

MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES

1. Rappels des généralités

Tout mécanisme est sollicité par les actions mécaniques qu'il transmet, transforme, le met en mouvement ou, au contraire, l'en empêche.

1.1. Définition d'une action mécanique

On appelle **Action Mécanique** (notée **AM**), toute cause capable de :

- provoquer et/ou modifier le mouvement d'un solide (étude dynamique),
- maintenir un solide au repos (étude statique),
- déformer un solide (étude de la résistance des matériaux RdM).

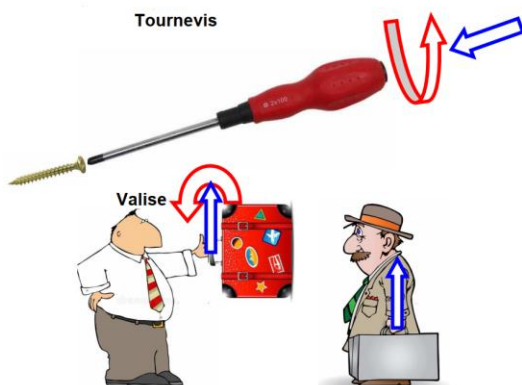
Une action mécanique est ainsi caractérisée par **son effet**.

Une AM a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation : $i \rightarrow j$ (AM de i sur j)

D'une manière générale, une action mécanique modélisée en un point a deux éléments de réduction :

- **Une force résultante** égale à la somme des petites forces réelles. Elle modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou de compression.
- **Un moment résultant** égal à la somme des moments des petites forces réelles. Il modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de rotation, ou provoque une déformation en torsion ou en flexion.

Exemples d'actions mécaniques :



Action de la main sur un tournevis :

La **résultante** permet de maintenir la tête du tournevis dans l'empreinte de la vis.

Le **moment** permet de réaliser l'opération de vissage (rotation de la vis).

Action du bras sur la valise :

Le personnage de droite n'exerce qu'une **résultante** pour porter sa valise. Celui de gauche exerce la même résultante mais également **un moment** qui s'oppose à la rotation de la valise.

On utilise le terme « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les AM réparties au niveau du contact entre les deux solides. Dans l'exemple ci-contre, la main n'exerce pas une force sur un point unique mais sur toute la surface de contact avec la poignée.



1.2. Quelques cas particuliers de modélisation d'actions mécaniques

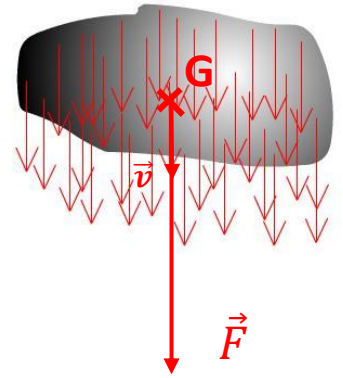
1.2.1. Action mécanique de pesanteur

L'action de pesanteur, sur un système matériel, correspond à une infinité de petites forces toutes orientées vers le bas et appliquées à chaque petit élément de matière du système.

Pour la modélisation de l'action mécanique de pesanteur, il est convenu d'exprimer la résultante des forces et de réduire l'action mécanique en G, le centre de masse du système matériel.

$$\vec{F}_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{solide}} = mg\vec{v}$$

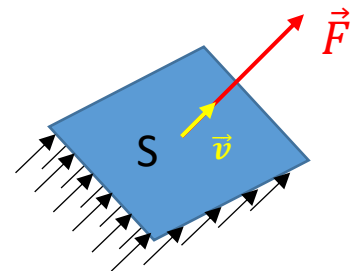
- F : exprimée en newtons (N),
- \vec{v} : un vecteur unitaire vertical descendant,
- m : masse du système matériel exprimée en kilogrammes kg,
- g : accélération de pesanteur exprimée en mètres par seconde carré ($m \cdot s^{-2}$), usuellement $g=9,81 m \cdot s^{-2}$.



1.2.2. Action mécanique pour un contact surfacique fluide/solide ou solide/fluide

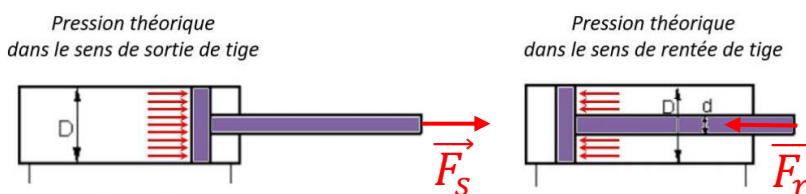
Dans le cas d'un contact surfacique plan, une quantité infinie d'efforts élémentaires s'exercent au contact et forment ce que l'on appelle la pression. Si cette pression est uniforme on peut la remplacer par un effort appliqué au centre géométrique de la surface de contact

$$\vec{F}_{\text{surfacique} \rightarrow \text{solide}} = p S \vec{v}$$



Avec p la pression en Pa, S la surface en m^2 et \vec{v} un vecteur unitaire normal à la surface de contact.

