Généralités sur les fonctions

Table des matières

I – Préambule valable pour tout le cours

Abréviations

- ⋆ « Déf » : Définition
- ⋆ « Prop » : Proposition
- ⋆ « Thm » : Théorème
- ⋆ « *i.e.* » : abréviation de *id est* qui signifie *c'est-à-dire* en latin
- ⋆ « Rq » : Remarque
- ⋆ « Démo » : Démonstration

Notations

- ⋆ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers naturels
- ⋆ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers relatifs
- ⋆ $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$: ensemble des nombres réels
- ⋆ $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$: ensemble des réels positifs
- ⋆ $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$
- ⋆ $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

On décrira souvent un ensemble à l'aide d'une propriété :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \text{ vérifiant la propriété } \mathscr{P}\right\}$$

On parle d'écriture *en compréhension* de l'ensemble.

Exemple ⋆ $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 1 \geqslant 0\right\} = [-1, +\infty[$

⋆ $\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n^2 \leqslant 4\right\} = \{0, 1, 2\}$

Symboles

- ⋆ Si E est un ensemble (non vide), on écrira souvent « $\forall x \in E$ » pour dire « quelque soit x dans l'ensemble E ». Le symbole « $\in$ » signifie « appartient ».
- ⋆ On utilise aussi le quantificateur $\exists$ qui signifie « il existe ».

Exemple ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$

⋆ $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 10$

Dans tout ce chapitre, I désigne un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$ qui est soit un intervalle, soit une réunion d'intervalles. Par exemple :

- $I =]0, 1]$;
- ou $I = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- ou $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$;
- ou $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- ou...

II – Notion de fonction

On rappelle qu'une fonction f (ou une application) est un « procédé » qui à tout nombre x d'un ensemble (de départ) I associe un unique nombre réel noté $f(x)$ que l'on appelle l'image de x par f. On décrit une fonction de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exemple ⋆ $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est la fonction carrée ;

⋆ $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$.

Attention : il ne faut pas confondre la fonction f et le nombre $f(x)$. Écrire « la fonction x^2 n'a aucun sens ».

Dans toute la suite, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

1) Ensemble de définition d'une fonction

Définition (ensemble de définition) L'ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $f(x)$ soit bien défini (*i.e.* tels que $f(x)$ ait un sens). Il est souvent noté $\mathscr{D}_f$.

Exemple ⋆ L'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$.

⋆ L'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

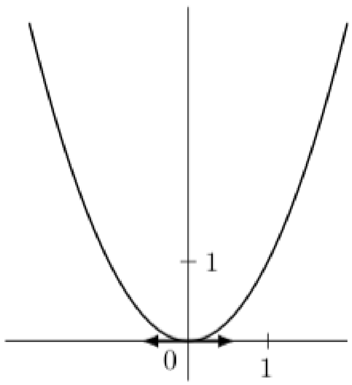
1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{-x+3}}$;
2. $g : x \longmapsto \ln(\ln(x))$.

2) Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles

Définition (représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles) La représentation graphique de f (ou « courbe représentative de f »), dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble suivant (appelé graphe de f) :

$$\mathscr{G} = \left\{ (x, f(x)) \,\middle|\, x \in I \right\}$$

Exemple Représentation graphique de la fonction carré sur $\mathbb{R}$:



3) Obtention du graphe de $x \longmapsto f(x+a)$ et de $x \longmapsto f(ax)$ connaissant celui de f.

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

⋆ Considérons la fonction $g : x \longmapsto f(x+a)$. L'ensemble de définition de g est :

$$\mathscr{D}_g = \left\{ x - a \,\middle|\, x \in I \right\} \overset{\text{noté}}{=} \mathscr{D}_f - a$$

Le graphe de g dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $-a\vec{i}$ de la représentation graphique de f.

Exemple La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, tandis que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est définie sur $[-1, +\infty[$.

⋆ Supposons que $a \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons $h : x \longmapsto f(ax)$. L'ensemble de définition de h est :

$$\left\{ \frac{x}{a} \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f \right\} \overset{\text{noté}}{=} a^{-1}\mathscr{D}_f$$

Exemple Si $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$, alors la fonction $g : x \longmapsto f(2x)$ est définie sur $\mathscr{D}_g = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, tandis que $h : x \longmapsto h\left(\frac{1}{2}x\right)$ est définie sur $\mathscr{D}_h = [2, +\infty[$.

