

Objectifs du chapitre :

- Déterminer les primitives des fonctions usuelles et des fonctions composées
- Calculer une intégrale définie et en donner l'interprétation graphique
- Connaître et appliquer les propriétés de l'intégrale (linéarité, Chasles, positivité)
- Calculer des aires entre courbes et l'axe des abscisses
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
- Maîtriser l'intégration par parties (IPP)
- Approcher une intégrale par les méthodes des rectangles et des trapèzes
- Appliquer le calcul intégral à des problèmes professionnels (signaux, inertie, volumes)

Situation professionnelle**Dimensionnement d'une installation électrique et calcul de section**

Un technicien en Fluides, Énergies, Domotique (FED) doit déterminer la **valeur efficace** d'un courant alternatif non sinusoïdal pour dimensionner un disjoncteur. Cette valeur efficace se calcule à l'aide d'une intégrale sur une période du signal.

Par ailleurs, un dessinateur-projeteur en charpente bois doit calculer le **centre d'inertie** d'une section en T pour vérifier la résistance d'une poutre. Ce calcul nécessite des intégrales de moments statiques.

Ces deux problèmes se résolvent grâce au **calcul intégral**.

1. Primitives

DÉFINITION — PRIMITIVE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

PROPRIÉTÉ — ENSEMBLE DES PRIMITIVES

Si F est une primitive de f sur I , alors **toutes les primitives** de f sont de la forme :

$$F(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

ATTENTION

Primitiver est l'opération « inverse » de dériver, mais elle n'est pas unique : on obtient toujours une **famille de fonctions** (à une constante près). Pour fixer la constante, il faut une condition initiale (par exemple $F(0) = 3$).

1.1 Primitives des fonctions de référence

Table des primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Domaine
k (constante)	kx	\mathbb{R}
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	selon n
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}

(+ constante C dans chaque cas)

1.2 Opérations algébriques sur les primitives

PROPRIÉTÉ — LINÉARITÉ DE LA PRIMITIVATION

Si F est une primitive de f et G une primitive de g , alors :

- Une primitive de $f + g$ est $F + G$
- Une primitive de λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) est λF

EXEMPLE

Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} + 2 \ln x = x^3 - \frac{5x^2}{2} + 2 \ln x.$$

1.3 Primitives de fonctions composées**PROPRIÉTÉ — PRIMITIVES COMPOSÉES FONDAMENTALES**

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Primitive	Condition
$u'(x) [u(x)]^n$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $	$u(x) \neq 0$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	

MÉTHODE — RECONNAÎTRE UNE PRIMITIVE COMPOSÉE

1. Identifier la « fonction intérieure » $u(x)$ et calculer $u'(x)$.
2. Vérifier que $u'(x)$ apparaît en facteur (éventuellement à un coefficient près).
3. Appliquer la formule correspondante.
4. Ajuster le coefficient si nécessaire.

EXEMPLE — TYPE $U^r U^N$

Trouver une primitive de $f(x) = 6x(x^2 + 1)^2$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 2x$.

On écrit $f(x) = 3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 = 3u'(x)[u(x)]^2$.

Une primitive est $3 \times \frac{(x^2 + 1)^3}{3} = (x^2 + 1)^3$.

EXEMPLE — TYPE U/U

Trouver une primitive de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$.

On pose $u(x) = x^2 + 4$, $u'(x) = 2x$. On reconnaît $\frac{u'}{u}$.

Une primitive est $\ln(x^2 + 4)$. (Pas de valeur absolue car $x^2 + 4 > 0$.)

EXEMPLE — TYPE $U E^U$

Trouver une primitive de $f(x) = 4x e^{2x^2}$.

On pose $u(x) = 2x^2$, $u'(x) = 4x$. On reconnaît $u' e^u$.

Une primitive est e^{2x^2} .

1.4 Primitives des fonctions trigonométriques composées

PROPRIÉTÉ

Pour $\omega \neq 0$ et φ réels :

- Une primitive de $\cos(\omega t + \varphi)$ est $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$
- Une primitive de $\sin(\omega t + \varphi)$ est $-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$

EXEMPLE

Trouver une primitive de $f(t) = 3 \cos(2t + \pi/4)$.

$$F(t) = 3 \times \frac{1}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right).$$

MINI-EXERCICE 1

Primitives directes et composées

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$ b) $g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

c) $h(x) = (2x + 1)^4$ d) $k(t) = 5 \sin(3t - \pi/6)$

2. Intégrale définie

DÉFINITION — INTÉGRALE DE A À B

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. L'intégrale de f de a à b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Formule fondamentale du calcul intégral

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ATTENTION

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : la constante C s'annule dans la différence $F(b) - F(a)$. La variable x est dite « muette » : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

EXEMPLE

Calculer $\int_1^3 (2x + 1) dx$.

