

# Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants Chapitre 5

## Corrections exercices types

**Exercice 1. exo 5-1** Montrer que cette modélisation conduit à la résolution d'une équation différentielle. Puis résoudre cette équation en utilisant les rappels de première année (on pourra prendre  $P_0 = 15$  et  $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$ ).

On a  $P'(t) = j(Q_d(t) - Q_0(t))$  avec

$$Q_d(t) = a - bP(t) \quad (1),$$

$$Q_0(t) = -c + dP(t) \quad (2).$$

Donc  $Q_d(t) - Q_0(t) = a + c - (b + d)P(t)$ , ainsi  $P'(t) = j(a + c) - j(b + d)P(t) \Leftrightarrow P'(t) + j(b + d)P(t) = j(a + c) \quad (*)$   
On est ramené à une ED linéaire d'ordre 1.

Résolution avec  $P_0 = 15$  et  $a = 200, b = 4, c = 100, d = 5$  :  $(*) \Leftrightarrow P'(t) + 9jP(t) = 300j$ .

On résout l'équation homogène associé :  $P'(t) + 9jP(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) = Ke^{-9jt}, K \in \mathbb{R}$ .

Solution particulière de  $(*)$  :  $P_1(t) = \frac{300j}{9j} = \frac{100}{3}$ .

L'ensemble des solutions de  $(*)$  est alors :  $t \mapsto P(t) = \frac{100}{3} + Ke^{-9jt}, K \in \mathbb{R}$ .

On sait de plus que  $P(0) = 15 = \frac{100}{3} + K \Leftrightarrow K = -\frac{55}{3}$ .

On trouve donc une solution unique (car condition initiale  $P(0) = 15$ ) :  $P(t) = \frac{100}{3} - \frac{55}{3}e^{-9jt}$ .

**Exercice 2. exo 5-2** Montrer qu'en utilisant les nouvelles expressions (3) et (4) pour l'offre et la demande, on arrive à une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme :

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) + \gamma = 0.$$

On a :

$$nP''(t) + mP'(t) - bP(t) + a = Q_d(t) \quad (3)$$

$$wP''(t) + uP'(t) + dP(t) - c = Q_0(t) \quad (4)$$

On sait aussi que d'après l'exo précédent :  $P'(t) + j(b + d)P(t) = j(a + c) \quad (*)$ .

On dérive  $(*)$ , on obtient :  $P''(t) + j(b + d)P'(t) = 0$ .

Puis avec  $j((3) - (4))$ , on obtient :

$$j(n - w)P''(t) + j(m - u)P'(t) - j(b + d)P(t) + (a + c)j = j(Q_d(t) - Q_0(t)) = P'(t) \Leftrightarrow j(n - w)P''(t) + j(m - u - 1)P'(t) - j(b + d)P(t) + (a + c)j = 0.$$

Si  $j(n - w) \neq 0$  on obtient :

$P''(t) + \frac{(m - u - 1)}{n - w}P'(t) - \frac{b + d}{n - w}P(t) + \frac{a + c}{n - w} = 0$ , on est donc ramené à une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme :

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) + \gamma = 0.$$

avec  $\alpha = \frac{(m - u - 1)}{n - w}, \beta = -\frac{b + d}{n - w}, \gamma = \frac{a + c}{n - w}$ .

**Exercice 3. exos 5-3**

On reprend une partie de l'exercice ??, à savoir cette équation différentielle d'ordre 2 :

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = 0$$

Écrire sous forme matricielle cette équation.

On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ P'(t) \end{pmatrix}$ , alors  $X'(t) = \begin{pmatrix} P'(t) \\ P''(t) \end{pmatrix}$ , on a alors  $P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = 0 \Leftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X$ .

**Exercice 4. exos 5-4**

Traduire sous forme matricielle le système différentiel suivant ou l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$1. (S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , alors  $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$  d'où (S)  $\Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X(t)$ .

2. (E) :  $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$

On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ , alors  $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$  d'où (E)  $\Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$

### Exercice 5. exo 5-5

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Vérifions que 2 est une valeur propre de A en donnant un vecteur propre associé V.

On cherche  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $V \neq 0$ ,  $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - 2I_2)X = 0$ .

$$(A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow V = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \neq 0$  donc 2 est bien valeur propre de A.

On en déduit une solution au système différentiel  $X' = AX$ .

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Alors :  $t \mapsto e^{2t}V$  est une solution au système différentiel  $X' = AX$ .

NB :  $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$ .

D'où  $\text{Sp}(A) = \{2\}$ .

### Exercice 6. exo 5-6 et 5-7

Résoudre :

1. (S)  $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$

(S)  $\Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ , alors  $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$  d'où (S)  $\Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X(t)$ .

On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_2$  non inversible :

$$A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = 1, \text{ ou } 2 - \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1, \text{ ou } \lambda = 3.$$

Donc  $\text{Sp}(A) = \{1; 3\}$ .

De plus, A est symétrique donc diagonalisable.

On cherche les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A :  $E_1(A)$  et  $E_3(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - I_2)X = 0$ .

$$(A - I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_1(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - 3I_2)X = 0$ .

$$(A - 3I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_3(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_3(A)$ .

