Polynômes du 2nd Degré 1/2

#1èreSpéMaths

Une fonction f du polynôme de degré 2 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle peut s'écrire sous 3 formes :

Forme Développée :	$f(x) = \underbrace{a}_{\neq 0}x^2 + bx + c$
Forme Canonique :	Abscisse du sommet $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ Ordonnée du sommet
Forme Factorisée :	Racines $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

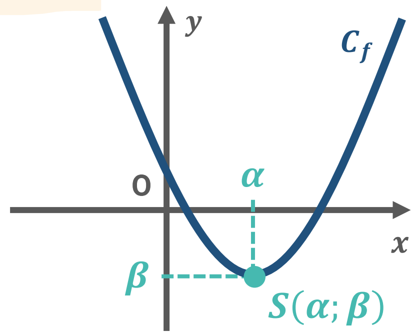
Les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, x_1$, et $x_2 \in \mathbb{R}$

et $a \neq 0$.

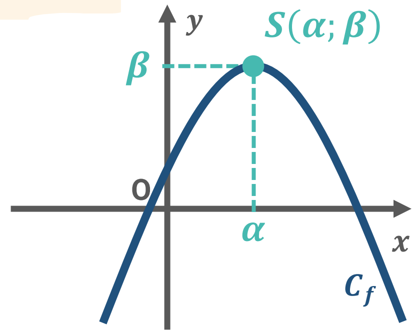
Variation et Extremum

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une Parabole :

$a > 0$



$a < 0$



Tableaux de variation :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

Formules à retenir : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Polynômes du 2nd Degré 2/2

#1èreSpéMaths

Résolution d'équation : $ax^2 + bx + c = 0$?

Les solutions de cette équation dépendent du signe du Discriminant qui est :

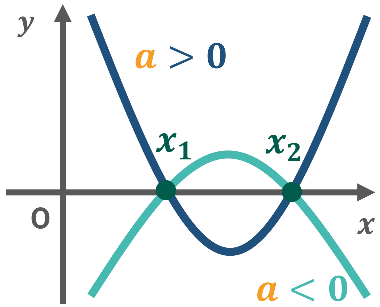
« delta » $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$:	2 solutions : « racines » $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$:	1 solution : $x = \dfrac{-b}{2a}$
Si $\Delta < 0$:	Pas de solution réelle.

Somme et Produit des racines : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$

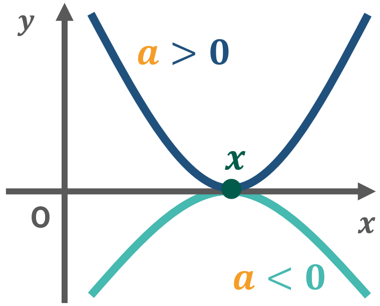
Signe du Polynôme

Tableaux de signe :



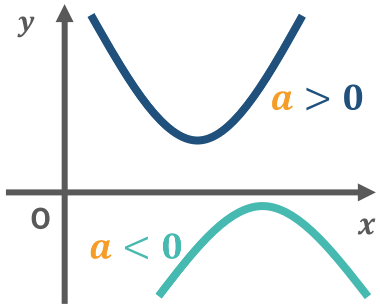
Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	



Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	



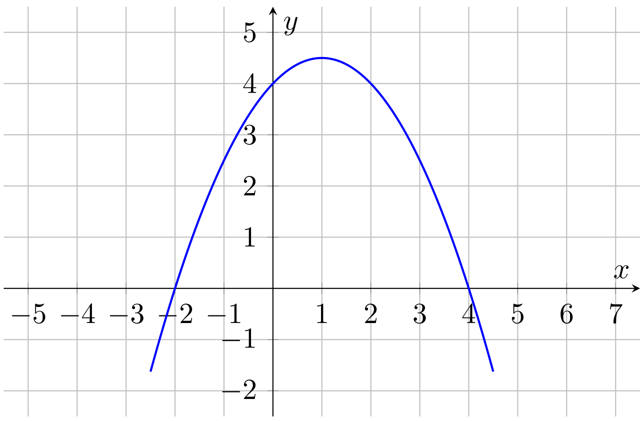
Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Exercice 1 : QCM (3 points)

Pour chaque question, donner sans justifier la seule bonne réponse.
On reportera sur la copie le numéro de question et la lettre correspondant à la bonne réponse.