On obtient le graphe de h par contraction ou dilatation de $\mathscr{C}_f$ suivant l'axe des abscisses d'un facteur $\frac{1}{a}$. Si a est négatif, il faut de plus procéder à une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

⋆ On obtient le graphe de $g : x \longmapsto f(-x)$ par symétrie du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction g est définie sur :

$$-\mathscr{D}_f \overset{\text{notation}}{=} \{ -x \,|\, x \in \mathscr{D}_f \}$$

Exemple graphe de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

4) Opérations sur les fonctions : somme, produit, quotient et composition

Définition (opérations simples sur les fonctions) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut définir :

⋆ la fonction $\lambda f + \mu g$ par :

$$\lambda f + \mu g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \right.$$

⋆ le *produit* de f et de g par :

$$f \times g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

⋆ si g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire si : $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$), on peut définir le *quotient de f par g* par :

$$\frac{f}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

Exemple Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$, alors $f + 3g$ est la fonction $x \longmapsto x^2 + 3\cos(x)$ (qui est définie sur $\mathbb{R}$).

Définition (composition de deux fonctions) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \in J$$

On peut alors définir la fonction *composée de g par f* par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Exemple Considérons les fonctions $f : x \longmapsto x+1$ et $g : x \longmapsto \ln(x)$.

- ⋆ L'expression de la fonction $g \circ f$ est :
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \ln(x+1)$$
Cette fonction est définie sur $]-1, +\infty[$.
- ⋆ L'expression de la fonction $f \circ g$ est :
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = \ln(x) + 1$$
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
2. $g : x \longmapsto \ln(x^2+4)$
3. $h : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$

5) Symétries

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

Définition (parité, imparité) ⋆ On dit que f est *paire* sur I si :

— I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* : $\forall x \in I,\ -x \in I$) ;

— $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

⋆ On dit que f est *impaire* sur I si :

— I est symétrique par rapport à 0 ;

— $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à O.

Exemple Les fonctions carré $x \longmapsto x^2$ et cosinus sont paires sur $\mathbb{R}$, les fonctions cubes et sinus sont impaires sur $\mathbb{R}$.

Définition (périodicité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est $T-$périodique (ou qu'elle est périodique de période T) si on a :

⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \iff x + T \in I$;

⋆ $\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphe de f est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple

1. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)$ est périodique de période 2π car :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
2. La fonction $g : x \longmapsto \sin(3x)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$ car :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x)$$

Remarque : les symétries permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction.

Exemple Étudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

6) Monotonie

Définition (croissance, décroissance) On dit que :

* ⋆ f est croissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

* ⋆ f est décroissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

* ⋆ f est strictement croissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad x < y \implies f(x) < f(y)$$

* ⋆ f est strictement décroissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad x < y \implies f(x) > f(y)$$

* ⋆ f est monotone si et seulement si f est croissante sur I ou f est décroissante sur I
* ⋆ f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I.

Exemple ⋆ La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* ⋆ La fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle ne décroît pas sur $\mathbb{R}^*$.
* ⋆ La fonction cosinus n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Remarque : la somme de deux fonctions croissantes est croissante.

7) Fonctions majorée, minorée, bornée

Définition (fonction majorée, minorée, bornée) ⋆ On dit que f est *majorée* sur I si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$$

* ⋆ On dit que f est *minorée* sur I si :

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x)$$

* ⋆ On dit que f est *bornée* sur I si f est majorée et minorée sur I, *i.e.* si :

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Exemple ⋆ La fonction $x \longmapsto \cos(3x+1)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

* ⋆ La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est minorée sur l'intervalle $]0, +\infty[$ mais elle n'est pas majorée. Elle est bornée sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

8) Extremum

Définition Soit $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum sur I en x_0 si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$

- On dit que f admet un minimum sur I en x_0 si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \geqslant f(x_0)$$

- On dit que f admet un extremum en x_0 si f y admet un maximum ou un minimum.

