E_{-i} = 4$$

et la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour information (et bien qu'on n'en ait pas besoin ici :) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

Exercice 7

1. La calcul $MV = 3V$ nous indique que M est vecteur propre de valeur propre 3.

2. • 0 est vap :

L_1 et L_2 sont proportionnelles. Ainsi

$$\text{rg } M < 3$$

M n'est donc pas inversible et 0 est vap.

- $\dim E_0$:

On sait que $E_0 = \ker M$. Par théorème du rang

$$\dim E_0 = 3 - \text{rg}(M)$$

Or, la première partie nous dit

$$\text{rg}(M) \leq 2$$

de plus, L_3 non proportionnel à L_2 , dont

$$\text{rg}(M) \geq 2$$

En conclusion, $\text{rg}(M) = 2$ et donc

$$\boxed{\dim E_0 = 1}$$

3. Une rapide analyse de la situation nous amène à penser que 2 est la dernière valeur propre de M . Nous allons donc montrer ceci.

- Montrons que 2 est valeur propre de M :

Il suffit de voir que $M - 2Id$ est de rang < 3 .

- Conclusion :

On dispose de 3 vap distinctes 0, 2, 3 pour M de taille 3. La matrice est donc diagonalisable.

Exercice 8

1. f est une valeur propre de u si et seulement si il existe $f \neq 0$ telle que

$$u(f) = \alpha f \quad \Leftrightarrow \quad f'' = \alpha f \quad \Leftrightarrow \quad f'' - \alpha f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - \alpha r = 0$$

- Si $\alpha > 0$:

il y a 2 racines $r_1 = -\sqrt{\alpha}$, $r_2 = \sqrt{\alpha}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions f telles que

$$f(x) = ae^{-\sqrt{\alpha}x} + be^{\sqrt{\alpha}x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien un espace propre de valeur propre α avec

$$E_\alpha = Vect(x \mapsto e^{-\sqrt{\alpha}x}, x \mapsto e^{\sqrt{\alpha}x})$$

- Si $\alpha = 0$:

il y a 1 racine double $r = 0$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions f telles que

$$f(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien un espace propre de valeur propre α avec

$$E_\alpha = Vect(x \mapsto 1, x \mapsto x)$$

- Si $\alpha < 0$:

il y a 2 racines $r_1 = -i\sqrt{\alpha}$, $r_2 = i\sqrt{\alpha}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions f telles que

$$f(x) = a \cos \sqrt{\alpha}x + b \sin \sqrt{\alpha}x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On a donc bien un espace propre de valeur propre α avec

$$E_\alpha = Vect(x \mapsto \cos \sqrt{\alpha}x, x \mapsto \sin \sqrt{\alpha}x)$$

2. Dans tous les cas, on dispose d'une famille génératrice de 2 fonctions non nulles et non colinéaires, donc libres. On a donc

$$\dim E_\alpha = 2$$

3. 0 est valeur propre de u , elle n'est donc pas injective.

Exercice 9

1. On sait que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(P_1)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_1)$$

D'où

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$f(P_1) = 2P_1$$

et ainsi,

$$\boxed{P_1 \text{ est vecteur propre de valeur propre } 2 \text{ de } f.}$$

2. On calcul de même :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(X^2 - 2X - 2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$f(P_3) = -P_2 + P_3$$

3. On calcul de même :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(P_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$f(P_2) = 1P_2$$

On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4. La matrice dans $\mathcal{B}'$ étant triangulaire, on en déduit

$$\boxed{Sp(f) = \{1, 2\}}$$

Le calcul de rang nous permet de dire que

$$\dim E_1 + \dim E_2 = 1 + 1 = 2 \neq 3$$

f n'est pas diagonalisable.

Exercice 10

1. $\boxed{Sp(M) = \{1\}}$

2. Si M était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice identité (car que des 1 sur la diagonale.) Or, dans ce cas, il existerait P tel que

$$M = P \cdot Id \cdot P^{-1} = Id$$

Mais M n'est pas la matrice identité, il y a donc contradiction et

M n'est pas diagonalisable.

3. D'après les coefficients dans la matrice T , M semblable à T signifie ici qu'il existe une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$MV_1 = V_1, \quad MV_2 = 5V_1 + V_2, \quad MV_3 = -3V_1 - 2V_2 + V_3$$

V_1 est donc par définition un vecteur propre de valeur propre 1, que l'on peut trouver avec les méthodes habituelles de résolution de système. On constate

que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une possibilité.

