

Fonctions à valeurs vectorielles – TD₁₆

Révisions de Sup'

Exercice 1

Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x \in]0, 1[$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1. On notera encore f l'application ainsi prolongée.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
5. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

Exercice 2

Soient $a < b$ des réels et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ positive.

1. Justifier l'existence de $M = \max_{[a, b]} f$.
2. Montrer que $\sqrt[n]{\int_a^b (f(t))^n dt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$.

Indication : on pourra calculer les premières dérivées de f sur $]0, +\infty[$ et $] -\infty, 0[$ et observer un phénomène intéressant.

Exercice 5 : Trois applications du théorème des accroissements finis

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\text{Arctan}(n)}{\text{Arctan}(n+1)} \right)^{n^2}$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.
3. Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \times e^{\frac{1}{x+1}} - x \times e^{\frac{1}{x}} \right)$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $L_n(X) = (X^2 - 1)^n \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
2. Montrer que L_n admet n racines simples et toutes dans $] -1, 1[$.

Exercice 7

Calculer les dérivées successives de la fonction $f: x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 8

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que tout $y \in \mathbb{R}$ possède au plus deux antécédent par f . Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que y_0 possède exactement un antécédent par f .

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Dérivation de fonctions à valeurs vectorielles**Exercice 10**

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(t) = \left(t^3 \times \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^3 \right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, on appelle encore f le prolongement obtenu.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{2!}{x^3} & x^2 & x & \ddots & 0 \\ \frac{3!}{x^3} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}_{(n)}$$

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$.
2. En déduire l'expression de $D_n(x)$ en fonction de n et x .

Exercice 12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que f est à valeurs dans un plan.
2. Montrer que f est à valeurs dans un cercle.
3. Montrer que $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Exercice 13

On considère point M qui se déplace dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $f(t) = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position de M à l'instant $t \in I$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que M se déplace à vitesse constante si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $f'(t) \perp f''(t)$.
2. Montrer que M accélère si, et seulement si, l'angle entre $f'(t)$ et $f''(t)$ est compris entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que M décélère si, et seulement si, l'angle entre $f'(t)$ et $f''(t)$ est compris entre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 14

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable ne s'annulant pas sur I . On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Justifier que la fonction $u : t \mapsto \frac{1}{\|f(t)\|} \cdot f(t)$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que, pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires. Montrer que, f est à valeurs dans une droite vectorielle.

Exercice 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . On suppose que, pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$ et les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires.

Montrer que la fonction f est à valeurs dans un plan vectoriel.

Indication : on pourra considérer la fonction $u : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ et calculer sa dérivée (si cela a un sens bien sûr!).

Exercice 16

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée usuelle (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$)

On considère trois fonctions e_1, e_2 et e_3 de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telles que, pour tout $t \in I$, $\mathcal{B}_t = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ est une base orthonormée directe.

1. Montrer que, pour tout $t \in I$, la matrice $M_t = \text{Mat}_{\mathcal{B}_t}(e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t))$ est antisymétrique.
2. Montrer que, pour tout $t \in I$, il existe un unique vecteur $\Omega(t)$ tel que $e'_i(t) = \Omega(t) \wedge e_i(t)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
3. On suppose de plus les fonctions e_1, e_2 et e_3 de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Montrer que la fonction Ω est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et calculer e''_i en fonction de Ω, Ω' et e_i .

Exercice 17

Soient $a < b$ des réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On considère la fonction $\Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer $\Delta'(x)$, pour tout $x \in]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(g(b) - g(a)) \times f'(c) = (f(b) - f(a)) \times g'(c)$.