
I	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	3
I.1	Définition et caractérisations des isométries vectorielles d'un espace euclidien	3
I.2	Groupe orthogonal	5
II	Matrices orthogonales	7
II.1	Définition et caractérisations des matrices orthogonales	7
II.2	Groupe orthogonale d'ordre n et groupe spécial orthogonal d'ordre n	9
II.3	Orientation	11
III	Espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3	12
III.1	Produits mixtes et produits vectoriels	12
IV	Isométries vectorielles d'un plan euclidien	15
IV.1	Classification des matrices de $O_2(\mathbb{R})$	15
IV.2	Classification des isométries d'un plan vectoriel	16
IV.3	Notion d'angle entre deux vecteurs non nuls	18
V	Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3	19
VI	Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	23
VI.1	Définition et lien avec les matrices symétriques	23
VI.2	Théorème spectral	25

Extrait du programme

Cette section vise les objectifs suivants :

- étudier les isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux et trois en insistant sur les représentations géométriques ;
- approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. Groupe orthogonal.	Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Notation $O(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$. Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation. Bases orthonormées directes.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.
c) Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée directe : produit mixte. Produit vectoriel. Calcul dans une base orthonormée directe. Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien orienté de dimension 3.	Notations $[u, v]$, $[u, v, w]$. Interprétation géométrique comme aire ou volume.
d) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
e) Isométries d'un espace euclidien de dimension 3	
Description des matrices de $SO_3(\mathbb{R})$. Rotation vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 3.	Axe et mesure de l'angle d'une rotation.
f) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Notation $\mathcal{S}(E)$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ». La démonstration n'est pas exigible. Forme matricielle du théorème spectral. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Dans tout le chapitre, les scalaires sont des **réels**.

I. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

I.1. Définition et caractérisations des isométries vectorielles d'un espace euclidien



Définition 14.1

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\| \cdot \|$ la norme associée.

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** lorsqu'il conserve la norme : c'est-à-dire,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

💡 Exemple 14.1

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un isométrie.

$$(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$$

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|f(x, y, z)\|_2 = \|(y, z, x)\|_2 = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2} = \|(x, y, z)\|_2.$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On considère s_F la symétrie orthogonale par rapport à F et p_F la projection orthogonale sur F .

Soit $x \in E$. On a $s_F(x) = 2p_F(x) - x = p_F(x) + p_F(x) - x$.

Or, $p_F(x) \in F$ et $p_F(x) - x \in F^\perp$.

Par le théorème de Pythagore,

$$\|s_F(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - x\|^2.$$

De plus, $x = p_F(x) + x - p_F(x)$. Donc, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Comme $\|x - p_F(x)\| = \|p_F(x) - x\|$, on a $\|s_F(x)\|^2 = \|x\|^2$.

Comme une norme est positive, $\|s_F(x)\| = \|x\|$.

En particulier, une réflexion (=symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) est une isométrie.

Théorème 14.1

Une isométrie vectorielle est un automorphisme.

Démonstration

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\| \cdot \|$ la norme associée et f une isométrie.

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|f(x)\| = \|0_E\| = 0$. D'où, $x = 0_E$.

Donc, $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. On en déduit que f est injective.

Or, f est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie. Donc, par théorème f est un automorphisme de E . $\square$

Théorème 14.2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien (on note n la dimension de E), $\| \cdot \|$ la norme associée et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une isométrie vectorielle ;
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$;
3. $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (une isométrie vectorielle conserve le produit scalaire) ;
4. Pour toute base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .
5. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Démonstration

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est la définition d'isométrie vectorielle.

On montre la chaîne d'implication (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2).

► (2) $\Rightarrow$ (3). Soit $(x, y) \in E^2$. Par identité de polarisation, on a : $\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{4} (\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2) = \frac{1}{4} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2)$.

Donc, d'après (2), $\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \langle x, y \rangle$.

► (3) $\Rightarrow$ (4) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Donc, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est orthonormée. C'est alors une famille libre de E composée de $n = \dim E$ vecteurs. Donc, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E .

► (4) $\Rightarrow$ (5) Clair.

► (5) $\Rightarrow$ (2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une base orthonormée de E .

Soit $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n \in E$.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E , donc $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

De plus, par linéarité de f , $f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_n \cdot f(e_n)$.

Or, la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E , donc $\|f(x)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Ainsi, $\|f(x)\| = \|x\|$. Ceci est vrai pour tout $x \in E$, donc f est une isométrie vectorielle. $\square$

Théorème 14.3

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{O}(E)$.

Si F est stable par f , alors $F^\perp$ est stable par f .

Démonstration

► On commence par montrer que $f(F) = F$.

On sait que $f(F) \subset F$ car F est stable par f .

De plus, f est un automorphisme, donc $\dim(f(F)) = \dim(F)$.

Donc, $f(F) = F$.

► Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $f(x) \in F^\perp$.

Soit $a \in F$. Comme $f(F) = F$, il existe $b \in F$ tel que $a = f(b)$.

Or, f est une isométrie, donc $\langle f(x), a \rangle = \langle f(x), f(b) \rangle = \langle x, b \rangle$.

Comme $x \in F^\perp$ et $b \in F$, on a $\langle x, b \rangle = 0$.

Donc, $\langle f(x), a \rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $a \in F$, donc $f(x) \in F^\perp$.
Ceci est vrai pour tout $x \in F^\perp$, donc $f(F^\perp) \subset F^\perp : F^\perp$ est stable par f .

□

I.2. Groupe orthogonal



Définition 14.2 – Groupe orthogonal

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. L'ensemble des isométries de E est noté $O(E)$.

Théorème 14.4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- Pour tout $(f, g) \in O(E) \times O(E)$, on a : $f \circ g \in O(E)$.
- Pour tout $f \in O(E)$, on a : $f^{-1} \in O(E)$.

Démonstration

► Soit $(f, g) \in O(E) \times O(E)$. Par définition d'isométrie, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|.$$

Donc, $f \circ g$ est une isométrie vectorielle de E .

► Soit $f \in O(E)$.

Soit $y \in E$. On sait que $f \in O(E)$ est une bijection, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Or, f est une isométrie, donc $\|f(x)\| = \|x\|$.

De plus, $x = f^{-1}(y)$, donc $\|y\| = \|f^{-1}(y)\|$.

Donc f^{-1} est une isométrie vectorielle de E .

□



Exercice 14.1

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E = F \oplus G$ et on note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Montrer que $s \in O(E)$ si, et seulement si, $F \perp G$.