Une primitive de $2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$.

$$\int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10.$$

EXEMPLE

Calculer $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Une primitive de e^{2x} est $\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19.$$

2.1 Interprétation graphique

PROPRIÉTÉ — LIEN INTÉGRALE ET AIRE

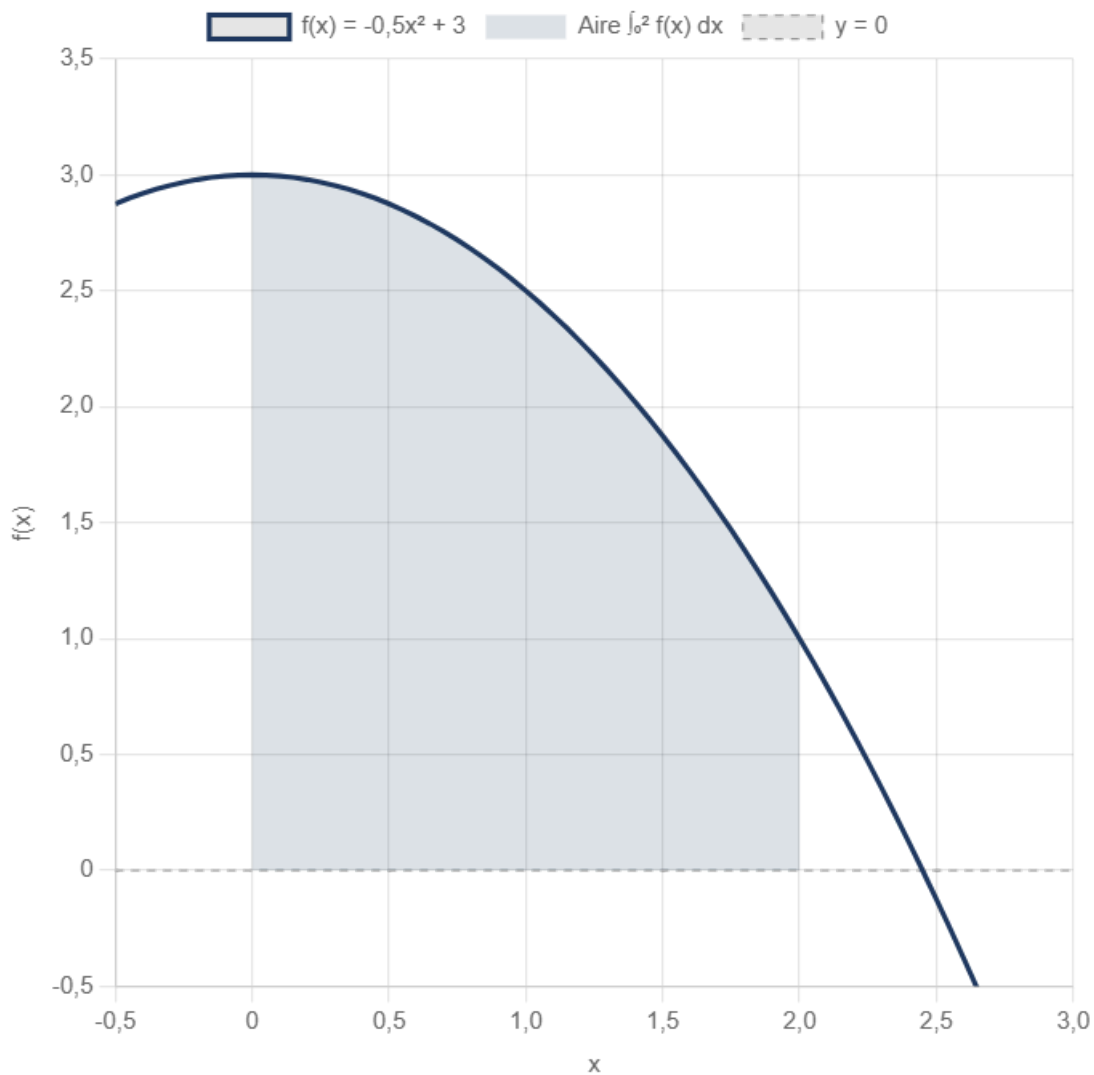
Si f est **continue et positive** sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ représente l'**aire** (en unités d'aire) de la surface comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

ATTENTION — FONCTION NÉGATIVE

Si f est **négative** sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx < 0$. L'aire géométrique est $-\int_a^b f(x) dx$ (valeur absolue).

Si f change de signe, il faut découper l'intervalle pour calculer l'aire totale.