Ensuite, posons $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résoud ensuite le système associé à $MV_2 =$

$$5V_1 + V_2 \text{ et on trouve qu'on peut prendre } V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De même on pose ensuite $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On résoud ensuite le système associé à

$$MV_3 = -3V_1 - 2V_2 + V_3 \text{ et on trouve qu'on peut prendre } V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ce qui donne alors une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie

qu'elle est bien inversible, et que les colonnes forment donc bien une base. D'après le cour, on peut donc affirmer que dans cette base, M est semblable à T .

4. $M = PTP^{-1}$, d'où $M^n = PT^nP^{-1}$.

Or,

$$T^n = (Id + N)^n \quad \text{où } N = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilise la formule de Leibniz sur les matrices :

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k$$

Or

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = 0$$

D'où

$$T^n = Id + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5n & -3n - \frac{n(n-1)}{2} 10 \\ 0 & n & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n & n(2-5n) \\ 0 & n & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, le calcul de P^{-1} donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$M^n = \begin{pmatrix} 10n^2 - 9n + 1 & n(7-5n) & n(2-5n) \\ 5n(2n-1) & -5n^2 + 5n + 1 & -5n^2 \\ n(10n-13) & n(9-5n) & -(5n+1)(n-1) \end{pmatrix}$$

Exercice 11

1. vap $-1, 1$,
2. non diagonalisable car $\dim E_{-1} + \dim E_1 = 2 \neq 3$

3. Il existe une base (v_1, v_2, v_3) où v_1, v_2 vep de vap 1 et -1 . Dans cette base, une matrice de l'endomorphisme associé à M est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star \\ 0 & -1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

4. SI on note T la matrice triangulaire souhaitée, T matrice étant triangulaire, les valeurs sur la diagonale sont nécessairement les valeurs propres de f . Ainsi, $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Exercice 12

1. En posant $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$U_{n+1} = MU_n$$

2. De l'égalité précédent, on tire

$$U_n = M^n U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or, on a déjà calculé dans un exercice précédent

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3} & \frac{-2 * (-4)^n + 2}{5} & -\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \\ 2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{2} & \frac{3}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} & -2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{10} + \frac{3}{5} \\ -\frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{3} & -\frac{2}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} & \frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} p_n = \left(\frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3} \right) p_0 + \left(\frac{-2 * (-4)^n + 2}{5} \right) q_0 + \left(-\frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \right) r_0 \\ q_n = \left(2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{2} \right) p_0 + \left(\frac{3}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} \right) q_0 + \left(-2^{n-1} - \frac{(-4)^n}{10} + \frac{3}{5} \right) r_0 \\ r_n = \left(-\frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{3} \right) p_0 + \left(-\frac{2}{5}(-4)^n + \frac{2}{5} \right) q_0 + \left(\frac{2^n}{3} + \frac{(-4)^n}{15} + \frac{3}{5} \right) r_0 \end{cases}$$

Exercice 13

1. Après recherche des valeurs propres, on trouve

$$Sp(A) = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$$

Les espaces propres associés sont

$$E_{\frac{1}{2}} = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-\frac{3}{2}} = Vect \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Il y a deux valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 2. A est donc diagonalisable.

2. Dans la base de vecteurs propres donnée par la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

la matrice A est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^n = PD^nP^{-1}$

Or, par formule de cours pour les matrices d'ordre 2, on sait directement que

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calcul du produit des trois matrices, on obtient alors

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2} \right)^n & \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{2} \right)^n \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n & \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{2} \right)^n \end{pmatrix}$$

ou en version simplifiée :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n+2}} (1 - (-3)^{n+1}) & \frac{3}{2^{n+3}} (1 - (-3)^n) \\ \frac{1}{2^{n+1}} (1 - (-3)^n) & \frac{1}{2^{n+2}} (3 + (-3)^n) \end{pmatrix}$$

3. Les vap sont non nulles, donc l'inverse de A existe.

D'ailleurs, comme on sait que

$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$$

(les matrices s'échangent !) on en déduit que

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1} P^{-1}$$

D'où

$$A^{-n} = P (D^{-1})^n P^{-1} = PD^{-n} P^{-1}$$

En particulier, l'expression de D^n reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne que l'expression de A^n se généralise à $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la formule donnera

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right) & 3 \cdot 2^{n-3} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \\ 2^{n-1} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) & 2^{n-2} \left(3 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) \end{pmatrix}$$

4. On peut utiliser les formules habituelles sur les récurrences linéaires d'ordre 2 (et donc tout recommencer depuis le début) ou alors se servir de ce qui a été fait précédemment :