Résolution

($\Leftarrow$). On suppose que $F \perp G$.

Dans ce cas, $G = F^\perp$ et s est la symétrie orthogonale par rapport à F .

On sait alors que s est une isométrie de E .

($\Rightarrow$). On suppose que $s \in O(E)$.

Soit $(a, b) \in F \times G$. On a $s(a) = a$ et $s(b) = -b$.

On a alors : $\langle s(a), s(b) \rangle = \langle a, -b \rangle = -\langle a, b \rangle$.

De plus, comme s est une isométrie : $\langle s(a), s(b) \rangle = \langle a, b \rangle$.

Donc, $\langle a, b \rangle = -\langle a, b \rangle$, puis $\langle a, b \rangle = 0$.

Ainsi, $F \perp G$.



Exercice 14.2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in O(E)$.

Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f , alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Résolution

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f .

Il existe $x \in E$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

En particulier, x est non nul et quitte à le normaliser, on peut le supposer unitaire.

De plus, on a $f(x) = \lambda.x$.

D'où, par homogénéité de la norme, $\|f(x)\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Or, $f \in O(E)$, donc $\|f(x)\| = \|x\|$.

Comme x est unitaire, on a : $\|x\| = 1$.

Donc, $|\lambda| = 1$.

II. Matrices orthogonales

II.1. Définition et caractérisations des matrices orthogonales



Définition 14.3 – Matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est **orthogonale** lorsque $M^\top \times M = I_n$.



Exemple 14.2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Son inverse est $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^\top = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)$.



Exercice 14.3

Soit $M \in O(n)$.

Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, 1\}$.

Résolution

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$.

On sait qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $M \times X = \lambda \cdot X$. D'où, $(M \times X)^\top = \lambda \cdot X^\top$.

Donc, $(M \times X)^\top \times (M \times X) = \lambda^2 \times X^\top \times X$.

D'autre part, $(M \times X)^\top \times (M \times X) = X^\top \times M^\top \times M \times X = X^\top \times X$.

Donc, $X^\top \times X = \lambda^2 \times X^\top \times X$.

Or, $X^\top \times X$ est égal à la somme des carrés des coefficients de X qui est non nulle car X est non nul et à coefficients réels.

Donc, $\lambda^2 = 1$. Donc, $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Ainsi, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, 1\}$.



Théorème 14.5 – Caractérisation des matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est orthogonale ;
2. $M^\top \times M = I_n$;
3. $M \times M^\top = I_n$;
4. M est inversible et $M^{-1} = M^\top$;
5. les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
6. les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Démonstration

Dans la démonstration, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à leurs matrices colonnes dans la base canonique.

► Les équivalences (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) sont une conséquence du cours sur les matrices.

► L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est la définition de matrice orthogonale.

► Montrons que (2) $\Leftrightarrow$ (5).

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M .

$$\text{On a : } M^T \times M = \begin{pmatrix} C_1^T \times C_1 & \dots & C_1^T \times C_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^T \times C_1 & \dots & C_n^T \times C_n \end{pmatrix}.$$

Donc, $M^T \times M = I_n$ si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $C_i^T \times C_j = \delta_{i,j}$.

D'où, $M^T \times M = I_n$ si, et seulement si, les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Or, une famille orthonormée de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (car famille libre composée de $\dim(\mathbb{R}^n)$ vecteurs).

Ainsi, $M^T \times M = I_n$ si, et seulement si, les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

► Montrons que (3) $\Leftrightarrow$ (6).

On note $L_1, \dots, L_n$ les colonnes de M .

$$\text{On a : } M \times M^T = \begin{pmatrix} L_1 \times L_1^T & \dots & L_1 \times L_n^T \\ \vdots & & \vdots \\ L_n \times L_1^T & \dots & L_n \times L_n^T \end{pmatrix}.$$

Donc, $M \times M^T = I_n$ si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $L_i \times L_j^T = \delta_{i,j}$.

D'où, $M \times M^T = I_n$ si, et seulement si, les lignes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Or, une famille orthonormée de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (car famille libre composée de $\dim(\mathbb{R}^n)$ vecteurs).

Ainsi, $M \times M^T = I_n$ si, et seulement si, les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. □

Remarque 14.1

On remarque que le calcul de l'inverse d'une **matrice orthogonale** est très simple. Il suffit de transposer.

Théorème 14.6 – Caractérisation matricielle des isométries vectorielles

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est isométrie vectorielle ;
2. Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E , la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.
3. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.

Démonstration

On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

► Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

Soit f une isométrie vectorielle. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

En notant X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a $\langle f(x), f(y) \rangle = (M \times X)^T \times M \times Y = X^T \times M^T \times M \times Y$ et $\langle x, y \rangle = X^T \times Y$.

Donc, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $X^T \times M^T \times M \times Y = X^T \times Y$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On note E_i le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1.

Alors, $E_i^T \times M^T \times M \times E_j$ est le coefficient ligne i colonne j de la matrice $M^T \times M$. Or, $E_i^T \times E_j = \delta_{i,j}$.

Donc, $M^T \times M = I_n$. Donc, M est orthogonale.

► L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est claire.

► Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1).

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.

Comme dans le premier point, pour tout $(x, y) \in E \times E$, en notant X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$, on a $\langle f(x), f(y) \rangle = (M \times X)^T \times M \times Y = X^T \times M^T \times M \times Y$ et $\langle x, y \rangle = X^T \times Y$.

Or, M est orthogonale, donc $M^T \times M = I_n$.

Donc, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Ainsi, f est une isométrie vectorielle. □

Remarque 14.2

Une isométrie vectorielle est aussi appelée un automorphisme orthogonal.

Théorème 14.7

Une matrice M est orthogonale si, et seulement si, M est la matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien.

Démonstration

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Rightarrow$) On suppose que M est orthogonale.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

On sait que M est orthogonale, donc f est une isométrie vectorielle, donc f transforme la base orthonormée $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ est la matrice de passage entre les deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $f(\mathcal{B})$ de $\mathbb{R}^n$.

($\Leftarrow$) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On suppose que M est la matrice de passage entre $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases orthonormées de E .

Alors M est la matrice de l'application linéaire f définie pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = e'_i$.

L'application f transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E , donc est une isométrie vectorielle.