Interprétation graphique : aire sous la courbe $f(x) = -0,5x^2 + 3$ sur $[0 ; 2]$



MINI-EXERCICE 2

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$ b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ c) $\int_0^\pi \sin(x) dx$

3. Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉ — RELATION DE CHASLES

Pour tous réels a, b, c :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

PROPRIÉTÉ — LINÉARITÉ

Pour toutes fonctions continues f et g sur $[a; b]$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

PROPRIÉTÉ — POSITIVITÉ

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ (avec $a \leq b$), alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

PROPRIÉTÉ — CONVENTIONS

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

4. Calcul d'aires

4.1 Aire entre une courbe et l'axe des abscisses

MÉTHODE — CALCUL D'AIRE

1. Déterminer le signe de f sur $[a; b]$.
2. Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, l'aire est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$.
3. Si f change de signe, découper l'intervalle aux zéros de f et additionner les valeurs absolues :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$$

EXEMPLE

Calculer l'aire entre la courbe de $f(x) = x^2 - 1$ et l'axe des abscisses sur $[0; 2]$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (sur $[0; 2]$). On a $f \leq 0$ sur $[0; 1]$ et $f \geq 0$ sur $[1; 2]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \int_0^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\ &= - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

4.2 Aire entre deux courbes

PROPRIÉTÉ

L'aire de la surface comprise entre les courbes de f et g sur $[a; b]$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur tout l'intervalle, cela se simplifie en $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

MINI-EXERCICE 3

Aire entre deux courbes

Calculer l'aire comprise entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ sur $[0; 1]$.

5. Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION — VALEUR MOYENNE

La **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

La valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant la **même aire** que la surface sous la courbe de f . Autrement dit, l'aire sous la courbe est égale à $\mu \times (b - a)$.

EXEMPLE

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$.

$$\mu = \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$

5.1 Application : valeur moyenne et valeur efficace d'un signal**DÉFINITION — VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE**

Pour un signal $s(t)$ de période T , la **valeur moyenne** est :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

DÉFINITION — VALEUR EFFICACE

La **valeur efficace** (ou valeur RMS) d'un signal $s(t)$ de période T est :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt}$$

EXEMPLE — VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

Soit $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Valeur moyenne : $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin(\omega t) dt = \frac{U_m}{T} \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = 0.$

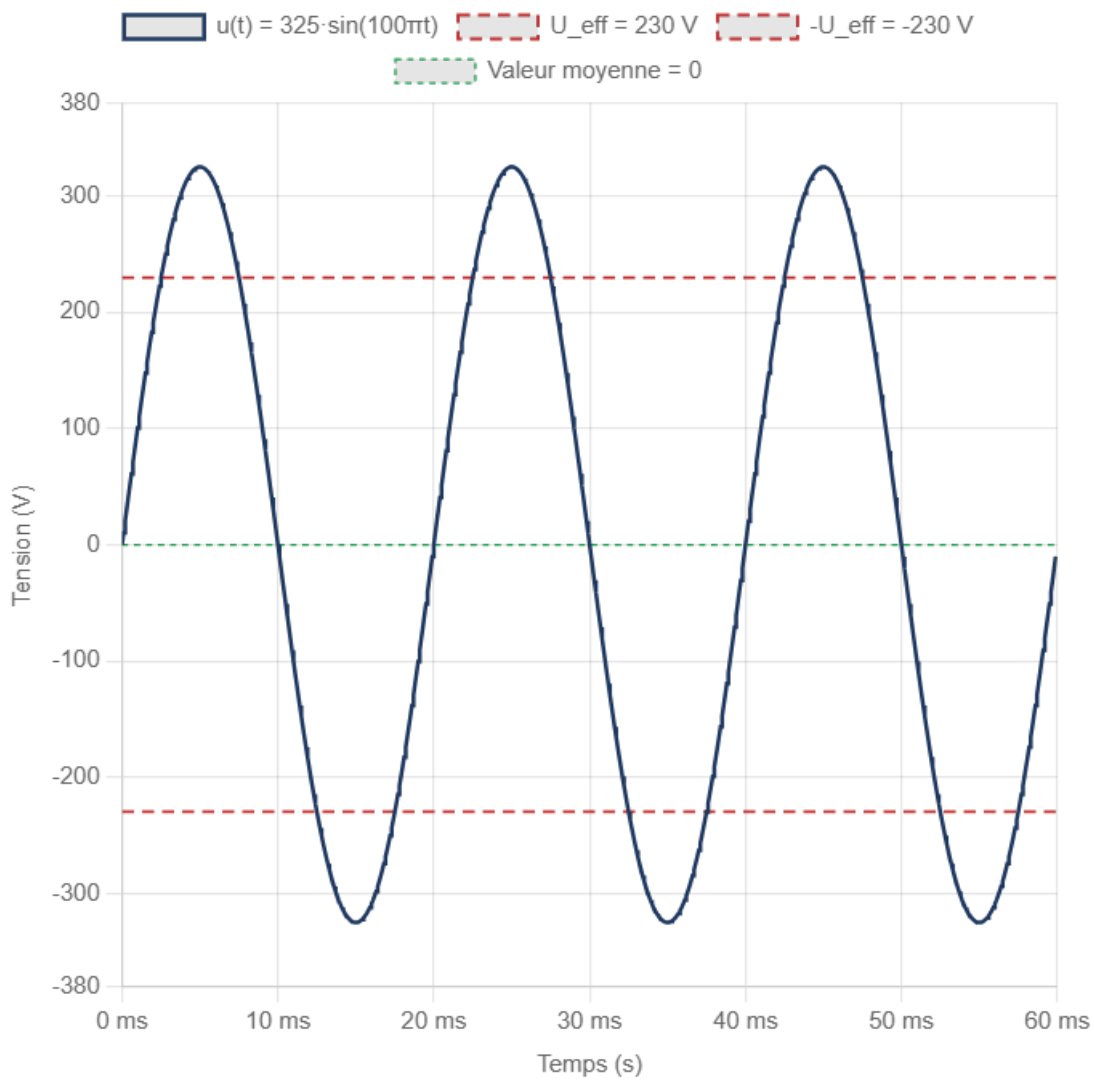
Valeur efficace :