On considère une fonction f du second degré dont on donne la courbe représentative ci-dessous.



1. La forme canonique de $f(x)$ est :

   a) $\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}$ b) $\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{9}{2}$ c) $-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}$ d) $-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$

2. Le discriminant du trinôme $f(x)$ est :

   a) nul b) strictement positif c) strictement négatif

3. La forme *factorisée* de $f(x)$ est :

   a) $\frac{1}{2}(x-4)(x-2)$ b) $-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$ c) $\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$ d) $-\frac{1}{2}(x+4)(x+2)$

Exercice 2 : (9,5 points)

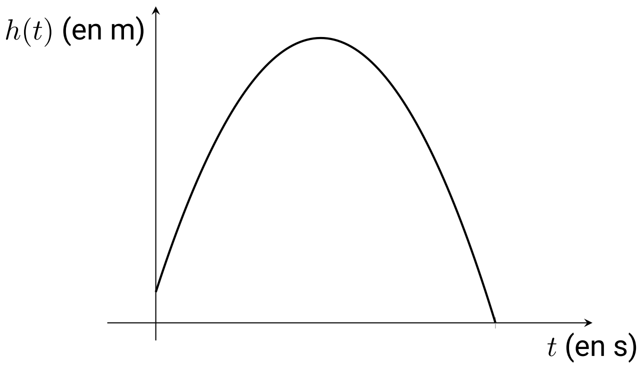
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2-8x+42$.
On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer la forme canonique de f en justifiant soigneusement.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. Résoudre $f(x)<0$.
4. Donner l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.
5. Déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection(s) de $\mathcal{P}$ avec la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x^2-8x-7$.

Exercice 3 : (4,5 points)

Paul lance une balle en l'air. On modélise la hauteur de la balle, en mètre, en fonction du temps t, exprimé en seconde, par la fonction h définie par :

$$h(t) = -5t^2 + 17t + 1,75$$



1. À quelle hauteur se trouve la balle au début du lancer ?
2. À quelle hauteur se trouve la balle à l'instant $t = 2$ secondes ?
3. Au bout de combien de temps la balle retombera-t-elle au sol ?
4. À quel instant la balle repassera-t-elle par la hauteur dont elle a été lancée ?

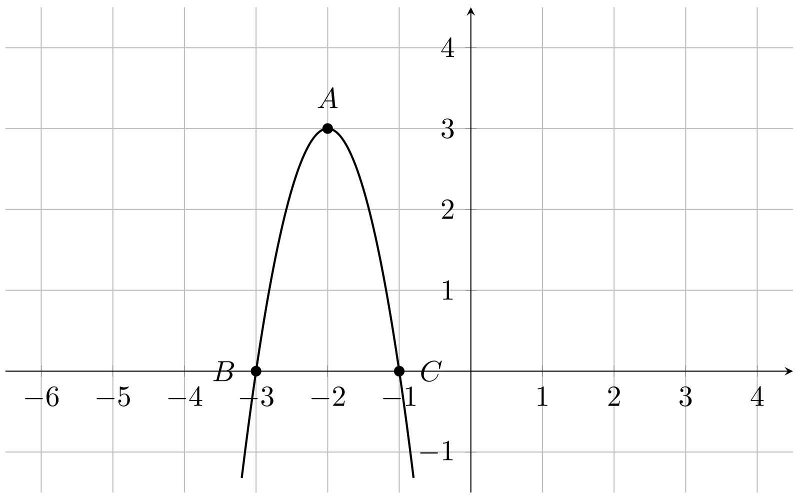
Exercice 4 : (3 points)

Déterminer deux nombres entiers consécutifs sachant que leur produit est 702.

