Dérivation et application – Fiche de cours

1. Dérivées usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x)=k, k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

2. Opérations des dérivées

$f(x)=a\cdot u+b\cdot v$	$f'(x)=a\cdot u'+b\cdot v'$
$f(x)=u\cdot v$	$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$f(x)=g(ax+b)$	$f'(x)=a'\cdot g'(ax+b)$

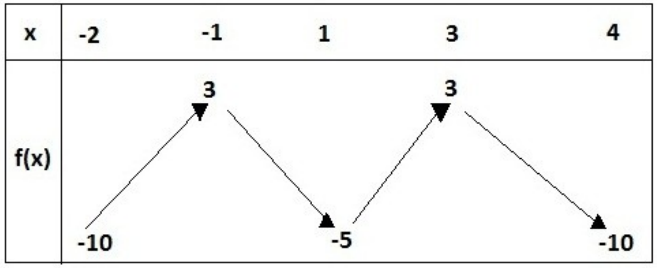
3. Sens de variation

L'étude du signe du nombre dérivé permet de connaître les variations d'une fonction :

- Si f'>0 sur I ⇔ f est croissante sur I
- Si f'=0 sur I ⇔ f est constante sur I
- Si f'<0 sur I ⇔ f est décroissante sur I

4. Tableau de variation, extremum

On peut résumer les variations d'une fonction dans un tableau pour étudier la présence de maximum / minimum (extremum) :



Dérivation et application – Exercices – Devoirs

Exercice 1

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^5 + 3x$ b) $g(x) = 3x^8 + \dfrac{1}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ d) $k(x) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^2+3}{4x+1}$.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

(préciser les valeurs exactes des éventuels minimums et maximums).

Exercice 3

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3, 4]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

1. (a) Déterminer f', la fonction dérivée de f.

   (b) Établir le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
3. Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

Exercice 4

Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'ensemble indiqué

1. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x-5}{x+2}$ sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.
3. $f(x) = \dfrac{5}{x^2-1}$ sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)$ au point demandé

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ en $x = 1$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$ en $x = -1$.
3. $f(x) = \sqrt{2x-5}$ en $x = 4$.
4. $f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 6

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes

$f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+5}$ $g(x) = \dfrac{x-6}{2-3x}$

Exercice 7

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2}$

3) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \times (x^2 - 2)$

4) $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times (x + 4)$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$

6) $f(x) = \dfrac{-3}{2x - 1}$

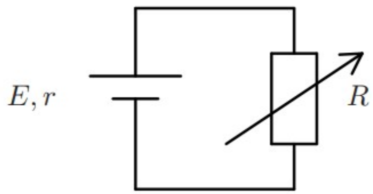
7) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

8) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$

9) $f(x) = (-5x^2 + 1)^2$

Exercice 8

On considère un générateur de tension continue de force électromotrice $E = 3\ Volts$ et de résistance interne $r = 0,5\ Ohms$ alimentant un résistor de résistance variable R.



La puissance dissipée dans le résistor est donnée par la formule $P = \dfrac{E^2 R}{(R + r)^2}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : R \mapsto P$ pour $R \in [0; 6]$.
2. Déterminer la puissance maximale.

Exercice 9

1. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x} + 1$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$.
4. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3}$.
   Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
5. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$.
   (a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle dérivable ?
   (b) Calculer $f'(x)$.
6. On considère la fonction $f(x) = 2x^2 + 1$.
   Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $x_0 = -1$.

Exercice 10

1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1$.
3. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ au point d'abscisse 3 ?
4. Sur quel intervalle la fonction $f(x) = \sqrt{x - 2}$ est-elle dérivable ?

5. Sur quels intervalles la fonction $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ est-elle dérivable ?

6. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

7. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

8. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (3x-2)^4$.

9. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(3x-2)^4}$.

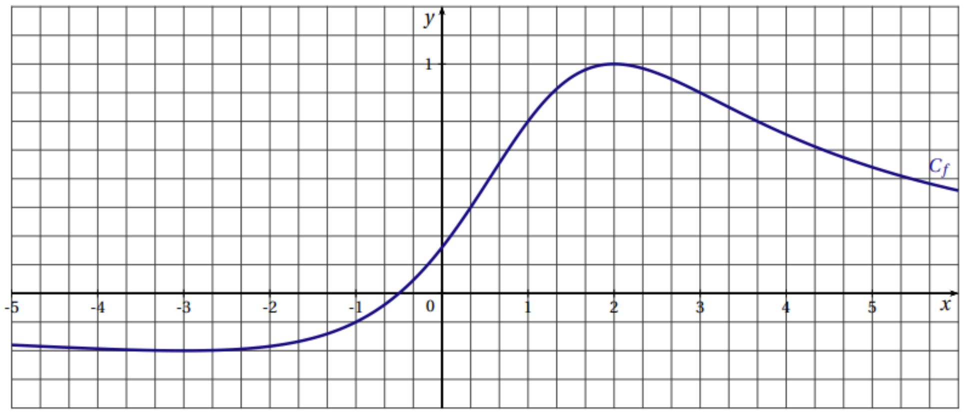
Exercice 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Calculer la dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+12}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f. (*Indiquer dans le tableau de variation, les valeurs exactes des extremum*).

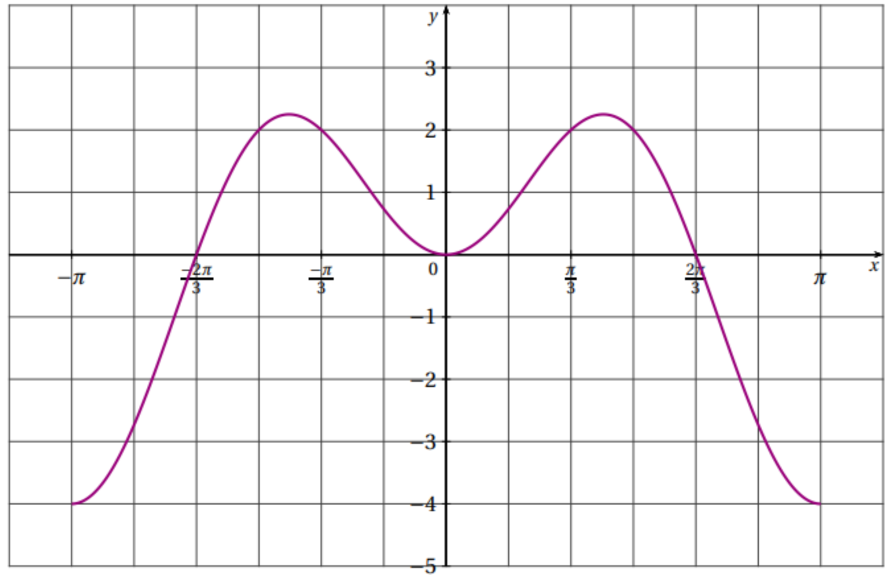
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer la tangente T dans le repère ci-dessous.



Exercice 12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = 2\sin x - \sin(2x)$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
   c) On donne ci-dessous, la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
   À l'aide du graphique, déterminer le signe de $f'(x)$.



2. Donner le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de la fonction f au point d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Tracer la droite T dans le repère précédent.

4. Tracer avec soin, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ dans le repère précédent.