On calcule $\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t) dt$. En utilisant $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$:

$$= \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{U_m^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{U_m^2}{2}.$$

Donc $U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Pour le secteur ($U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$), on a $U_m = 230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.

Signal sinusoïdal : tension secteur $u(t) = 325 \sin(100\pi t)$



MINI-EXERCICE 4

Valeur moyenne d'un signal

Un technicien FED mesure un courant modélisé par $i(t) = 2 + 3 \sin(100\pi t)$ (en ampères, t en secondes). La période est $T = 0,02 \text{ s}$.

- 1) Calculer la valeur moyenne de i sur une période.
- 2) Interpréter physiquement ce résultat.

6. Intégration par parties (IPP)

THÉORÈME — INTÉGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 (dérivables à dérivées continues) sur $[a; b]$.

Alors :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Intégration par parties

$$\int_a^b u' v = [u v]_a^b - \int_a^b u v'$$

MÉTHODE — CHOISIR U ET V

L'objectif est que la nouvelle intégrale $\int u v'$ soit **plus simple** que la première.

Règle pratique (LATE) : on choisit comme v (à dériver) la fonction qui se simplifie en la dérivant, dans l'ordre de priorité :

- **L**ogarithme > **A**lgébrique (polynôme) > **T**rigonométrique > **E**xponentielle

EXEMPLE 1 — $\int x e^x dx$

On pose $v(x) = x$ (à dériver) et $u'(x) = e^x$ (à primitiver).

$v = x$	$\Rightarrow v' = 1$
$u' = e^x$	$\Rightarrow u = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \times e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C.$$

Vérification : $[(x - 1)e^x]' = e^x + (x - 1)e^x = x e^x$. Correct.

EXEMPLE 2 — $\int_0^\pi x \cos(x) dx$

On pose $v = x$, $u' = \cos x$, donc $v' = 1$, $u = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos x dx &= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= (\pi \sin \pi - 0) - [-\cos x]_0^\pi = 0 - [-\cos \pi + \cos 0] = -(1 + 1) = -2.\end{aligned}$$

EXEMPLE 3 — $\int_1^e \ln(x) dx$

On écrit $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$. On pose $v = \ln x$, $u' = 1$, donc $v' = \frac{1}{x}$, $u = x$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = (e \times 1 - 1 \times 0) - \int_1^e 1 dx \\ &= e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

MINI-EXERCICE 5**Intégration par parties**

Calculer par IPP : $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

7. Méthodes d'approximation numérique

Lorsqu'on ne dispose pas d'une primitive explicite de f , ou lorsque f est donnée par un tableau de mesures, on approche $\int_a^b f(x) dx$ par des méthodes numériques.