Exercice 1 : Techniques élémentaires

1. **Résolution d'équation et inéquation :**
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(-2x-5) < x^2(-2x-5)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{5}{-4x+2} = \dfrac{7}{3x-1}$
2. **Le second degré :**
   a) Donner la forme factorisée puis la forme canonique de $f(x) = -2x^2 + 8x + 42$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2 - 49x = 10$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $-3x^2 \leq 7x + 10$ et $2x^2 - 26x + 44 > 0$.
   d) Établir le tableau de variation de : $f(x) = -3x^2 + 3x + \dfrac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
   e) Déterminer la racine évidente du polynôme $f(x) = 3x^2 + x - 2$ puis déterminer la deuxième racine (sans utiliser de discriminant).
   f) Déterminer la fonction polynôme du second degré f de racines 5 et -4, et telle que $f(0) = 3$.
   g) Déterminer les réels m tels que l'équation : $mx^2 - 6x + m = 0$ admette deux solutions.

Exercice 2 : À partir de la courbe ...



Par lecture graphique :

1. Déterminer le signe de a et celui du discriminant de la fonction f représentée ci-dessus.
2. Déterminer la forme canonique et la forme factorisée de l'expression de cette fonction.
3. Discuter suivant les valeurs du réel k, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout réel x différent de 1, $1+x+x^2+x^3=\dfrac{1-x^4}{1-x}$.

EXERCICE 1 — Compétences de base – 30 min – 7 points

1. Dans cette question on donne :

$$\boxed{f(x) = -3x^2 + 8x + 35}$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   Comment s'interprète graphiquement le résultat trouvé ?
   b. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
   c. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.
   d. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

2. Dans cette question on donne :

$$\boxed{g(x) = -3x^2 + 12x - 5}$$

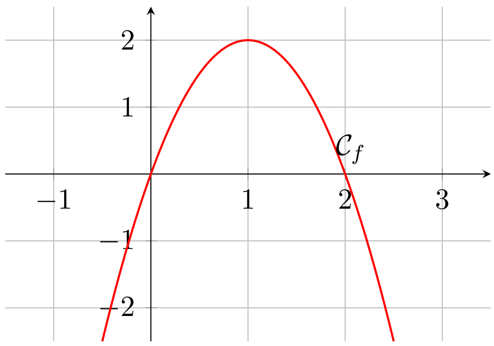
   a. g admet-elle un maximum ou un minimum ? Justifier.
   b. Donner la valeur de cet extrémum et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

3. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point d'intersection dont on calculera les coordonnées.

4. a. Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.
   b. Interpréter graphiquement les solutions trouvées.

EXERCICE 2 — Forme canonique – 10 min – 2 points

On donne ci-dessous la parabole représentative d'une fonction f.



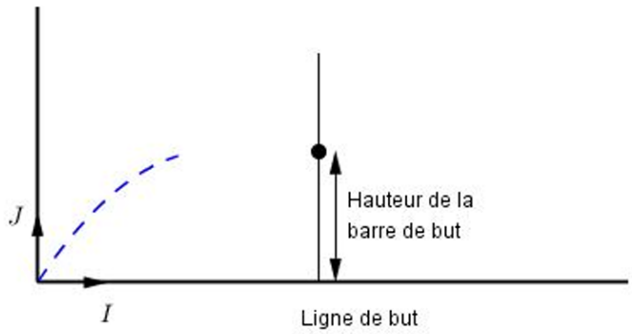
$\rightarrow$ Donner la forme canonique de f.