Donc, M est orthogonale. □

Remarque 14.3 – Changement de bases orthonormées

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On considère deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E . Alors, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale et :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^\top \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P.$$

II.2. Groupe orthogonale d'ordre n et groupe spécial orthogonal d'ordre n

Définition 14.4 – Groupe orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé **groupe orthogonal** et est noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Théorème 14.8

► Pour tout $(M, N) \in O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$, on a $M \times N \in O_n(\mathbb{R})$.

► Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

► Soit $(M, N) \in O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$.

On a : $({}^\top M \times N) \times M \times N = N^\top \times M^\top \times M \times N = N^\top \times I_n \times N = I_n$.

Donc, $M \times N \in O_n(\mathbb{R})$. □

► Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M . Par définition, $f \in O(\mathbb{R}^n)$.

Or, on sait que $f^{-1} \in O(\mathbb{R}^n)$ et f^{-1} est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M^{-1} .

Donc, $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 14.1

Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. On sait que $M^\top \times M = I_n$.

Or, $\det(M^\top \times M) = \det(M^\top) \times \det(M) = (\det(M))^2$ (une matrice et sa transposée ont le même déterminant).

De plus, $M^\top \times M = I_n$.

Donc, $\det(M^\top \times M) = \det(I_n) = 1$.

D'où, $(\det(M))^2 = 1$.

Donc, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Corollaire 14.1

Pour tout $f \in O(E)$, on a $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration

Soit $f \in O(E)$. On note $\mathcal{B}$ une base de E .

On sait que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale.

Donc, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Donc, $\det(f) \in \{-1, 1\}$. □

Remarque 14.4 – Prudence!

La réciproque est fausse : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1 mais n'est pas orthogonale (la seconde colonne n'est pas unitaire).



Définition 14.5 – Groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 est appelé **groupe spécial orthogonal** et est noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

Remarque 14.5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

► L'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ est parfois noté $O^+(n)$.

► L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace euclidien E de déterminant 1 est parfois noté $O^+(E)$.

► On note parfois $O^-(n) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\}$ et $O^-(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = -1\}$.

Théorème 14.9

► Pour tout $(M, N) \in SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$, on a $M \times N \in SO_n(\mathbb{R})$.

► Pour tout $M \in SO_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

► Soit $(M, N) \in SO_n(\mathbb{R}) \times SO_n(\mathbb{R})$. On sait que $M \times N \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, $\det(M \times N) = \det(M) \times \det(N) = 1$.

Donc, $M \times N \in SO_n(\mathbb{R})$.

► Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$. On sait que $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, M est inversible et on a $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = 1$.

Donc, $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$. □

II.3. Orientation



Définition 14.6 – Orientation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

On appelle **orientation de E** le choix d'une base orthonormée.

Remarque 14.6

On sait que la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est orthogonale, et est donc de déterminant 1 ou -1 . On obtient alors la définition suivante.



Définition 14.7 – Base orthonormée directe, base orthonormée indirecte

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E .

- ▶ On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont **la même orientation** lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
- ▶ On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont **des orientations opposées** lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$.
- ▶ Lorsque E est orienté à l'aide d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, on dit que les bases orthonormées de même orientation que $\mathcal{B}$ sont **directes** et on dit que les autres bases orthonormées sont **indirectes**.

Remarque 14.7

- ▶ Avec les notations précédentes, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E , alors une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E est directe si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à $SO_n(\mathbb{R})$.
Autrement dit, les matrices de passages entre bases orthonormées directes sont exactement les matrices orthogonales de déterminant 1.
- ▶ Échanger deux vecteurs dans une base orthonormée change son orientation.
- ▶ Changer un vecteur en son opposé dans une base orthonormée change son orientation.

Exemple 14.3

On oriente $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, par la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- ▶ Les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont directes.
- ▶ Les bases $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ et $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ sont indirectes.

III. Espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

III.1. Produits mixtes et produits vectoriels

Proposition 14.2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

Alors,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration

On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Comme les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées directes, on a $P \in SO_n(\mathbb{R})$.

Donc, $\det(P) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

De plus, par la formule de changement de bases, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)$.

Donc,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)) = \det(P \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)) = \det(P) \times \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n).$$

Le déterminant d'une famille de vecteurs d'un espace euclidien orienté ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On peut alors donner la définition suivante.

Définition 14.8 – Produit mixte

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$ et $u_1, \dots, u_n$ une famille de vecteurs de E .

Le **produit mixte** de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est le déterminant de cette famille dans n'importe quelle base orthonormée directe de E . On le note $[u_1, \dots, u_n]$.

Théorème 14.10

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension n .

- Échanger deux vecteurs dans un produit mixte change le signe du produit mixte.
- Le produit mixte de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est nul si, et seulement si, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée.
- Une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ est directe si, et seulement si, $[e_1, \dots, e_n] = 1$.

Démonstration

- Échanger deux colonnes d'un déterminant change son signe en son opposé.
 - Conséquence du propriété du déterminant (le déterminant d'une famille de vecteurs est non nul si, et seulement si, la famille est libre).
 - En notant $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E , on a $[e_1, \dots, e_n] = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n)$.
- Donc, par définition, la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ est directe si, et seulement si, $[e_1, \dots, e_n] = 1$. □

Remarque 14.8 – Interprétation géométrique

- On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. L'aire du parallélogramme formé sur u et v est $||[u, v]||$.
- On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Le volume du parallélépipède formé sur u, v et w est $||[u, v, w]||$.

**Proposition 14.3**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3. Pour tout $(u, v) \in E^2$, il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle w, x \rangle$$

Démonstration

Le déterminant est multilinéaire par rapport aux colonnes de sa variable, donc, en particulier, l'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E .

Donc, par le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien, il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $[u, v, x] = \langle w, x \rangle$. $\square$

**Définition 14.9 – Produit vectoriel**

Avec les notations de la proposition précédente, le vecteur w est appelé **produit vectoriel de u et v** et est noté $u \wedge v$. Il est l'unique vecteur vérifiant :

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle.$$

**Théorème 14.11 – Coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée directe**

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E . On considère $u = u_1.e_1 + u_2.e_2 + u_3.e_3$ et $v = v_1.e_1 + v_2.e_2 + v_3.e_3$ deux vecteurs de E .

Alors,

$$u \wedge v = (u_2 \times v_3 - u_3 \times v_2).e_1 + (u_3 \times v_1 - u_1 \times v_3).e_2 + (u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1).e_3.$$

Démonstration

La base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc $u \wedge v = \langle e_1, u \wedge v \rangle.e_1 + \langle e_2, u \wedge v \rangle.e_2 + \langle e_3, u \wedge v \rangle.e_3$.