7.1 Méthode des rectangles (point milieu)

PRINCIPE

On découpe $[a; b]$ en n sous-intervalles de largeur $h = \frac{b-a}{n}$. Sur chaque sous-intervalle, on approche f par sa valeur au **point milieu** :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right)$$

7.2 Méthode des trapèzes

PRINCIPE

Sur chaque sous-intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, on remplace la courbe par le segment reliant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

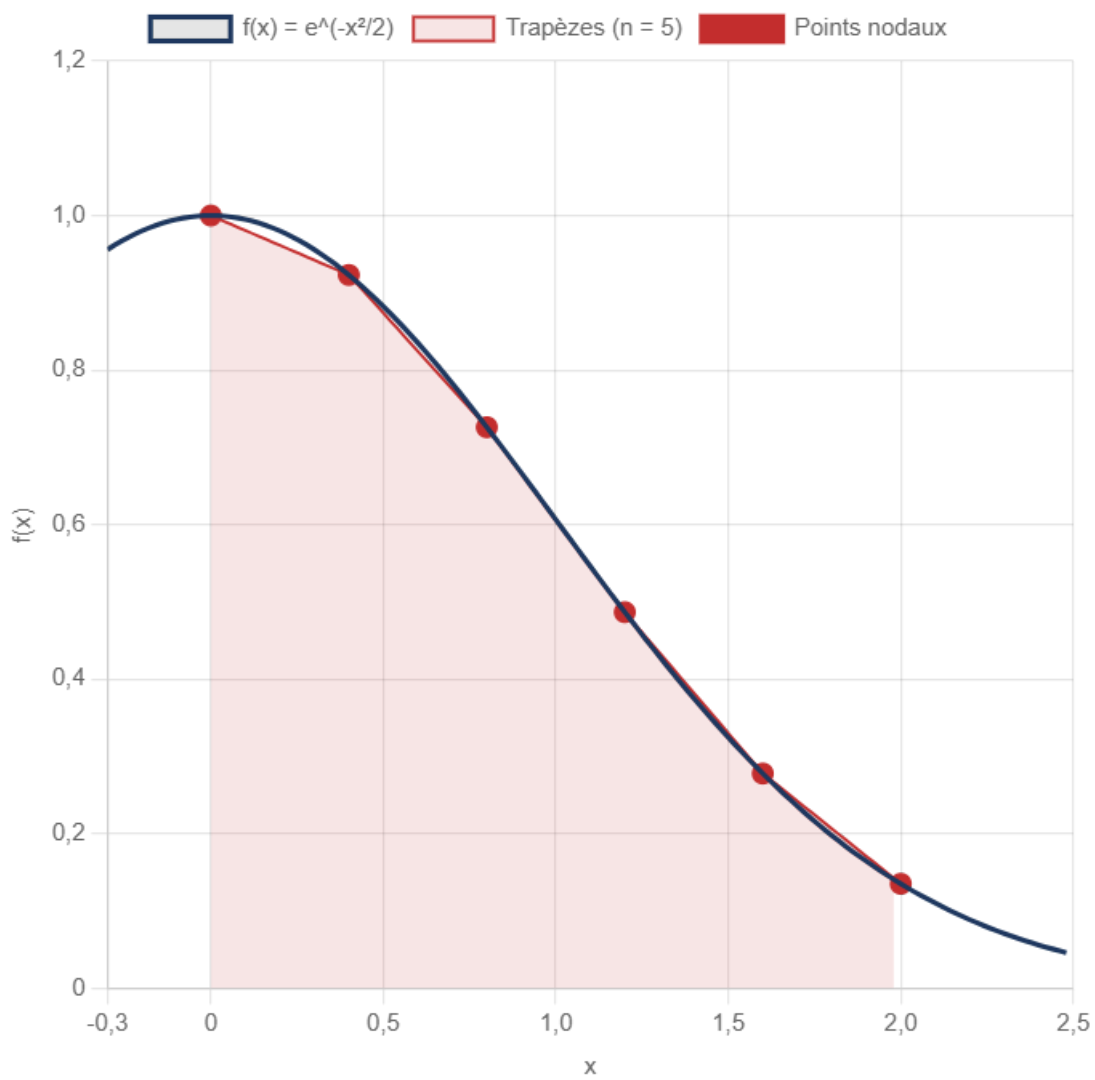
avec $x_k = a + kh$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

COMPARAISON DES MÉTHODES

Méthode	Ordre de convergence	Erreur en $O(\dots)$
Rectangles (point milieu)	2	$O(h^2)$
Trapèzes	2	$O(h^2)$

Plus n est grand (donc h petit), plus l'approximation est précise.

Méthode des trapèzes — Approximation de $\int_0^2 e^{-x^2/2} dx$ avec $n = 5$



EXEMPLE — MÉTHODE DES TRAPÈZES

Approcher $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec $n = 4$ sous-intervalles (méthode des trapèzes).