EXERCICE 3 Rugby – 15 min – 4 points

Un joueur de rugby doit réussir une pénalité, c'est à dire envoyer le ballon au-dessus d'une barre située entre deux poteaux de buts, situés sur la ligne de but.
Cette barre est située à 3 mètres du sol et le joueur se trouve au milieu du terrain, à 5 mètres en face des poteaux.
La trajectoire du ballon est modélisée par la courbe d'une fonction f qui, dans le repère (O, I, J) est définie par :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{10}$$

- L'origine du repère est l'endroit où se trouve le joueur (départ de la trajectoire).
- x désigne la distance au sol entre le ballon et son point de départ.
- $f(x)$ désigne l'altitude du ballon en fonction de x.



Avec cette modélisation :

1. À quelle distance du joueur le ballon retombera-t-il ?
2. Quelle sera la hauteur maximale atteinte par le ballon ?
3. La pénalité sera-t-elle réussie ?

Toutes les réponses seront justifiées par le calcul.

EXERCICE 4 Oubli regrettable – 5 min – 1 point

Esther, pressée de sortir du cours de maths, n'a pas fini de recopier l'équation à résoudre pour le prochain cours :

$$-2x^2 + 4x + c = 0$$

(Il lui manque la valeur de c...)

Effondrée de ne pouvoir faire son travail, elle se souvient que le professeur avait annoncé que cette équation avait une unique solution...

$\rightarrow$ Déterminer la valeur de c.

EXERCICE 5 — Contrôle technique – 10 min – 3 points

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$x \leq \frac{3}{x-2}$$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$$

EXERCICE 6 — Optimisation – 15 min – 3 points

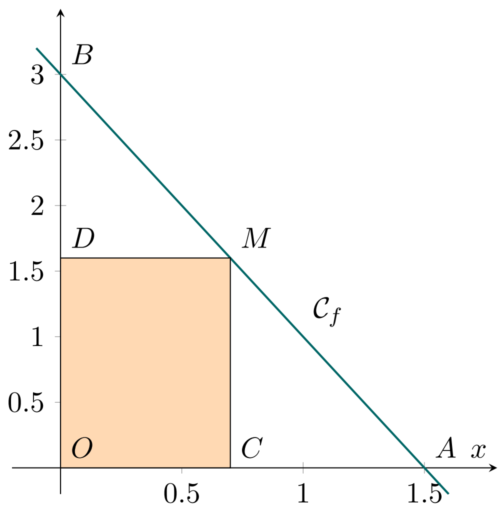
Dans cet exercice, toute trace de réflexion sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère :

- La droite représentative d'une fonction f dans un repère du plan passant par $A\left(\frac{3}{2}\,;\,0\right)$ et $B(0\,;\,3)$.
- M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.
- C le point de l'axe des abscisses d'abscisse x.
- D le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $f(x)$.

1. Déterminer x pour que l'aire du rectangle $OCMD$ soit maximale.
2. Est-il possible que l'aire du rectangle $OCMD$ soit égale à la moitié de l'aire du triangle OAB ?

$\rightarrow$ *On pourra chercher à déterminer l'expression de* $f(x)$....



Exercice 1 — 7 points

1. Rappeler les formules générales de résolution de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $x^2 - x + 6 = 0$.
   b) $3x^2 - 15 = 0$.
   c) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.
   d) $\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$.

Exercice 2 — 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

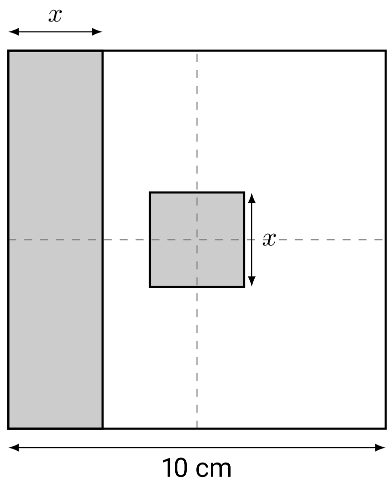
$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Mettre f sous forme canonique.
3. En déduire :
   a) l'axe de symétrie et le sommet de $\mathcal{P}$.
   b) le tableau de variation de f.
   c) la résolution de l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$.