Or, $\langle e_1, u \wedge v \rangle = [u, v, e_1] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, e_1)$. En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on a :

$$\langle e_1, u \wedge v \rangle = [u, v, e_1] = u_2 \times v_3 - u_3 \times v_2.$$

De même, $\langle e_2, u \wedge v \rangle = [u, v, e_2] = u_3 \times v_1 - u_1 \times v_3$ et $\langle e_3, u \wedge v \rangle = [u, v, e_3] = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1$. $\square$

Remarque 14.9

En particulier, dans $E = \mathbb{R}^3$ (on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à sa matrice dans la base canonique), on a : pour tout $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \times v_3 - u_3 \times v_2 \\ u_3 \times v_1 - u_1 \times v_3 \\ u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 14.4 – Propriétés du produit vectoriel**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. La famille (u, v) est libre si, et seulement si, $u \wedge v \neq 0_E$.
2. Les vecteurs u et v sont colinéaires si, et seulement si, $u \wedge v = 0_E$.
3. On a : $u \wedge v = -v \wedge u$;
4. Les applications $x \mapsto x \wedge u$ et $x \mapsto u \wedge x$ sont des endomorphismes de E .
5. Le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et v .
De plus, si u et v sont non colinéaires, alors $u \wedge v$ est un vecteur normal au plan $\text{Vect}(u, v)$.
6. On suppose que (u, v, w) une base orthonormée de E . La base (u, v, w) est directe si, et seulement si, $w = u \wedge v$.
Dans ce cas : $u \wedge v = w$, $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$.

7. Soit (u, v) une famille orthonormée de E . La famille $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E .
8. **Formule du double produit vectoriel.**
On a : $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle u, v \rangle \cdot w$.

Démonstration

- ($\Rightarrow$) Supposons la famille (u, v) libre. On la complète en (u, v, x) une base de E . Alors, $[u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle \neq 0$. Donc, $u \wedge v \neq 0_E$.
($\Leftarrow$) Par contraposée, supposons la famille (u, v) liée. Pour tout $x \in E$, on a : $[u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle = 0$. En particulier, avec $x = u \wedge v$, il vient $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = 0$. Donc $u \wedge v = 0_E$.
- Négation du premier point.
- Pour tout $x \in E$, par opérations sur les déterminants, on a : $\langle u \wedge v, x \rangle = [u, v, x] = -[v, u, x] = -\langle v \wedge u, x \rangle = \langle -v \wedge u, x \rangle$.
Par unicité du produit vectoriel, on a $u \wedge v = -v \wedge u$.
- Pour tout $x \in E$, $x \wedge u \in E$.
Soient $(x_1, x_2) \in E$ et $\lambda \in E$. Par multilinéarité du déterminant : pour tout $y \in E$,
$$\langle (\lambda x_1 + x_2) \wedge v, y \rangle = [\lambda x_1 + x_2, v, y] = \lambda [x_1, v, y] + [x_2, v, y] = \lambda \langle x_1 \wedge v, y \rangle + \langle x_2 \wedge v, y \rangle = \langle \lambda x_1 \wedge v + x_2 \wedge v, y \rangle$$

Par unicité du produit vectoriel, $(\lambda x_1 + x_2) \wedge v = \lambda x_1 \wedge v + x_2 \wedge v$.
Ainsi, $x \mapsto x \wedge u$ est une application linéaire de E dans E . C'est un endomorphisme.
Pour montrer que $x \mapsto u \wedge x$ est un endomorphisme de E il suffit d'utiliser le point précédent et la linéarité de $x \mapsto x \wedge u$.
- On a $\langle u \wedge v, u \rangle = [u, v, u] = 0$ (déterminant avec deux colonnes égales). De même, $\langle u \wedge v, v \rangle = [u, v, v] = 0$.
Donc, le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et v .
Si les vecteurs u et v sont non colinéaires, alors la famille (u, v) est libre et $\text{Vect}(u, v)$ est un plan vectoriel. Par bilinéarité du produit scalaire, tout vecteur de $x \in \text{Vect}(u, v)$ est orthogonal à $u \wedge v$. Donc, $u \wedge v \in (\text{Vect}(u, v))^\perp$.
- ($\Rightarrow$) On suppose que la base orthonormée (u, v, w) est directe de E .
On sait que $u = 1.u + 0.v + 0.w$ et $v = 0.u + 1.v + 0.w$, donc par la formule du produit vectoriel dans une base orthonormée directe, on a : $u \wedge v = 0.u + 0.v + 1.w = w$.
($\Leftarrow$) On suppose que $u \wedge v = w$.
Or, w est unitaire, donc $1 = \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w]$.
Pour montrer que $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$, on utilise la formule du produit vectoriel dans une base orthonormée directe.
- La famille (u, v) est orthonormée. On la complète en (u, v, w) une base orthonormée de E .
On sait que $[u, v, w] = 1$ ou $[u, v, w] = -1$. Quitte à poser $w' = -w$, on pose supposer que $[u, v, w] = 1$.
Donc, la famille (u, v, w) est une base orthonormée directe de E . Par le point précédent, $w = u \wedge v$.
- Utiliser la formule du produit vectoriel dans une base orthonormée. □

Remarque 14.10 – Interprétation géométrique

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

La norme du vecteur $u \wedge v$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v .



Définition 14.10 – Orientation d'une droite ou d'un plan dans le plan ou dans l'espace

- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3.

On oriente une droite D de E en choisissant une base orthonormée de D (autrement dit, en choisissant un vecteur u de norme 1 appartenant à D)

- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.

On oriente un plan P de E en choisissant a un vecteur unitaire et normal à P : une base orthonormée (u_1, u_2) de P est directe si (a, u_1, u_2) est une base orthonormée directe de E et est indirecte si (a, u_1, u_2) est une base orthonormée indirecte de E .

IV. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

IV.1. Classification des matrices de $O_2(\mathbb{R})$

Théorème 14.12

Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Plus précisément :

- Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle est de la forme $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle est de la forme $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

On sait que les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Donc, $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $a \times c + b \times d = 0$.

On en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ et que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ appartient au supplémentaire orthogonal de $\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

De plus, comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ est de dimension 1.

Or, le vecteur $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est non nul et appartient à $\left(\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right)^\perp$. Donc, $\left(\text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right)^\perp = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

D'où, $\det(M) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\lambda \times \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \lambda \times \cos(\theta) \end{pmatrix} = \lambda$.

