

Procédés sommatoires discrets

Feuille d'exercices #05

⊗ Partie A – Nature de séries numériques et calcul de sommes

★★ **Exercice 1** — Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{e^n}{n!} & b_n &= \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) & c_n &= \frac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha) \quad (\alpha > 0) \\ d_n &= \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} & e_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} & f_n &= \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (\alpha, a \in \mathbb{R}) \\ g_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+k)} & h_n &= \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) & j_n &= \frac{1}{n^\alpha \ln^3(n)} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

★★ **Exercice 2** — Étudier la nature des séries de termes généraux :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{n^n} & b_n &= \frac{n^n}{3^{n^2}} & c_n &= n^{-\ln(n)} \\ d_n &= \frac{1}{n \ln^2(n)} & e_n &= \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)} & f_n &= \frac{\ln(1+n^\beta)}{n^\alpha} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ g_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} & h_n &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} & j_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

★ **Exercice 3** — *Séries de Bertrand*

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

★ **Exercice 4** — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum [\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)]$$

Calculer sa somme en cas de convergence.

★ **Exercice 5** — Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos\left(\frac{a}{n}\right) + \sin\left(\frac{b}{n}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{c}{n}\right) - e^a \cdot \left(1 + \frac{b+c}{n}\right)^n$$

★ **Exercice 6** — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right]^\alpha$ et $v_n = (-1)^n u_n$. Étudier la nature des séries de termes généraux u_n et v_n .

★★ **Exercice 7** — Justifier l'existence et calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n - (-1)^n) 3^{-n}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right); \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c(n)}{n(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{n(n+1)} \end{aligned}$$

où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10 et $a \in \mathbb{R}$.

★ **Exercice 8** —

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + j^n + j^{2n}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$ dont on justifiera au préalable l'existence.

★ **Exercice 9** — (5/2) Donner la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \arctan(x) dx$.

★ **Exercice 10** — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Déterminer les limites de u_n et nu_n puis préciser la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

★★ **Exercice 11** — Soient $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Montrer que lorsque $\alpha > 1$, (u_n) converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $u_n - \ell$.
2. Montrer que lorsque $\alpha \in]0, 1]$, la suite (u_n) diverge et donner un équivalent de u_n à l'aide de la suite $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

***** Exercice 12 — Produit infini**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tels que $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- On suppose que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la suite définie par $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ admet une limite non nulle.
- Montrer que ce résultat subsiste lorsque $\sum u_n$ converge absolument.

★ **Exercice 13** — On suppose que la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On pourra s'intéresser à la tranche de Cauchy $S_{2n} - S_n$.

★★ Exercice 14 — Tranche de Cauchy (1)

À l'aide d'une tranche de Cauchy, déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^{[\ln(n)]}}{\sqrt{n}}$.

★★ Exercice 15 — Tranche de Cauchy (2)

Montrer que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

***** Exercice 16 — Condensation**

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.
Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

⊗ Partie B – Comparaison suites-séries, sommation d'équivalents

★ **Exercice 17** — Soient $a, b > 0$. On pose $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} \cdot u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Déterminer la nature de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ où $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- En déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
- (5/2) Donner la nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

★★ **Exercice 18** — On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{1 \leq p, q \leq n} \frac{p^2 + q^2}{p + q}$.

Simplifier $u_n - u_{n-1}$ et en déduire un équivalent de u_n .

★★ Exercice 19 — Formule de Stirling

Prouver l'existence d'un réel strictement positif C tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

★★ Exercice 20 — Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

Déterminer la nature de $\sum u_n$ suivant la valeur de α .

★★ **Exercice 21** — On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- Justifier la convergence de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln^2(n)}{2}$.
- Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) \left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2} \right)$.

★ **Exercice 22** — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln(n)$$

★★ **Exercice 23** — On pose pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $I_n(p) = \int_0^1 (1-x^p)^n dx$.

- On suppose qu'une suite (u_n) vérifie $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{np} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Montrer que la suite $(u_n + \ln(n)/p)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- Établir une relation de récurrence sur $(I_n(p))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $I_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{n^{1/p}}$ où $b \in \mathbb{R}$. (5/2) Calculer la valeur de b .

★★ **Exercice 24** — Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

- À l'aide du terme $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la suite (u_n) converge.
- Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum \left[\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right]$ converge.
- En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$. $\sum u_n$ converge-t-elle?

⊗ Partie C – Transformation d'Abel

★ **Exercice 25** — Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

★★ **Exercice 26** — Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge et que dans ce cas les deux séries ont la même somme.

★★ **Exercice 27** — Soient $\sum u_n$ une série convergente de terme général complexe et $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

★★ **Exercice 28** — Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 1$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge.

2. a) Prouver que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\sum_{n=2}^p \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \int_1^p \frac{dt}{t^{1+i\theta}} - (1+i\theta) \int_1^p \frac{\{t\}}{t^{2+i\theta}} dt \quad \text{où } \{t\} = t - \lfloor t \rfloor$$

b) En déduire que $\sum \frac{1}{n^{1+i\theta}}$ diverge.

c) Prouver que pour tout $p \geq 2$, $\left| \sum_{n=2}^p \frac{1}{n^{1+i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|\theta|} + 1 + |\theta|$. En déduire que lorsque (a_n) est décroissante et de limite nulle, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^{1+i\theta}}$ converge.