Exercice 3 — 4 points

Dans un carré de 10 cm de côté, on a colorié une bande de largeur x cm et un petit carré de côté x placé au centre du carré (voir figure).



Déterminer pour quelles valeurs de x l'aire de la partie colorée est égale à la partie blanche.

Exercice 4 **3 points**

Un peu de logique...

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).
Soit Δ le discriminant de ce trinôme.

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez (on pourra utiliser des arguments calculatoires ou des représentations graphiques).

1. "Si, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c < 0$ alors $\Delta < 0$".
2. "Si a et c sont de signes opposés alors $ax^2 + bx + c$ a toujours des racines".

Exercice 1 (5 points)

Soit f et g les fonctions respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2+8x-5$ et $g(x) = 6x^2+13x-8$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs représentations graphiques dans un même repère.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
3. Interpréter graphiquement les réponses des deux questions précédentes.

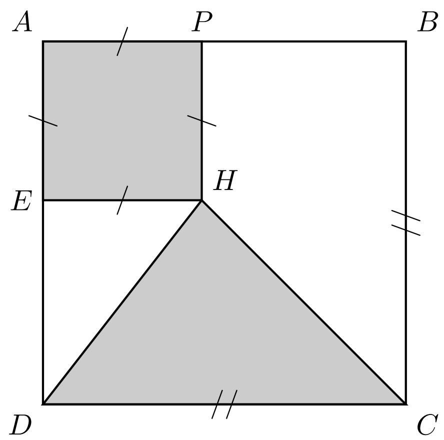
Exercice 2 (2 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 7x^2 + bx + 2$.

Déterminer les valeurs de b pour lesquelles g n'admet pas de racine.

Exercice 3 (5 points)

Soit $ABCD$ un carré de côté 8 cm. On place les points P et E respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AD]$. On pose $AP = AE = x$.



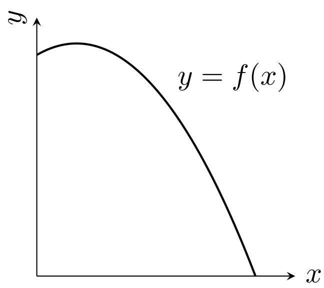
1. Sur quel intervalle peut-on définir x ?
2. Montrer que l'aire de la surface grise vaut $x^2 - 4x + 32$.
3. Où doit-on placer le point P pour que la surface grise occupe 75 % de la surface du carré $ABCD$?
4. Est-il possible que l'aire de la surface grise soit inférieure ou égale au quart de l'aire du carré $ABCD$?

Exercice 4 (6 points)

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par un arc de parabole qui, dans le repère ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -0,2(x-11)(x+7).$$

$f(x)$ désigne ainsi la hauteur, en mètre, des pieds du plongeur assimilés à un point, par rapport au niveau de la mer en fonction de la distance horizontale x parcourue, exprimée en mètre. La situation est schématisée ci-contre.



1. a) Développer $f(x)$.
   b) Montrer que $f(x) = -0.2(x-2)^2 + 16,2$.
2. En utilisant la forme la plus appropriée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :
   a) Calculer $f(2)$.
   b) Calculer $f(0)$.
   c) Résoudre dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   d) Montrer que : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, f(x) \leq 16,2$.
3. En déduire les réponses aux questions suivantes :
   a) Quelle est la hauteur de la falaise par rapport au niveau de l'eau ?
   b) À quelle distance de la falaise les pieds du plongeur rentrent-ils dans l'eau ?
   c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par les pieds du plongeur pendant son plongeon ?

Exercice 5 (2 points)

On sait que le polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + 15x + c$ admet deux racines : $\dfrac{4}{3}$ et $-\dfrac{1}{2}$.

Déterminer les deux réels a et c.