Or, $M \in O_2(\mathbb{R})$, donc $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$. D'où $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Donc, $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Réciproquement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les matrices $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ appartiennent à $O_2(\mathbb{R})$. □

Théorème 14.13

- Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a : $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta') \times R(\theta) = R(\theta + \theta')$.

En particulier $(R(\theta))^{-1} = R(-\theta)$.

- Les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent : pour tout $(M, N) \in SO_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$, $M \times N = N \times M$.

Démonstration

- Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \times \cos(\theta') - \sin(\theta) \times \sin(\theta') & -\cos(\theta) \times \sin(\theta') - \cos(\theta) \times \sin(\theta') \\ \sin(\theta) \times \cos(\theta') + \cos(\theta) \times \sin(\theta') & -\sin(\theta) \times \sin(\theta') + \cos(\theta) \times \cos(\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix}.$$

Donc, $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$. De plus, $R(\theta + \theta') = R(\theta' + \theta) = R(\theta') \times R(\theta)$.

► Soit $(M, N) \in SO_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$. Il existe $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, tel que $M = R(\theta)$ et $N = R(\theta')$. Il suffit d'appliquer le point précédent. $\square$

IV.2. Classification des isométrie d'un plan vectoriel

Théorème 14.14 – Classification des isométries d'un plan vectoriel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien orienté de dimension 2 et $f \in O(E)$.

► **Cas 1** : $\det(f) = 1$. On dit alors que f est une **rotation** de E .

Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le réel θ est unique à 2π près et est appelé **mesure de l'angle** de la rotation f .

► **Cas 2** : $\det(f) = -1$.

Dans ce cas, f est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ (c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)^\perp$).

Démonstration

► Montrons le premier point. On suppose que $\det(f) = 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E . On sait que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale de déterminant 1, donc $M \in SO_2(\mathbb{R})$.

Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R(\theta)$.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée directe de E et M' la matrice de f dans cette base.

Par la formule de changement de base, on a $M' = P^{-1} \times M \times P$.

Comme les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient à $O_2(\mathbb{R})$. De plus, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation, donc $P \in SO_2(\mathbb{R})$.

Or, les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent, donc $M' = P^{-1} \times P \times M = M$.

► Montrons le second point.

- On suppose que $\det(f) = -1$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E . On sait que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale de déterminant -1 , donc $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$.

Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- On a $M^2 = I_2$, donc $f \circ f = \text{Id}_E$. Donc, f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

On remarque que $\chi_f = \begin{vmatrix} X - \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X + \cos(\theta) \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

On remarque que χ_f est scindé à racines simples, donc, f est diagonalisable, $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$ et les valeurs propres de f sont simples.

Donc, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont des droites vectorielles supplémentaires dans E .

Montrons que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Soit $(a, b) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$. Comme f est une isométrie, f préserve le produit scalaire :

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle = \langle a, -b \rangle = -\langle a, b \rangle.$$

Donc, $\langle a, b \rangle = 0$.

D'où, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Ainsi, f est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ (comme $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E , f est la réflexion par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$). $\square$



Définition 14.11 – Matrice de rotation

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de rotation** d'angle θ .

 Remarque 14.11

$SO_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices des rotations.

 Remarque 14.12 – Lien avec l'écriture complexe d'une rotation

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} r_\theta : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z \times e^{i\theta} \end{aligned}$$

est l'écriture complexe de la rotation du plan de centre O , le point d'affixe 0, et d'angle θ .

Autrement dit, si l'affixe d'un point M du plan est z , alors l'affixe de l'image de M par la rotation du plan de centre O et d'angle θ est $z \times e^{i\theta}$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ où a et b sont les parties réelle et imaginaire de z . On a :

$$r_\theta(z) = (a + ib) \times (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = (a \times \cos(\theta) - b \times \sin(\theta)) + (a \times \sin(\theta) + b \times \cos(\theta))i$$

On remarque que

$$R(\theta) \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times \cos(\theta) - b \times \sin(\theta) \\ a \times \sin(\theta) + b \times \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ceci n'est pas surprenant : en effet, considérons $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni du produit scalaire $\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(z_1) \times \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \times \operatorname{Im}(z_2)$, et considérons la base orthonormée directe $(1, i)$. Alors, r est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ et $\operatorname{Mat}_{(1,i)}(r_\theta) = R(\theta)$. D'où,

$$\operatorname{Mat}_{(1,i)}(r_\theta(z)) = R(\theta) \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$



Exercice 14.4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien orienté. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E .

On considère deux endomorphismes u et v de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature des endomorphismes u et v .



Proposition 14.5

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien orienté de dimension 2 et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

On note f la rotation d'angle de mesure θ et g la rotation d'angle de mesure θ' .

Alors f et g commutent et $f \circ g$ est la rotation d'angle de mesure $\theta + \theta'$.

Démonstration

Dans une base orthonormée directe de E , la matrice de f est $R(\theta)$ et la matrice de g est $R(\theta')$.

Or, $R(\theta) \in SO_2(\mathbb{R})$ et $R(\theta') \in SO_2(\mathbb{R})$. Donc, elles commutent et $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$.

Donc, f et g commutent et $f \circ g$ est la rotation d'angle de mesure $\theta + \theta'$. □



Exercice 14.5

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien orienté de dimension 2.

Montrer que toute rotation est la composée de deux réflexions.

Résolution

Soit f une rotation de E .

On considère r_1 une réflexion.

On sait que $f \circ r_1$ est une isométrie et de plus, $\det(f \circ r_1) = \det(f) \times \det(r_1) = -1$.

Donc, $r_2 = f \circ r_1$ est une réflexion.

Comme $r_1^2 = \text{id}_E$, on a $r_2 \circ r_1 = f \circ r_1^2 = f \circ \text{id}_E = f$.

Remarque : l'écriture précédente n'est pas unique. On a choisi pour r_1 n'importe quelle réflexion.

IV.3. Notion d'angle entre deux vecteurs non nuls **Théorème 14.15**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien orienté de dimension 2.

On considère u et v deux vecteurs de norme 1 de E .

Il existe un unique rotation f de E telle que $f(u) = v$.

Démonstration**Existence**

On complète les familles orthonormées (u) et (v) en (u, u') et (v, v') deux bases orthonormées directes de E .

On considère l'application $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(u) = v$ et $f(u') = v'$.