Exemple la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ admet un minimum en 0 qui vaut 2 car

$$f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2$$

III – Dérivation

Dans cette partie, la plupart des résultats seront admis à ce stade ; ils seront démontrés dans le chapitre sur la dérivabilité.

1) Définitions

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (dérivabilité en un point, nombre dérivé, dérivée) ⋆ Soit $a \in I$. On dit que la fonction f est *dérivable au point* a si le *taux d'accroissement* :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas :

— la limite est appelée *nombre dérivé de* f *au point* a et elle est noté $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

— on appelle tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point $(a, f(a))$ la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(a)$ et qui a donc pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

⋆ On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

⋆ Dans ce cas, la dérivée de f est la fonction :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Remarque. Le nombre dérivé est noté aussi $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.

✎✎✎ **Exercice** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et retrouver l'expression bien connue de la dérivée de f.

Exemple La tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

Remarque : les taux d'accroissements permettent de calculer certaines limites.

Exemple On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

2) Dérivées des fonctions usuelles

voir formulaire.

3) Propriétés algébriques

voir formulaire.

Cas particuliers de la dérivée d'une composée :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \qquad (\mathrm{e}^u)' = u' \times \exp u, \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \qquad (u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

et encore :

$$\cos(u)' = -u' \sin(u) \qquad \text{et} \qquad \sin(u)' = u' \cos(u)$$

✎✎✎ **Exercice** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité (c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$, au sens de l'inclusion, sur lequel la fonction est dérivable) ainsi que la fonction dérivée.

1. $f : x \longmapsto 3\sin(x) + 5x^4 - \dfrac{1}{x}$;
2. $g : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$;
3. $h : x \longrightarrow \tan(x)$;
4. $i : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$;
5. $j : t \longmapsto \sqrt{3t - 5}$;
6. $k : x \longmapsto (2x + 1)^4$;
7. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x + 1)^4}$;
8. $m : x \longmapsto \cos(\ln(x))$.

4) Monotonie et dérivée

Ici, l'ensemble I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point). Le résultat suivant sera démontré dans le chapitre sur la dérivabilité.

Proposition (admise) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

⋆ Si :

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) \geqslant 0,$$

alors f est croissante sur I.

- ⋆ Si :
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) \leqslant 0,$$
alors f est décroissante sur I.
- ⋆ Si :
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = 0,$$
alors f est constante sur I.
- ⋆ Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- ⋆ Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

✎✎✎ **Exercice** Étudier les variations de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

✎✎✎ **Exercice** Étudier les variations de $f : x \longmapsto \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + 2023$ sur $\mathbb{R}$.

5) Dérivées d'ordres supérieurs

On peut définir les dérivées d'ordres supérieurs de f par récurrence.

Définition (dérivées d'ordre supérieurs) On définit les dérivées successives $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ de f par récurrence de la manière suivante :
- ⋆ on pose $f^{(0)} = f$;
- ⋆ si f est dérivable sur I, alors on pose $f^{(1)} = f'$;
- ⋆ si f soit n fois dérivable sur I de dérivée n^{e} notée $f^{(n)}$, alors on dit qu'elle admet une dérivée $(n+1)^{\mathrm{e}}$ si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I et cette dérivée $(n+1)^{\mathrm{e}}$ de f, notée $f^{(n+1)}$, est définie par $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On écrit aussi :
$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$$

✎✎✎ **Exercice** Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :
1. $x \longmapsto x^2$;
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$;
3. $x \longmapsto \frac{1}{x}$;
4. $x \longmapsto \ln(1+x)$.

IV – Fonctions usuelles

1) Fonctions logarithmes et exponentielles

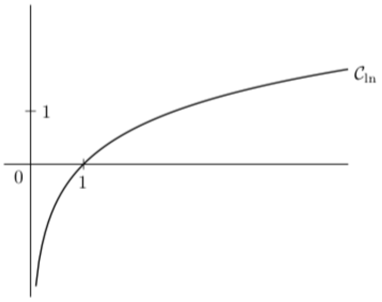
(a) Fonction ln

Définition/théorème (fonction ln) Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- ⋆ $f(1) = 0$.

Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien* notée ln.

Démonstration admise à ce stade ■



x	0		$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les propriétés de la fonction ln sont les suivantes.

Proposition (i) ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

(iii) on a les propriétés algébriques suivantes :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln x$

Démonstration (i) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Les limites de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ sont admises à ce stade.

(iii) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$$

donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$$

Autrement dit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\ln(y) + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(y \times \frac{x}{y}\right) = \ln(x),$$

d'où la deuxième formule annoncée. On démontre la dernière par récurrence. ■

Définition (logarithmes décimal et binaire) On appelle logarithme décimal et logarithme binaire, notés respectivement log et $\log_2$, les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \qquad \text{et} \qquad \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Les propriétés de ces fonctions (tableau de variation, graphe, limites, propriétés algébriques) sont les mêmes que celles de ln.

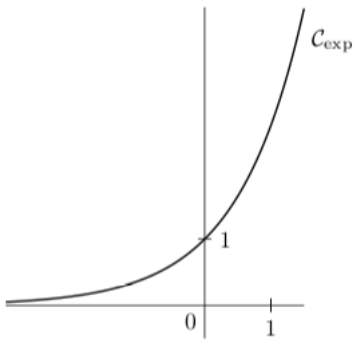
(b) Fonction exponentielle

La construction de la fonction exponentielle :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \exp(x) = \mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

est admise à ce stade. Il s'agit de la réciproque de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, ce qui signifie que l'on a les identités :

- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$;
- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$

Les propriétés de la fonction exp sont les suivantes.

Proposition (admise) (i) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(ii) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

(iv) en posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on a $\ln(\mathrm{e}) = 1$

(v) on a de plus les propriétés algébriques suivantes :

- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ et $\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^y}$

(vi) enfin, on a les inégalités suivantes :

$$(\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x)$$

Démonstration (de (vi)) On a déjà démontré la deuxième inégalité. En particulier :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient la première inégalité. ■

Remarque : la tangente (T) à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle a pour équation $y = x + 1$. La dernière inégalité signifie donc que la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ se trouve au-dessus de la tangente (T) (c'est une propriété de convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$).

2) Fonctions puissances

(a) Définition

On veut donner un sens à x^a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, par convention, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^0 = 1$$

Définition (fonctions puissances) Soit $a \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

- ⋆ **Premier cas :** si $a \in \mathbb{N}$, on définit la fonction puissance d'exposant a par :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = x \times \cdots \times x \ (a \text{ fois}) \end{array} \right.$$

- ⋆ **Deuxième cas :** si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on définit la fonction puissance d'exposant a par :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \dfrac{1}{x^{-a}} \end{array} \right. \qquad (\text{ici } -a \in \mathbb{N})$$

- ⋆ **Troisième cas :** si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit la fonction puissance d'exposant a par :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \mathrm{e}^{a \ln(x)} \end{array} \right.$$

(b) Propriétés des fonctions puissances

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates des propriétés de l'exponentielle.

Proposition (propriétés algébriques des fonctions puissances) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $x^a y^a = (xy)^a$;

(ii) $x^a x^b = x^{a+b}$;

(iii) $(x^a)^b = x^{ab}$;

(iv) $1^a = 1$;

(v) $\ln(x^a) = a \ln(x)$;

(vi) $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$.

Démonstration Il suffit d'écrire les expressions sous forme exponentielle. ■

Proposition Soit $a \in \mathbb{R}$.

(i) La fonction φ_a est dérivable sur $D = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ et :

$$\forall x \in D, \qquad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}$$

(ii) graphes et tableaux de variation de φ_a suivant que $a < 0$ ou $a > 0$ (le cas $a = 0$ n'est pas intéressant).

(iii) si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi_a(x) = 0$.