Si on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$, alors

$$U_{n+1} = AU_n$$

D'où

$$U_n = A^n U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$p_n = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^n \right) p_1 + \left(\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{2} \right)^n \right) p_0$$

Comme on nous annonce que c'est une probabilité, on doit également avoir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Or,

$$\sum_{n=0}^N p_n = \underbrace{\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{p_1}{2} + 3 \frac{p_0}{4} \right)}_{A_n} + \underbrace{\sum_{n=0}^N \left(-\frac{3}{2} \right)^n \left(-\frac{p_1}{2} + \frac{p_0}{4} \right)}_{B_n}$$

La série (A_n) est convergente car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $|- \frac{3}{2}| > 1$, si $-\frac{p_1}{2} + \frac{p_0}{4} \neq 0$, il n'y a pas convergence de la série (B_n) , donc la somme des deux séries est divergente, ce qui est donc contradictoire avec la convergence de $\sum p_n$. Ainsi, la convergence implique

$$-\frac{p_1}{2} + \frac{p_0}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0 = 2p_1$$

D'où $B_n = 0$ et

$$\begin{aligned} 1 &= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n}_{=2} \left(\frac{p_1 + 3p_1}{2} \right) \\ &= 4p_1 \end{aligned}$$

On en déduit que $p_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$X + 1 \rightsquigarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

5. a) $f' = -f + g$ et $g' = 3/4f$
b) On pose

$$\mathcal{B} = (u, v)$$

Les deux fonctions étant non colinéaires, elles forment une famille libre et

$$\dim E = 2.$$

Par leur construction $f, g \in E$ et de même que pour u, v , f et g forment une famille libre de E . Ainsi, (f, g) est bien une base de E .

De plus, comme $f', g' \in Vect(f, g)$ et que $Vect(f, g) = E$, on a $f', g' \in E$.

L'application est bien définie sur f, g et que la dérivée est linéaire.

- c) On pose

$$\mathcal{B}' = (f; g)$$

On obtient

$$M_{\mathcal{B}'}(L) = A$$

On pose $F = af + bg$. $F^{(2002)} = f$ signifie que

$$L^{2002}(F) = f$$

autrement dit,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{2002} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-2002} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2002} + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2} \right)^{-2002} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2002} - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^{-2002} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} a = 2^{2000} \left(1 + \frac{1}{3^{2001}} \right) \\ b = 2^{2000} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{3^{2001}} \right) \end{cases}$$

ou encore

$$F = 2^{2000} \left(\left(1 + \frac{1}{3^{2001}} \right) f + \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{3^{2001}} \right) g \right)$$

Exercice 14

1. La puce se déplace de la manière suivante :

Si elle est sur	elle va sur	avec une probabilité de
A ou C	A	0
	B	1/2
	C	0
	D	1/2
B ou D	A	1/2
	B	0
	C	1/2
	D	0

On note A_n l'événement : "être sur A après le $n^{\text{ème}}$ déplacement." De même pour B_n , C_n et D_n . Ainsi,

(A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'événements

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales donne

$$p(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n)$$

Or, avec les données présentes, on sait que

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}, \quad P_{C_n}(A_{n+1}) = 0, \quad P_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

D'où

$$p(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{2}P(D_n)$$

De même :

$$p(B_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{2}P(C_n), \quad p(C_{n+1}) = \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{2}P(D_n)$$

$$p(D_{n+1}) = \frac{1}{2}P(C_n) + \frac{1}{2}P(A_n)$$

Si on pose $p_{n,L}$ la probabilité d'être sur le sommet L après le n^{me} saut, on a

donc, pour $U_n = \begin{pmatrix} p_{n,A} \\ p_{n,B} \\ p_{n,C} \\ p_{n,D} \end{pmatrix}$ l'égalité

$$U_{n+1} = MU_n \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$U_n = M^n U_0$$

Calcul de M^n :

M est diagonalisable, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$M^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 \\ (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix}$$

Ou plus simplement :

$$\text{Si } n \text{ pair} \quad M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } n \text{ impair} \quad M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Comme la puce démarre de A , on a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$U_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 \\ (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 \\ (-1)^n + 1 \\ -(-1)^n + 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$p_{n,D} = \frac{-(-1)^n + 1}{4} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

2. Il est clair qu'après les sauts impairs, la puce est au hasard sur l'un des points B ou C . De même, après les sauts pairs, la puce est au hasard sur l'un des points A ou D .

Exercice 15

1. E est un $\mathbb{R}$ ev. On a a priori $f : E \rightarrow \mathbb{R}[X]$. L'application est linéaire car somme d'applications linéaire (spécialisation et produit par une constante $(X+1)$ et $(X-1)$.)