Comme (u, u') et (v, v') sont deux bases orthonormées de E , f est une isométrie vectorielles.

De plus, $\text{Mat}_{(u,v)}(f) = \text{Mat}_{(u,v)}(u', v')$ est la matrice de passage entre deux bases orthonormées directes.

Donc, $\text{Mat}_{(u,v)}(f) \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, puis, $\det(f) = 1$.

Donc, f est une rotation telle que $f(u) = v$.

Unicité

Soit g une rotation de E telle que $g(u) = v$.

L'inverse et la composée d'isométries sont des isométries, donc, $g^{-1} \circ f$ est une isométrie.

Comme f et g sont des rotations, $\det(g^{-1} \circ f) = \det(f) \det(g^{-1}) = \frac{\det(f)}{\det(g)} = 1$.

Donc, $g^{-1} \circ f$ est une rotation.

Or, $g^{-1} \circ f(u) = u$.

Donc, une mesure de l'angle de la rotation $g^{-1} \circ f$ est 0, autrement dit, $g^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

Donc, $g = f$, d'où l'unicité. □

**Définition 14.12 – Mesure de l'angle entre deux vecteurs**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un plan euclidien orienté de dimension 2.

On considère u et v deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^2$.

Une mesure de l'angle orienté entre les vecteurs u et v , notée $\widehat{(u, v)}$, est une mesure de l'angle de la rotation f

telle que $f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$.

 Remarque 14.13

On a $\widehat{(u, v)} \equiv -\widehat{(v, u)}[2\pi]$.

V. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3

Théorème 14.16 – Réduction des isométries d'un espace vectoriel de dimension 3

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in O(E)$ de déterminant 1. Dans ce cas, on dit que f est une **rotation**.

Alors, il existe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

De plus, le réel θ est unique à 2π près et pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ de premier vecteur e_1 on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Démonstration

► Comme E est de dimension 3, le polynôme caractéristique de f est de degré 3.

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, f possède au moins une valeur propre λ .

Soit $x \in E$ un vecteur propre de f . Alors, $\|f(x)\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Comme f conserve la norme, on a $\|x\| = |\lambda| \times \|x\|$

De plus, x est non nul, donc $|\lambda| = 1$. D'où, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

Si le polynôme caractéristique de f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\bar{\alpha}$.

► On sait que $\det(f) = 1$. On en déduit qu'on est dans un des cas suivants :

- 1 est valeur propre triple de f ;
- 1 est valeur propre simple de f et -1 est valeur propre double de f ;
- 1, α , $\bar{\alpha}$ sont valeurs propres simples de f .

Dans tous les cas, 1 est valeur propre de f . On note e_1 un vecteur propre unitaire de f pour la valeur propre 1.

On sait que $D = \text{Vect}(e_1)$ est une droite vectorielle stable par f , donc, par le théorème 14.3 page 4, $P = D^\perp$ est stable par f . De plus, comme E est de dimension 3 et D de dimension 1, on a : $\dim(P) = 2$.

On note $g = f_P$ l'endomorphisme de P induit par f . Comme f est une isométrie de E , g est une isométrie de P .

Soit (e_2, e_3) une base orthonormée de P .

Or, $E = \text{Vect}(e_1) \oplus (\text{Vect}(e_1))^\perp$.

Donc, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

avec $\text{Mat}_{(e_2, e_3)}(f_P) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Or, $f_P \in O(P)$, donc $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

De plus, $\det(f_P) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = 1$.

On oriente le plan P par le choix de e_1 vecteur unitaire et normal à P .

Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute base orthonormée directe (e_2, e_3) de P , $\text{Mat}_{(e_2, e_3)}(f_P) = R(\theta)$.

Ainsi, dans toutes bases orthonormées directes $\mathcal{B}$ de premier vecteur e_1 de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

□



Définition 14.13

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur non nul de E .

On appelle **rotation d'angle θ et d'axe dirigé par u** l'isométrie f dont la matrice dans une base orthonormée

directe commençant par $\frac{1}{\|u\|} \cdot u$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque 14.14

Dans la définition précédente, le choix de u oriente le plan $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ (l'orientation d'une base orthonormée du plan $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ dépend de u). Remplacer u en $-u$ changera l'angle de la rotation en $-\theta$.

Théorème 14.17 – Angle d'une rotation

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et f la rotation d'angle θ et d'axe D dirigé par le vecteur unitaire u .

On note a un vecteur unitaire de $D^\perp$. Alors,

$$\text{tr}(f) = 1 + 2 \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [u, a, f(a)].$$

De plus, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \cos(\theta) \cdot (x - \langle u, x \rangle \cdot u) + \sin(\theta) \cdot u \wedge x + \langle u, x \rangle \cdot u.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B}' = (u, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

► On a donc, $\text{Tr}(f) = 1 + 2 \cos(\theta)$.

► On décompose $a = 0 \cdot u + \alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \times \cos(\theta) - \beta \times \sin(\theta) \\ \alpha \times \sin(\theta) + \beta \times \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Donc,

$$[u, a, f(a)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \times \cos(\theta) - \beta \times \sin(\theta) \\ 0 & \beta & \alpha \times \sin(\theta) + \beta \times \cos(\theta) \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2) \times \sin(\theta) = \sin(\theta).$$

► Pour montrer la dernière égalité de la proposition, comme les applications f et $g : x \mapsto \cos(\theta) \cdot (x - \langle u, x \rangle \cdot u) + \sin(\theta) \cdot u \wedge x + \langle u, x \rangle \cdot u$ sont des endomorphismes de E , il suffit de la vérifier sur les vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{B} = (u, e_2, e_3)$.

On a :

- $f(u) = u$ et $g(u) = \cos(\theta) \cdot (u - \langle u, u \rangle \cdot u) + \sin(\theta) \cdot u \wedge u + \langle u, u \rangle \cdot u = u$ car $u \wedge u = 0_E$ et $\|u\| = 1$.
- $f(e_2) = \cos(\theta) \cdot e_2 + \sin(\theta) \cdot e_3$ et $g(e_2) = \cos(\theta) \cdot (e_2 - \langle u, e_2 \rangle \cdot u) + \sin(\theta) \cdot u \wedge e_2 + \langle u, e_2 \rangle \cdot u = \cos(\theta) \cdot e_2 + \sin(\theta) \cdot u \wedge e_2 = \cos(\theta) \cdot e_2 + \sin(\theta) \cdot e_3$.
- $f(e_3) = \cos(\theta) \cdot e_3 - \sin(\theta) \cdot e_2$ et $g(e_3) = \cos(\theta) \cdot (e_3 - \langle u, e_3 \rangle \cdot u) + \sin(\theta) \cdot u \wedge e_3 + \langle u, e_3 \rangle \cdot u = \cos(\theta) \cdot e_3 + \sin(\theta) \cdot u \wedge e_3 = \cos(\theta) \cdot e_3 - \sin(\theta) \cdot e_2$.

