Équations Différentielles

#TerminaleSpéMaths

« Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction. »

Pour les équations différentielles de type :	Les fonctions solutions dans $\mathbb{R}$ sont :
$(E) : y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)	$f(x) = Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$)
$(E) : y' = ay + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)	$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ($C \in \mathbb{R}$)

Pour trouver une solution particulière de $f(x) = Ce^{ax}$ avec un point de passage de la fonction $f(x_0) = y_0$

il suffit de résoudre l'équation : $y_0 = Ce^{ax_0}$ (ce qui nous donne la valeur de C).

Pour une équation différentielle de type :

$$(E) : y' = ay + f(x)$$

On peut la résoudre en 3 étapes :

soit donnée dans l'énoncé — soit on vous aide à la trouver 😊

1. Vérifier que $u(x)$ est une solution particulière de (E) :

$$u'(x) = au(x) + f(x)$$

2. Résoudre l'équation $y' = ay$.
Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont :

$$Ce^{ax} \text{ (avec } C \in \mathbb{R}\text{)}$$

3. Toutes les solutions de (E) sont :

$$S(x) = Ce^{ax} + u(x)$$

Exercice 1

Pour chaque question, entourer sur la feuille la bonne proposition :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Une solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction :
   a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$
   b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} - 1$
   c) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - 1$
2. La solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - y = 0$ s'écrit :
   a) $f(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$, où $k \in \mathbb{R}$
   b) $f(x) = ke^{-\frac{1}{4}x}$, où $k \in \mathbb{R}$
   c) $f(x) = ke^{4x}$, où $k \in \mathbb{R}$
3. La solution générale f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y - 1$ s'écrit :
   a) $f(x) = ke^{3x} + \frac{1}{3}$, où $k \in \mathbb{R}$
   b) $f(x) = ke^{3x} - \frac{1}{3}$, où $k \in \mathbb{R}$
   c) $f(x) = ke^{3x} + 3$, où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 2

On verse du café dans une tasse, la température initiale de l'ensemble étant de $80°C$. La température ambiante est notée M.

Pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minutes. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

On suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, l'évolution de la température θ suit la loi de refroidissement de Newton, modélisée par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$. Résoudre cette équation différentielle.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$.
   a) Résoudre l'équation différentielle (avec condition initiale) permettant de déterminer la température du café en fonction du temps :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - 10)$$

   b) Pour répondre à cette question on pourra utiliser la calculatrice.

      On admet que la température θ vérifie pour tout $t \geq 0 : \theta(t) = 70e^{-0.2t} + 10$. Une personne souhaite boire son café à la température de $40°C$. Combien de temps doit-elle attendre ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 9x + 19)e^{-x-5}$.

1. Montrer que la dérivée de f vérifie $f'(x) = -(x+2)(x+5)e^{-x-5}$.
2. Donner le nombre de valeurs annulant $f'(x)$.
3. Etablir le tableau de variations de f.

Exercice 1 :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 0{,}5te^{-0{,}5t}$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t > 0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}5y = 0{,}5e^{-0{,}5t}$$

1. (a) Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par $u(t) = ate^{-0{,}5t}$ soit une solution de l'équation (E).
   (b) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' + 0{,}5y = 0$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f définie à la partie A.
3. On donne le script en python ci-contre :

   a) Expliquer pourquoi il est certain que la fonction `med` renvoie une valeur en sortie.

   b) Quelle valeur la fonction `med` renvoie-t-elle ?

   c) L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question la fonction `med` permet-elle de répondre ?

```python
from math import exp
def f(t):
   return 0.5*t*exp(-0.5*t)
def med():
   n=3
   while f(n)>0.1:
     n=n+1
   return n
```

Exercice 2 : Compléter les éléments demandés, sans justifier les réponses.

1. Soit l'équation différentielle $(E_1) : y' + 2y = -8$.
   où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).	
b) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant la condition $f(1) = 4$.	
c) Donner graphiquement l'allure de la courbe représentative de f (préciser les équations des éventuelles asymptotes).	

2. On considère l'équation différentielle : $(E_2) \quad y' - y = 2\cos(x) + 4\sin(x)$
   où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

a) On cherche une solution particulière de (E_2) de la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer cette solution particulière y_p.	Système vérifié par a et b : $y_p(x) =$
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_2).	