Démonstration (de (i)) Il suffit d'utiliser le théorème de dérivabilité d'une fonction composée. ■

Remarques :

- ⋆ Si $a > 0$, alors on peut prolonger la fonction φ_a en 0 en posant $\varphi_a(0) = 0$. La fonction φ_a est donc maintenant définie sur $\mathbb{R}_+$.
- ⋆ S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \dfrac{1}{n}$, alors la fonction $\varphi_{\frac{1}{n}}$ est appelée fonction *racine* n^{e}. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}} \overset{\text{noté}}{=} \sqrt[n]{x}$$

- ⋆ Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, on appelle expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ la quantité $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Proposition (expression conjuguée) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Démonstration Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

■

✎✎✎ **Exercice** Calculer la limite $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)$.

(c) Croissances comparées

On sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \underset{x \to +\infty}{\mathrm{e}^x}\ x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition (croissances comparées) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^b}{x^a} = 0$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^b \,\mathrm{e}^{ax} = 0$$

Démonstration (pour la fonction ln et pour $a = b = 1$) On sait que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \ln\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \sqrt{x} - 1 \leqslant \sqrt{x}$$

donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$$

puis (en divisant par $x > 0$) :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure. ■

3) Fonction cosinus, sinus et tangente hyperboliques

(a) Fonctions ch et sh

Définition (cosinus et sinus hyperboliques) Les fonctions cosinus hyperbolique (notée ch) et sinus hyperbolique (notée sh) sont les fonctions :

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

Les propriétés de ces fonctions sont les suivantes.

Proposition (propriétés de ch et sh) (i) la fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$;

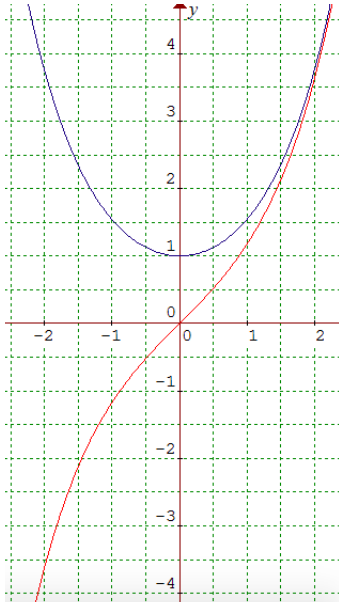
(ii) la fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$;

(iii) les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$;

(iv) on a l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$$

Démonstration Il suffit de faire les calculs. ■



Remarquons en outre que :

- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) > 0$;
- ⋆ la fonction ch atteint son minimum en 0 (ce minimum vaut 1).

(b) Fonction th

Définition (tangente hyperbolique) La fonction tangente hyperbolique (notée th) est la fonction :

$$\operatorname{th} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{th}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Les propriétés de la fonction th sont les suivantes.

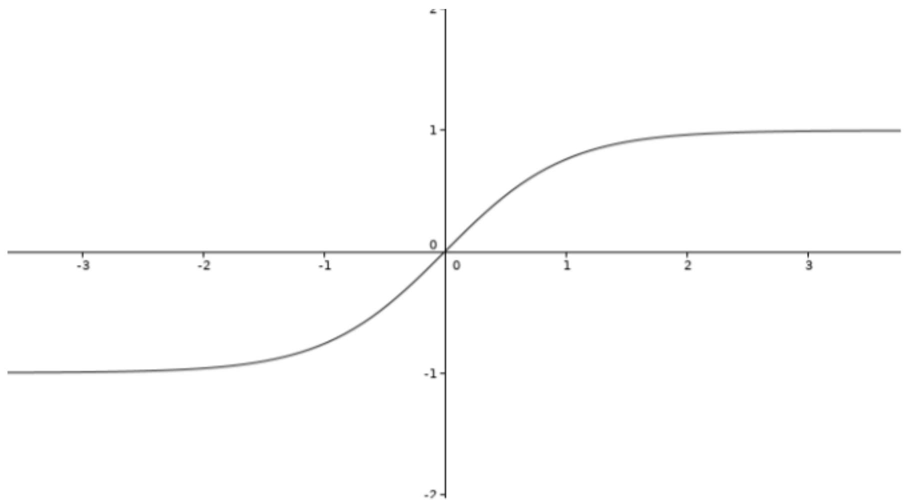
Proposition (propriétés de la fonction th) (i) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} = 1 - \operatorname{th}(x)^2$$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{th}(x) = \pm 1$

(iii) la fonction th est impaire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration immédiat ■



1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1