$h = \frac{1}{4} = 0,25$. Points : $x_0 = 0, x_1 = 0,25, x_2 = 0,5, x_3 = 0,75, x_4 = 1$.

x_k	0	0,25	0,50	0,75	1
$f(x_k)$	1	0,9394	0,7788	0,5698	0,3679

$$I \approx \frac{0,25}{2} [1 + 0,3679 + 2(0,9394 + 0,7788 + 0,5698)]$$

$$= 0,125 \times [1,3679 + 2 \times 2,2880] = 0,125 \times 5,9439 \approx 0,7430.$$

(Valeur exacte : $\approx 0,7468$. Erreur relative : $\approx 0,5\%$.)

7.3 Méthode de Monte-Carlo (aperçu)

PRINCIPE

On tire aléatoirement N points dans un rectangle contenant la courbe. La proportion de points sous la courbe fournit une estimation de l'aire :

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \times M \times \frac{\text{nombre de points sous la courbe}}{N}$$

où M est une borne supérieure de f sur $[a; b]$. Cette méthode est **moins précise** (convergence en $O(1/\sqrt{N})$) mais utile pour les intégrales en grande dimension.

MINI-EXERCICE 6

Méthode des trapèzes

Un technicien mesure le débit d'eau $Q(t)$ (en L/min) dans une canalisation toutes les 10 minutes :

t (min)	0	10	20	30	40	50	60
$Q(t)$	12	15	18	20	17	14	11

Estimer le volume total d'eau écoulé en 1 heure par la méthode des trapèzes.

8. Applications professionnelles

8.1 Valeur efficace d'un signal — contexte FED/électricité

Dimensionnement d'un disjoncteur

Un technicien en Fluides, Énergies, Domotique doit vérifier le calibre d'un disjoncteur protégeant un circuit alimenté par un courant dont la forme d'onde est modélisée par $i(t) = 10 \sin(100\pi t) + 3 \sin(300\pi t)$ (en ampères). Il a besoin de la valeur efficace I_{eff} .

RÉSOLUTION

La période est $T = 0,02$ s. On calcule :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt.$$

En développant $i(t)^2$ et en utilisant le fait que les termes croisés $\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$ ont une intégrale nulle sur une période (propriété d'orthogonalité) :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{10^2}{2} + \frac{3^2}{2} = 50 + 4,5 = 54,5$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{54,5} \approx 7,38 \text{ A.}$$

Le disjoncteur devra avoir un calibre supérieur à 7,38 A, soit un calibre normalisé de **10 A**.

8.2 Centre d'inertie d'une section — contexte bâtiment/charpente

Position du centre de gravité d'une poutre en T

Un dessinateur-projeteur en charpente bois doit déterminer la position du centre de gravité d'une section en T pour calculer les contraintes de flexion. La section est composée d'une semelle (rectangulaire, $b \times e_1$) et d'une âme (rectangulaire, $h \times e_2$).

RÉSOLUTION — MOMENT STATIQUE

Le centre de gravité d'une surface plane se calcule par :

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\text{moment statique}}{\text{aire totale}}$$

Données : Semelle : $b = 120$ mm, $e_1 = 30$ mm. Âme : $h = 200$ mm, $e_2 = 40$ mm. L'âme est centrée sous la semelle.

En prenant l'origine en bas de l'âme :

- Aire âme : $A_1 = 200 \times 40 = 8\,000$ mm², centre à $y_1 = 100$ mm
- Aire semelle : $A_2 = 120 \times 30 = 3\,600$ mm², centre à $y_2 = 200 + 15 = 215$ mm

$$\bar{y} = \frac{8\,000 \times 100 + 3\,600 \times 215}{8\,000 + 3\,600} = \frac{800\,000 + 774\,000}{11\,600} = \frac{1\,574\,000}{11\,600} \approx 135,7 \text{ mm.}$$

Le centre de gravité se situe à **135,7 mm** de la base de l'âme.

8.3 Calcul de volume par intégration — contexte BTS bois

Volume d'un fût de colonne tourné

Un ébéniste tourne un pied de table dont le profil est défini par la fonction

$$r(x) = 2 + \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) \text{ (rayon en cm, } x \text{ en cm, pour } x \in [0; 40]).$$

RÉSOLUTION

Le volume d'un solide de révolution est :

$$V = \pi \int_0^{40} [r(x)]^2 dx = \pi \int_0^{40} \left(2 + \sin \frac{\pi x}{20}\right)^2 dx$$

On développe : $\left(2 + \sin \frac{\pi x}{20}\right)^2 = 4 + 4 \sin \frac{\pi x}{20} + \sin^2 \frac{\pi x}{20}$.