□

Remarque 14.15

Soit f la rotation d'angle θ et d'axe D dirigé par u un vecteur non nul.

Soit $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\|u\|} \cdot u, e_2, e_3 \right)$ une base orthonormée directe de E . La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout $x = x_1 \cdot \frac{1}{\|u\|} \cdot u + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \in E$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \times \cos(\theta) - x_3 \times \sin(\theta) \\ x_2 \times \sin(\theta) + x_3 \times \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$[u, x, f(x)] = \det_{\mathcal{B}}(u, x, f(x)) = \begin{vmatrix} \|u\| & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2 & x_2 \times \cos(\theta) - x_3 \times \sin(\theta) \\ 0 & x_3 & x_2 \times \sin(\theta) + x_3 \times \cos(\theta) \end{vmatrix} = \|u\| \times (x_2^2 + x_3^2) \times \sin(\theta).$$

Si x n'est pas colinéaire à u , alors $x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ et $\sin(\theta)$ est du signe de $[u, x, f(x)]$.

💡 Exemple 14.4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (orienté par la base canonique) canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

► Montrons que f est une rotation.

On a $A^T \times A = I_3$, donc $A \in O(3)$.

On en déduit que les colonnes C_1, C_2, C_3 de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

D'où, $C_1 \wedge C_2 = C_3$ ou $C_1 \wedge C_2 = -C_3$.

Or, $\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$. Donc, $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

D'où, la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée directe de E .

Donc, $\det(f) = \det(A) = 1$.

Ainsi, f est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

► Déterminons l'axe et l'angle de la rotation.

On sait que l'axe de la rotation est engendré par un vecteur propre de f pour la valeur propre 1.

On a $A - I_3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $(A - I_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc, l'axe de f est la droite engendrée par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le choix de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oriente la droite D .

On sait que l'angle θ de la rotation vérifie $1 + 2 \cos(\theta) = \text{Tr}(f) = 2$. Donc, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Il reste à déterminer $\sin(\theta)$.

Méthode 1 : avec le théorème 14.17 page 20

On note $u' = \frac{1}{\|u\|} \cdot u$ vecteur unitaire de D et on considère $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur unitaire appartenant à $D^\perp$.

On calcule $f(a)$: on a, $A \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc, on a : $\sin(\theta) = [u', a, f(a)] = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Méthode 2 : avec la remarque 14.15 page 20

En prenant le vecteur $x = (1, 0, 0)$, qui n'est pas colinéaire à u , $\sin(\theta)$ est du signe de $[u, x, f(x)]$.

On calcule $f(x)$: on a, $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Or, } [u, x, f(x)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Donc, $\theta \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Ainsi, f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et d'axe D dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

VI. Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

VI.1. Définition et lien avec les matrices symétriques



Définition 14.14 – Endomorphisme autoadjoint

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint (ou symétrique) lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

💡 Exemple 14.5

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^\top \times N)$.

L'endomorphisme $f : X \mapsto X^\top$ est autoadjoint. En effet, pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle f(M), N \rangle = \langle M^\top, N \rangle = \text{tr}(M \times N) = \text{tr}((M \times N)^\top) = \text{tr}(N^\top \times M^\top) = \text{tr}(M^\top \times N^\top) = \langle M, N^\top \rangle = \langle M, f(N) \rangle.$$



Proposition 14.6

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est clairement inclus dans l'ensemble des endomorphismes de E .

L'endomorphisme nul $\tilde{0}$ est autoadjoint : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle \tilde{0}(x), y \rangle = 0 = \langle x, \tilde{0}(y) \rangle$.

Soient f et g deux endomorphismes autoadjoints de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.

L'application $\lambda.f + g$ est un endomorphisme de E et,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle (\lambda.f + g)(x), y \rangle = \lambda \times \langle f(x), y \rangle + \langle g(x), y \rangle = \lambda \times \langle x, f(y) \rangle + \langle x, g(y) \rangle = \langle x, (\lambda.f + g)(y) \rangle.$$

Donc, $\lambda.f + g$ est un endomorphisme autoadjoint. □

🔊 Remarque 14.16 – Rappels

► On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique lorsque $M^\top = M$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n \times (n+1)}{2}$.

► On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsque $M^\top = -M$.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On sait que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n \times (n-1)}{2}$.



Théorème 14.18 – Lien avec les matrices symétriques

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E et f un endomorphisme de E .

On a l'équivalence : f est autoadjoint si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

Démonstration

Pour tout $(x, y) \in E$, on note X et Y les matrices colonnes de x et y dans la base $\mathcal{B}$. On pose également $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

On sait alors que les matrices de $f(x)$ et $f(y)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $M \times X$ et $M \times Y$.

De plus, comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\langle f(x), y \rangle = (M \times X)^\top \times Y = X^\top \times M^\top \times Y$ et $\langle x, f(y) \rangle = X^\top \times M \times Y$.

($\Rightarrow$) On suppose f symétrique.

Dans ce cas, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$, donc $X^\top \times M^\top \times Y = X^\top \times M \times Y$.

$$\text{On note } E_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i.$$

En particulierisant l'égalité précédente avec $x = e_i$ et $y = e_j$ les différents vecteurs de $\mathcal{B}$, on a : $E_i^\top \times M^\top \times E_j = E_i^\top \times M \times E_j$. Après calcul, on a $m_{i,j} = m_{j,i}$.

Donc, $M = M^\top$.

($\Leftarrow$) On suppose $M = M^\top$.

Dans ce cas, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $X^\top \times M^\top \times Y = X^\top \times M \times Y$, donc $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Donc f est symétrique □.

Remarque 14.17

Un endomorphisme autoadjoint est aussi appelé un endomorphisme symétrique.

Exemple 14.6

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

L'endomorphisme $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ est autoadjoint.

En effet sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 14.19

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p un projecteur de E .

On a l'équivalence : p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est un endomorphisme autoadjoint.