★★★ **Exercice 29** — *Séries de Hardy*

On cherche à déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$ puis $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ par comparaison série-intégrale.

2. a) Former un dév. asymptotique de $e^{i\pi\sqrt{n+1}} - e^{i\pi\sqrt{n}}$ en $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

b) Traiter le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

3. En déduire le comportement de la série pour $\alpha < \frac{1}{2}$.

⊗ Partie D – Comportement asymptotique de sommes

★ **Exercice 30** — Donner un équivalent en $+\infty$ de u_n et v_n avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 1); \quad w_n = \ln(n!)$$

★ **Exercice 31** — Montrer que $\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left(\frac{p}{q}\right)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^\alpha$ en déterminant $C, \alpha \in \mathbb{R}$.

★ **Exercice 32** — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge. On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
2. Trouver un équivalent de R_n en $+\infty$.
3. À l'aide d'un équivalent de $u_k - \frac{1}{k(k+1)}$, trouver un développement asymptotique de R_n de la forme $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. En déduire un équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k+1)}$.

★ **Exercice 33** — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite notée ℓ .
2. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\sqrt{n} + \ell + \frac{C}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où C est une constante à déterminer.

★★ **Exercice 34** — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

1. Donner un équivalent simple de S_n .
2. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \alpha + o(1)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

★★ **Exercice 35** — Suites à décroissance rapide

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que $\sum u_n$ converge et que le reste au rang n est équivalent à u_{n+1} .

2. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$.

★ **Exercice 36** — Soit $S_n = \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$. Montrer que (S_n) converge et donner un équivalent de $S_n - \ell$, où $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

★★ **Exercice 37** — Reste de la série harmonique alternée

- Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
- En simplifiant $R_n + R_{n+1}$, déterminer un équivalent de R_n .
- Prouver la convergence et calculer la somme de $\sum R_n$.

★★ **Exercice 38** —

- Donner un équivalent simple de $\frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$.
- Encadrer $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\ln(k)}{k^2}$ à l'aide d'intégrales pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$.
- Prouver la convergence de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent du reste.

★★★ **Exercice 39** — Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente, de somme partielle au rang n égale S_n . À l'aide d'une comparaison série/intégrale, prouver la convergence de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

★★★ **Exercice 40** — Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Montrer que les séries de termes généraux u_n et $\frac{u_n}{S_n}$ ont même nature.
- Si $\sum u_n$ converge, quelle est la nature de $\sum \frac{u_n}{R_n}$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$?

★★ **Exercice 41** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, strictement positive, convexe et de limite nulle, telle que $a_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Montrer que $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \sim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{a_n}{2}$.

★★ **Exercice 42** — Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. On note R_n son reste au rang n . On suppose que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} R_n^2$. Déterminer un équivalent simple de u_n .

★★ **Exercice 43** — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs strictement positives.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$. On suppose que $u_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Montrer que $\sum u_n^2$ diverge puis donner un équivalent de S_n^3 et de u_n .

On pourra former la différence $S_n^3 - S_{n-1}^3$.

☒ Partie E – Familles sommables

★ **Exercice 44** — Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ les familles sont-elles sommables?

$$\left(\frac{z^p}{q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \quad \left(\frac{z^{pq}}{p!q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \quad \left(\frac{(p+q)!}{p!q!} z^{p+q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$$

★★ **Exercice 45** — Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Étudier la sommabilité des familles :

$$\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \quad \left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \quad \left(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$$

★ **Exercice 46** — Soit $a > 0$. On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $u_{n,k} = \frac{a^k}{(n+k)!}$. Justifier la sommabilité et calculer la somme de la famille $(u_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$.

★★ **Exercice 47** — Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$.

- Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.
- Soit $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$.

★★ **Exercice 48** — Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

★ **Exercice 49** — Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{2^{\max(n,p)}}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Calculer sa somme; en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (n+1)$.

★ **Exercice 50** — Pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

1. Montrer la sommabilité de $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.
2. Calculer sa somme puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★★ **Exercice 51** — On pose $u_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $u_{n,n} = 0$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.

1. La famille $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ est-elle sommable?
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

★★ **Exercice 52** — Établir que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où l'on a noté $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n .

★★ **Exercice 53** — Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{an}}{1-z^{bn+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{bn+a}}$.

★ **Exercice 54** — Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{1-a-b+ab}$.

★ **Exercice 55** — Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2(q-p)!} & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer la sommabilité de $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.
2. Calculer sa somme. On admet pour cela que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★★ **Exercice 56** — Établir que $e \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

★★ **Exercice 57** — Soit la suite définie par $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = \sum_{k=0}^n t_k t_{n-k}$.
Donner une expression simplifiée de t_n .

★★ **Exercice 58** — Préciser la nature des séries :

$$\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\zeta(n) - 1) : \quad \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n} ; \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$$

On montrera que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

★★ **Exercice 59** — Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

★★ **Exercice 60** — Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs sommable. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k(k+1)}$$

Montrer que (u_n) est définie, établir la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.

★★ **Exercice 61** — Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p,q \geq 2}$.