En utilisant $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$:

$$= 4 + 4 \sin \frac{\pi x}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{10}$$

$$= \frac{9}{2} + 4 \sin \frac{\pi x}{20} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{10}$$

$$\int_0^{40} \left(\frac{9}{2} + 4 \sin \frac{\pi x}{20} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{10} \right) dx$$

$$= \left[\frac{9x}{2} - \frac{80}{\pi} \cos \frac{\pi x}{20} - \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi x}{10} \right]_0^{40}$$

$$= \left(180 - \frac{80}{\pi} \cos 2\pi - 0\right) - \left(0 - \frac{80}{\pi} \cos 0 - 0\right) = 180 - \frac{80}{\pi} + \frac{80}{\pi} = 180.$$

$$V = 180\pi \approx 565,5 \text{ cm}^3 \approx 0,57 \text{ litre.}$$

L'essentiel du chapitre

Primitives

- $F' = f$ (à une constante près)
- Types composés : $u'u^n$, u'/u , $u'e^u$
- Trigo : primitive de $\cos(\omega t + \varphi)$ est $\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$

Intégrale définie

- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- Linéarité, relation de Chasles, positivité
- Aire : $\int_a^b |f(x)| dx$

Valeur moyenne

- $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$
- Valeur efficace : $S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2 dt}$

IPP et méthodes numériques

- $\int u'v = [uv] - \int uv'$
- Rectangles (milieu), trapèzes : convergence en $O(h^2)$

Compétences travaillées :

- Déterminer les primitives des fonctions usuelles et composées
- Calculer une intégrale définie et interpréter graphiquement
- Calculer des aires entre courbes et la valeur moyenne d'une fonction
- Maîtriser l'intégration par parties (IPP)
- Approcher une intégrale par les méthodes des rectangles et des trapèzes
- Appliquer le calcul intégral à des problèmes professionnels

NIVEAU 1 Connaître et appliquer directement

Exercice 1 Primitives directes

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7$

b) $g(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$

c) $h(x) = 2 \cos x - 3 \sin x$

d) $k(x) = 6e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

Mes calculs :

Exercice 2 Intégrales simples

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^4 (2x - 3) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$

c) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

d) $\int_0^2 e^x dx$

Mes calculs :

Exercice 3 Aire basique sous une courbe

Soit $f(x) = -x^2 + 4$ définie sur $[-2; 2]$.

1) Vérifier que $f(x) \geq 0$ sur $[-2; 2]$.

2) Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = -2$ et $x = 2$.

Mes calculs :

Exercice 4 Primitives de fonctions trigonométriques composées

Déterminer une primitive de chaque fonction :

a) $f(t) = 4 \cos(2t)$

b) $g(t) = 5 \sin(3t + \pi/4)$

c) $h(t) = -2 \cos(100\pi t)$

Mes calculs :

Exercice 5 Primitives composées

Déterminer une primitive de chaque fonction en reconnaissant le type composé :

a) $f(x) = 4x e^{x^2}$ (type $u' e^u$)

b) $g(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}$ (type u'/u)

c) $h(x) = 3x^2(x^3 - 5)^4$ (type $u' u^n$)

d) $k(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$ (type u'/u)

Mes calculs :

Exercice 6 Aire entre deux courbes

Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

- 1) Résoudre $f(x) = g(x)$ pour déterminer les points d'intersection.
- 2) Étudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $[0; 3]$.
- 3) Calculer l'aire comprise entre les deux courbes sur $[0; 3]$.

Mes calculs :

Exercice 7 Valeur moyenne

Soit $f(t) = 3t^2 + 1$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

- 1) Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0; 2]$.
- 2) Vérifier que le rectangle de base $[0; 2]$ et de hauteur μ a la même aire que la surface sous la courbe de f .

Mes calculs :

Exercice 8**Valeur moyenne d'un signal**

Un technicien en maintenance mesure un courant modélisé par $i(t) = 5 \sin(100\pi t)$ (en ampères, t en secondes). La période est $T = 0,02$ s.

- 1) Calculer la valeur moyenne de i sur une période.
- 2) Calculer la valeur efficace I_{eff} .
- 3) Quel est le lien entre I_{eff} et l'amplitude $I_m = 5$ A pour un signal sinusoïdal ?

Mes calculs :

Exercice 9 Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes par IPP :

a) $\int_0^1 x e^{3x} dx$

b) $\int_1^e x \ln(x) dx$

c) $\int_0^\pi t \sin(t) dt$

Mes calculs :

Exercice 10 Méthode des trapèzes

On souhaite approcher $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ par la méthode des trapèzes avec $n = 4$ sous-intervalles.

- 1) Calculer le pas h et les points x_k pour $k = 0, 1, \dots, 4$.
- 2) Compléter le tableau suivant (arrondir $f(x_k)$ à 4 décimales) :

x_k	0	0,5	1	1,5	2
$f(x_k) = e^{-x_k^2}$					

- 3) Appliquer la formule des trapèzes et donner une approximation de l'intégrale.

