

Feuille d'exercices 3

Nombres réels et fonctions réelles : première approche

Exercice 1 ●○○ — (In)équations d'ordre 1 avec valeurs absolues

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $|x + 9| = 4$. b. $|x + 4| = |x - 3|$. c. $|x + 2| + 2|x - 1| + 3|x + 1| = 27$.

2. Mêmes questions pour les inéquations suivantes :

- a. $|x - 3| > 2$.
 b. $|x + 4| \leq 5$.
 c. $|-3x + 1| > 5$.
 d. $|(x - 1)(x + 2)| > 10$.

Exercice 2 ●○○ — Des (in)égalités

Les questions qui semblent faciles sont piégées !

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$|x - 1| \leq \frac{x + 1}{2}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 4} = 3x + 4.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln(x)^2 \leq \ln x.$$

4. Etudier la fonction $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donner en particulier son minimum.

5. Après avoir étudié $f : x \mapsto \frac{x + 1}{x^2 + 3}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{6} \leq \frac{x + 1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Que vaut $f(\mathbb{R})$?

Exercice 3 ●○○ — Contrôler le produit

Montrer que le produit de deux nombres réels est inférieur ou égal, en valeur absolue, à la moyenne de leurs carrés.

Exercice 4 ●○○ — Formules pour le min et le max

Montrer les formules suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Exercice 5 ●●○ — Un principe des tiroirs

Soit $n \geq 2$ un entier et $(x_1, \dots, x_n)$ des réels tels que

$$0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1.$$

Montrer qu'il existe deux entiers i et j entre 1 et n distincts tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n-1}$.

Exercice 6 ●●○ — Ensembles de définitions et extrema

Trouver le plus grand ensemble de définition possible pour les fonctions suivantes :

1. a. $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 36}}{x^2 - 64}$ b. $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$ c. $x \mapsto \ln(|\sin x|)$

2. Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum de ces fonctions sur leur ensemble de définition.

Exercice 7 ●○○ — La racine symétrisée

Etudier la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

Exercice 8 ●○○ — Parabole à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - (m + 1)x + 4$. Esquisser le graphe de la fonction pour $m = 0$.

Pour quel(les) valeur(s) du réel y l'équation $y = f(x)$ admet-elle une unique solution ?

Exercice 9 ●●○ — Centres et axes de symétrie

- Soient a un réel. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
- Soient a et b deux réels. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède le point M de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie.
- La fonction $x \mapsto e^{-(x-4)^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, possède-t-elle un centre ou un axe de symétrie ? La tracer.

— Exercice 10 ●●○ — Une forme optimale

1. On souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volumé fixé avec un minimum de matériau. Quelles proportions choisir ?
2. Même question avec une casserole.

— Exercice 11 ●●○ — Définir une composée

Déterminer (s'ils existent) les ensembles de définition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, puis les expliciter.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \ln(x-5)$.
2. $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sqrt{-x + \frac{1}{2}}$.
3. $f(x) = -e^x - 2$ et $g(x) = \ln(x+1)$.

— Exercice 12 ●●○ — Trouver des bornes

Préciser les ensembles de définition des fonctions suivantes, puis dire si elles sont minorées, majorées, bornées, et si elles admettent un minimum ou un maximum global :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $x \mapsto \cos(x) \cos(2x)$.
3. $x \mapsto e^{-x} \cos x$, sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$? Décrire également ses variations.

— Exercice 13 ●○○ — Exemples de bijections

Les fonctions suivantes définissent-elles une bijection, sur un ensemble à préciser ? Si oui, donner leur fonction réciproque.

1. $x \mapsto 2x - 3$.
2. $x \mapsto 2 - \frac{1}{x-5}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.
3. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (commencer par préciser l'ensemble de définition).

— Exercice 14 ●●● — Des calculs explicites

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Etudier (parité, variations, limites) et tracer la fonction.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$ donné, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle bijective ?
4. Montrer que $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ réalise une bijection de $I = [-1, 1]$ sur $[-1, 1]$, et préciser la fonction réciproque.

— Exercice 15 ●●○ — Une réciproque et sa dérivée

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

1. a. Calculer f' .
b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et justifier que la fonction réciproque (qu'on ne cherchera pas à calculer) est dérivable.
2. Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
3. Calculer $f(\sqrt{2})$, puis en déduire $(f^{-1})'(\frac{4}{3}\sqrt{2})$.
4. Vous sentez-vous capable de trouver une expression générale pour f^{-1} ?

— Exercice 16 ●●○ — Décomposer avant de dériver

1. Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser leurs ensembles de définition, puis pour $n \in \mathbb{N}$, calculer leurs dérivées n^e .
2. En déduire la dérivées n^e de $h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur son ensemble de définition.

— Exercice 17 ●●● — Passer dans le complexe

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n^e de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^x$.

Question bonus : donner le tableau de variation de la fonction, et l'esquisser.