En notant P la matrice de p dans une base orthonormée de E .

On a l'équivalence : p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $P^\top = P$.

Démonstration

On montre la première équivalence (la deuxième est une conséquence du théorème précédente).

($\Rightarrow$) On suppose que p est un projecteur orthogonal.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle p(x), y - p(y) \rangle.$$

Or, $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^\perp$. Donc,

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle = \langle x, p(y) \rangle + \langle p(x) - x, p(y) \rangle.$$

Or, $p(y) \in F$ et $p(x) - x \in F^\perp$. Donc,

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle.$$

Donc, p est autoadjoint.

($\Leftarrow$) On suppose que p est autoadjoint.

Montrons que p est une projection orthogonale. Autrement dit que $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$.

Soit $y \in \text{Im}(p)$ et $a \in \text{Ker}(p)$. On a $y = p(x)$ où $x \in E$.

D'où,

$$\langle y, a \rangle = \langle p(x), a \rangle = \langle x, p(a) \rangle = \langle x, 0_E \rangle = 0.$$

Donc, $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$. Comme $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires, on a $\text{Ker}(p)^\perp = \text{Im}(p)$ et p est la projection orthogonale sur $\text{Im}(p)$. $\square$



Exercice 14.6

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et s une symétrie de E .

Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est un endomorphisme autoadjoint.

Résolution

A rédiger

VI.2. Théorème spectral



Théorème 14.20 – Théorème spectral [version endomorphisme]

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Plus précisément, si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f est un endomorphisme autoadjoint, alors il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Démonstration

Admis (Démonstration non exigible)

$\square$

Remarque 14.18

On dit qu'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien est diagonalisable en base orthonormée.



Théorème 14.21 – Théorème spectral [version matricielle]

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Plus précisément, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe D une matrice diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telles que : $D = P^\top \times A \times P$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

Comme A est symétrique et la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, f est autoadjoint.

Le théorème spectral appliqué à f montre qu'il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Par la formule de changement de base, il existe P inversible telle que $D = P^{-1} \times A \times P$.

De plus, P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et ces bases sont orthonormées.

Donc, P est une matrice orthogonale, puis $D = P^\top \times A \times P$

$\square$.

💡 Exemple 14.7

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

🔍 Remarque 14.19

L'intérêt d'utiliser une matrice de passage orthogonale est que son inverse est égal à sa transposée, ce qui simplifie les calculs !

🔍 Remarque 14.20 – Prudence !

Le théorème spectral ne s'applique aux matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$! La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique et son polynôme caractéristique est : $\chi_A = X^2$. Donc, 0 est la seule valeur propre de A , d'où A n'est pas diagonalisable (sinon A serait égale à la matrice nulle).

🏆 Exercice 14.7

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint. Montrer que les sous-espaces propres de E sont deux à deux orthogonaux.

Résolution

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

Soit $(x, y) \in E_\lambda(f) \times E_\mu(f)$.

Alors, $f(x) = \lambda \cdot x$ et $f(y) = \mu \cdot y$. D'où, $\langle f(x), y \rangle = \langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \times \langle x, y \rangle$ et $\langle x, f(y) \rangle = \mu \times \langle x, y \rangle$.

De plus, comme f est symétrique, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Donc, $(\lambda - \mu) \times \langle x, y \rangle = 0$.

Comme $\lambda \neq \mu$, on a : $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $(x, y) \in E_\lambda(f) \times E_\mu(f)$.

Ainsi, $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.

📖 Définition 14.15 – Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint.

On dit que f est autoadjoint **positif** lorsque,

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle \geq 0.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.

On dit que f est autoadjoint **défini positif** lorsque,

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \langle f(x), x \rangle > 0.$$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

🔗 Théorème 14.22 – Caractérisation spectrale

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint.

On a les équivalences :

- ▶ $f \in \mathcal{S}^+(E)$ si, et seulement si, les valeurs propres de f sont positives ou nulles.
- ▶ $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, les valeurs propres de f sont strictement positives.

Démonstration

On note n la dimension de E . Par le théorème spectral, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f . Pour tout $i \in [1, n]$, on note λ_i la valeur propre associée à e_i .

► ($\Rightarrow$) On suppose que $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

Soit $i \in [1, n]$. On a : $\langle f(e_i), e_i \rangle = \langle \lambda_i \cdot e_i, e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle$.

Comme la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$.

De plus, comme $f \in \mathcal{S}^+(E)$, $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i \geq 0$.

► ($\Leftarrow$) On suppose les valeurs propres de f positives ou nulles.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \in E$. Par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle f(x), x \rangle = \left\langle f \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right), \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle \lambda_i \cdot e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Or, la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, on a : $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, puis,

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

Donc, $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

► ($\Rightarrow$) On suppose que $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Soit $i \in [1, n]$. Comme ci-dessus, $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$.

De plus, comme $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $x_i \neq 0$ (car c'est un vecteur propre), $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i > 0$.

► ($\Leftarrow$) On suppose les valeurs propres de f strictement positives.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \in E \setminus \{0_E\}$. Comme ci-dessus, $\langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i x_i^2}_{\geq 0}$.

De plus, comme $x \neq 0_E$, un des x_i est non nul, donc, $\langle f(x), x \rangle > 0$.

Donc, $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$. □



Définition 14.16 – Matrice symétrique positive, définie positive

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est **positive** lorsque,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top M X \geq 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

On dit que M est **définie positive** lorsque,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.



Théorème 14.23

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme autoadjoint et $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E .

On a les équivalences :

- $f \in \mathcal{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration

On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n \in E$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Par symétrie du produit scalaire puis opération dans une base orthonormée,

$$\langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle = X^\top M X.$$

Les équivalences du théorème découlent alors de l'égalité précédente. $\square$

Théorème 14.24 – Caractérisation spectrale

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On a les équivalences :

- $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les valeurs propres de M sont positives ou nulles.
- $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les valeurs propres de M sont strictement positives.

Démonstration

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée pour ce produit scalaire).

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à M .

On déduit du théorème 14.18 page 23 que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

De plus, en appliquant successivement le théorème 14.23 page 27, puis le théorème 14.22 page 26 :

- $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $f \in \mathcal{S}^+(E)$, ce qui équivaut à dire que les valeurs propres de f sont positives ou nulles.
- $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, ce qui équivaut à dire que les valeurs propres de f sont strictement positives.

Or, f et M ont les mêmes valeurs propres, ce qui termine la démonstration. $\square$