Mes calculs :

Exercice 11**Méthode des rectangles (point milieu)**

On reprend l'intégrale $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ avec la méthode des rectangles au point milieu, $n = 4$.

- 1) Calculer les points milieux $m_k = x_k + \frac{h}{2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.
- 2) Calculer $f(m_k)$ pour chaque k (arrondir à 4 décimales).
- 3) Donner l'approximation et comparer avec la méthode des trapèzes.

Mes calculs :

Exercice 12 Application — Signal redressé

Un pont redresseur transforme un signal sinusoïdal $u(t) = 325 \sin(100\pi t)$ (tension secteur) en un signal redressé $v(t) = |u(t)| = 325 |\sin(100\pi t)|$.

La période du signal redressé est $T' = T/2 = 0,01$ s.

- 1) Justifier que $v(t) = 325 \sin(100\pi t)$ sur $[0; 0,01]$.
- 2) Calculer la valeur moyenne de v sur une période T' .
- 3) Calculer la valeur efficace de v . Compare-t-elle à celle du signal non redressé ?

Mes calculs :

Exercice 13 Valeur efficace d'un signal non sinusoïdal — Contexte FED

Un technicien en Fluides, Énergies, Domotique doit dimensionner un disjoncteur pour un circuit alimenté par un courant non sinusoïdal. Le courant est modélisé par :

$$i(t) = 8 \sin(100\pi t) + 2 \sin(300\pi t) + \sin(500\pi t)$$

en ampères, de période $T = 0,02$ s.

1) Calculer la valeur moyenne du courant sur une période.

2) On admet la propriété d'orthogonalité : pour $n \neq m$, $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$ avec $\omega = 100\pi$. En utilisant cette propriété, montrer que :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{8^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2}$$

3) En déduire I_{eff} et proposer un calibre normalisé pour le disjoncteur (calibres disponibles : 6, 10, 16, 20, 25, 32 A).

Mes calculs :

Exercice 14**Centre d'inertie d'une section — Contexte charpente bois**

Un dessinateur-projeteur en charpente bois doit calculer le centre de gravité d'une section en I composée de trois rectangles :

- **Semelle inférieure** : largeur 150 mm, épaisseur 25 mm
- **Âme** : largeur 30 mm, hauteur 180 mm (centrée sur la semelle inférieure)
- **Semelle supérieure** : largeur 120 mm, épaisseur 20 mm

On prend l'origine en bas de la semelle inférieure.

1) Calculer l'aire A_i et l'ordonnée du centre de gravité y_i de chaque rectangle.

2) En utilisant la formule $\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$, déterminer la position du centre de gravité de la section complète.

3) Le résultat est-il plus proche de la semelle inférieure ou supérieure ? Interpréter.

Mes calculs :

Exercice 15**Volume par intégration — Contexte ébénisterie**

Un ébéniste tourne un pied de meuble sur un tour à bois. Le profil du pied est défini par la fonction donnant le rayon en fonction de la position x (en cm) le long de l'axe :

$$r(x) = 3 - 0,5 \cos\left(\frac{\pi x}{15}\right) \quad \text{pour } x \in [0; 30]$$

1) Calculer $r(0)$, $r(15)$ et $r(30)$. Interpréter la forme du pied.

2) Le volume d'un solide de révolution est $V = \pi \int_0^{30} [r(x)]^2 dx$. Développer $[r(x)]^2$ en utilisant l'identité $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$.

3) Calculer l'intégrale et en déduire le volume du pied en cm^3 puis en litres.

Mes calculs :

Calcul intégral

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Primitives (4 pts)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$ (1 pt)

b. $g(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ (1,5 pt)

c. $h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ (1,5 pt)

Exercice 2 — Intégrales définies (4 pts)

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$ (1,5 pt)

b. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ (1,5 pt)

c. $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ (1 pt)

Exercice 3 — Aire et valeur moyenne (4 pts)

a. Calculer l'aire (en unités d'aire) comprise entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0; 2]$. (2,5 pts)

b. Calculer la valeur moyenne de la fonction $p(x) = 2x$ sur l'intervalle $[1; 3]$. (1,5 pt)

Exercice 4 — Intégration par parties (4 pts)

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^1 x e^x dx$. On précisera le choix de u' et v .

Exercice 5 — Méthode des trapèzes (4 pts)

Un technicien mesure le débit $Q(t)$ (en L/min) d'une canalisation toutes les 15 minutes :

t (min)	0	15	30	45	60
$Q(t)$	10	14	16	13	9

- a. Rappeler la formule de la méthode des trapèzes pour n sous-intervalles de largeur h . (1 pt)
- b. Estimer le volume total d'eau écoulé en 1 heure (en litres). (3 pts)
-