Étude du degré de $f(P)$:

A priori, on a

$$\deg(f(P)) = \deg((X+1)P(X+1) - (X-1)P(X-1)) = \deg P + 1$$

Il faut donc étudier ceci de plus près pour savoir si on a bien

$$\deg(f(P)) \leq 2 \quad ?$$

Pour ceci, on observe que pour tout élément X^k de la base canonique de E , on a :

$$\begin{aligned} f(X^k) &= (X+1)(X+1)^k - (X-1)(X-1)^k \\ &= (X+1)^{k+1} - (X-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Les coefficients dominants respectifs des deux membres de droite sont X^k . Ainsi, en les soustrayant, ils s'annulent et on obtient finalement que

$$\deg f(X^k) \leq k.$$

Ainsi,

$$f(X^k) \in E \quad \forall X^k \in E$$

Autrement dit, comme c'est valable sur tout élément d'une base de E , c'est valable sur E tout entier et f est bien un endomorphisme de E .

$$2. \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a 3 vap distinctes pour M de taille 3 donc M est donc f est diagonalisable.

On trouve directement que 1, X sont des vep respectifs de 2, 4.

Par calcul sur la matrice par exemple, on trouve que le vecteur $(2, 0, 1)$ est vecteur propre de valeur propre 6 de la matrice, donc une base de vecteurs propres de f est : $\mathcal{B}' = (1, X, 2 + X^2)$.

3. Si ce polynôme P existe, par application de la formule, il vérifie

$$f(P)(n) = 6P(n)$$

On peut donc chercher du côté des vecteurs propres de f de valeur propre 6. Aussi, prenons

$$P = \lambda(1 + 2X^2)$$

$$2 = P(1) = 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2/3$$

Par récurrence sur n , en appliquant la formule, on trouve, pour ce polynôme, que

$$P(n) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 16

On note n la dimension de la matrice. D'après le théorème du rang, on a $\dim \ker M = n - 1$. Autrement dit, 0 est valeur propre de dimension d'espace propre $n - 1$.

De plus, il existe v non nul tel que $\mathfrak{Im}(M) = v$. Comme $\mathfrak{Im} v \in \mathfrak{Im}(M) = Vect(v)$, il va exister $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathfrak{Im} v = \alpha v$. Ainsi, v est vecteur propre de valeur propre α . D'où

$$\dim E_{\alpha} \geq 1.$$

Ainsi,

$$\dim E_0 + \dim E_{\alpha} \geq n$$

et la matrice est donc diagonalisable dans une base $v, v_2, \dots, v_n$ où $(v_2, \dots, v_n)$ base de $\ker M$. La matrice dans cette base est la matrice attendue.

Exercice 17

1. $0 \notin \text{sp}(u) \Leftrightarrow \ker u = \{0\} \Leftrightarrow u$ est injectif $\Leftrightarrow u$ est surjectif (car c'est un endomorphisme en dimension finie)
2.
 - Comme u est un automorphisme, 0 n'est pas valeur propre. Ainsi, tout élément de $Sp(u)$ est inversible.
 - $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x$
4. Imaginons que $\dim E = 2$. u a comme vap a, b et v a comme vap c, d , alors uv aurait 4 vap distinctes, ce qui est impossible.

Exercice 18

Notons que, par hypothèse, il existe $v \neq 0$ tel que $f^n(v) = 0$.

Soit

$$N = \max \underbrace{\{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid f^k(v) \neq 0\}}_{\neq 0 \text{ car } f^0(v) = v \neq 0}$$

Alors $N < n$ car $f^n(v) = 0$ et $f^{N+1}(v) = \underbrace{f(f^N(v))}_{\neq 0} = 0$ D'où $\ker f \neq \{0\}$ et

$0 \in Sp(f)$.

Exercice 19

2. Tout élément non nul de cet espace propre est un vecteur propre de g .
 3. f est diagonalisable et les espaces propres sont des droites...
-

Exercice 20

1. A admet 3 vp distincts qui sont 0, 1, 4.

2. Diagonaliser A , on trouve $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cela suggère de prendre $B = PD'P^{-1}$ où $D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Il faut utiliser que A admet 3 vp distincts et que toute B solution commute avec A , donc elles sont codiagonalisables... (cf exercice précédent) Ce sont les matrices de la forme $B = PD'P^{-1}$ où $D' = \begin{pmatrix} 2\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\epsilon, \epsilon' \in \{-1, 1\}$