D'après le cours, on sait alors que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{X : t \mapsto \alpha e^t V_1 + \beta e^{3t} V_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

exo 5-8 :

On a les conditions initiales  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$ . On sait alors comme le système est un système différentiel linéaire à coefficients constants qui a des conditions initiales, que ce système admet une unique solution.

On a  $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \alpha e^t V_1 + \beta e^{3t} V_2 = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 1 \end{cases} \text{ D'où l'unique solution du système différentiel est donné par } X : t \mapsto e^t V_1 + e^{3t} V_2, t \in \mathbb{R}.$$

2. (E) :  $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0 \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$  avec  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ ,  $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$  d'où (E)  $\Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$  (S).

On cherche les valeurs propres de  $A$  :

On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_2$  non inversible :

$A - \lambda I_2$  non inversible  $\Leftrightarrow -\lambda(1 - \lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ , ou  $\lambda = 2$  Donc  $Sp(A) = \{-1; 2\}$ .

On cherche les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$  :  $E_{-1}(A)$  et  $E_2(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A + I_2)X = 0$ .

$$(A + I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_{-1}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_{-1}(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - 2I_2)X = 0$ .

$$(A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_2(A)$ .

La concaténation des bases des sous-espaces propres de  $A$  forme une famille libre de 2 vecteurs de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension 2. C'en est donc une base. Donc  $A$  est diagonalisable.

D'après le cours, on sait alors que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{X : t \mapsto \alpha e^{-t} V_1 + \beta e^{2t} V_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On a donc  $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} \\ -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t} \end{pmatrix}$ . Mais ce qui nous intéresse est la première composante de  $X(t)$  car on avait posé :  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ .

D'où l'ensemble des solutions de  $E$  est  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 7. exo 5-8** Considérons le système  $X' = AX$  avec cette fois la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Résolvons le système sur  $\mathbb{R}$  et donnons ses trajectoires.

$A$  est diagonale, le spectre de  $A$  est donc  $Sp(A) = \{1, 2\}$ .

On cherche les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$  :  $E_1(A)$  et  $E_2(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - I_2)X = 0$ .

$$(A - I_2)X = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_1(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_1(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A)$ ,  $X \neq 0$ ,  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - 2I_2)X = 0$ .

$$(A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_2(A)$ .

D'après le cours, on sait alors que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{X : t \mapsto \alpha e^t V_1 + \beta e^{2t} V_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \end{pmatrix}$ .

La trajectoire associée au système est donc l'ensemble :  $\{(\alpha e^t, \beta e^{2t}), t \in \mathbb{R}\}$ .

**Exercice 8. exo 5-9**

Soit le système (S)  $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$  Résolvons (S) sur  $\mathbb{R}$  et donnons ses trajectoires.

$$(S) \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ alors } X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ d'où } (S) \Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t).$$

On cherche les valeurs propres de  $A$  :

On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_2$  non inversible :

$A - \lambda I_2$  non inversible  $\Leftrightarrow -\lambda(1 - \lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ , ou  $\lambda = 2$  Donc  $Sp(A) =$

$\{-1; 2\}$ .

On cherche les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A : E_{-1}(A)$  et  $E_2(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A), X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A + I_2)X = 0$ .

$$(A + I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_{-1}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_{-1}(A)$ .

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A), X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que :  $(A - 2I_2)X = 0$ .

$$(A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

D'où  $E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  unique non nul, base de  $E_2(A)$ .

La concaténation des bases des sous-espaces propres de  $A$  forme une famille libre de 2 vecteurs de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui est de dimension 2. C'en est donc une base. Donc  $A$  est diagonalisable.

D'après le cours, on sait alors que l'ensemble des solutions de (S) est :  $\{X : t \mapsto \alpha e^{-t} V_1 + \beta e^{2t} V_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ .

On a donc  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} \\ -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t} \end{pmatrix}$ .

La trajectoire associée à S est l'ensemble :  $\{(\alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t}), t \in \mathbb{R}\}$ .

#### Exercice 9. exo 5-10

On reprend le système  $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$ , donnons les points d'équilibre.

On avait trouver l'ensemble des solutions du système :  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\alpha e^t + \beta e^{3t}}_{x_1(t)} \\ \underbrace{-\alpha e^t + \beta e^{3t}}_{x_2(t)} \end{pmatrix}$ .

Trouver les points d'équilibres du système c'est trouver les solutions constantes du système.

On doit donc résoudre  $\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = 0 \\ x_1(t) + 2x_2(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha e^t + \beta e^{3t} = 0 \\ -\alpha e^t + 2\beta e^{3t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \alpha = 0$ .

Donc le seul point d'équilibre (ou état d'équilibre du système) est  $(0, 0)$ .

NB :  $A$  est inversible donc le seul point d'équilibre est  $(0, 0)$ .

#### Exercice 10. exo 5-11

Soit le système (S)  $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$

On a trouvé le spectre de  $A$  tq (S)  $\Leftrightarrow X'(t) = AX(t) : Sp(A) = \{-1; 2\}$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont de signes contraires.

Donc il existe des trajectoires divergentes.