Application dans les composants appelés vérins pneumatiques ou hydrauliques :



Unités de pression usuelles :

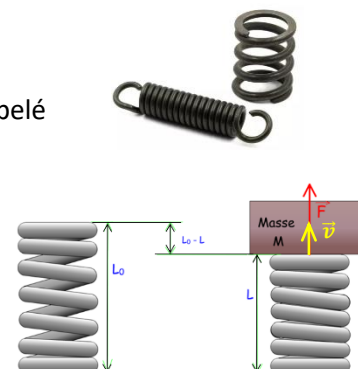
- le Pascal (Pa) est égal à un Newton par mètre carré, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$,
- le Méga Pascal (MPa) : $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$,
- le bar (bar) est égal à 10^5 Pa . $1 \text{ daN} = 10 \text{ N} = 1 \text{ bar} \cdot \text{cm}^2$.

1.2.3. Action mécanique d'un ressort

L'action mécanique d'un ressort sur un solide se modélise par un effort appelé tension qui dépend des caractéristiques du ressort :

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow \text{solide}} = \pm k(L_0 - L)\vec{v}$$

- k : raideur du ressort exprimée en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$,
- L : longueur du ressort déformé (en m),
- L_0 : longueur initiale du ressort,
- \vec{v} : un vecteur unitaire vertical descendant.



1.2.4. Action mécanique pour un solide immergé dans un fluide

L'action mécanique de poussée d'Archimède est l'effort particulier que subit un corps plongé dans un fluide et soumis à un champ de gravité. Cet effort provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur, il est appliqué au centre de poussée du solide :

$$\vec{F}_{\text{Archimède} \rightarrow \text{solide}} = \rho V g \vec{v}$$

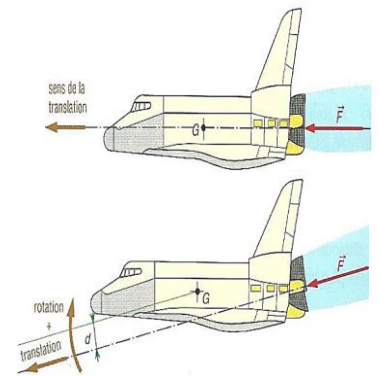
- ρ : masse volumique du fluide en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$,
- V : volume du fluide déplacé en m^3 ,
- g : accélération de pesanteur,
- \vec{v} : un vecteur unitaire vertical ascendant.

2. Expression d'un moment

2.1. Description

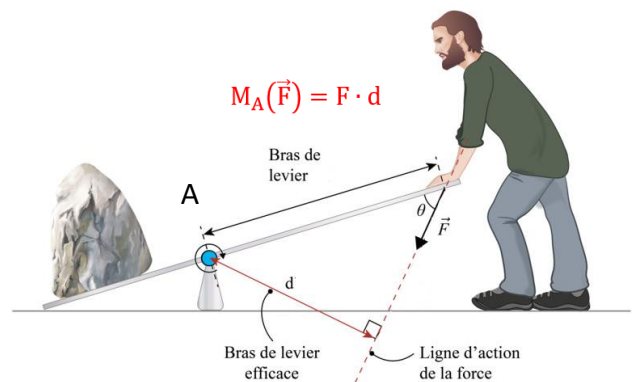
Les effets d'une force sur un solide dépendent, non seulement de son intensité et de sa direction, mais aussi du moment qu'elle peut engendrer.

Le moment d'une force mesure l'effet à causer un effet de **rotation (ou de torsion)** aux objets sur lesquels elle agit. Elle peut s'exprimer par un scalaire ou un vecteur.



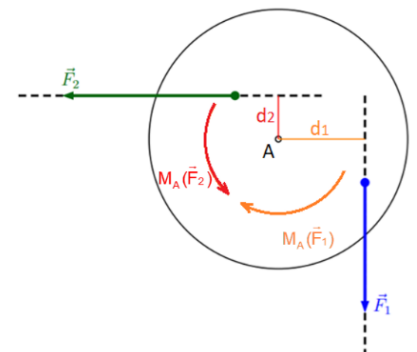
2.2. Moment scalaire d'une force par rapport à un point

Le moment scalaire d'une force \vec{F} par rapport au point A, noté $M_A(\vec{F})$ est égal au produit du module $F = \|\vec{F}\|$ de la force par le « bras de levier » d de cette force par rapport au point A : $M_A(\vec{F}) = F \cdot d$



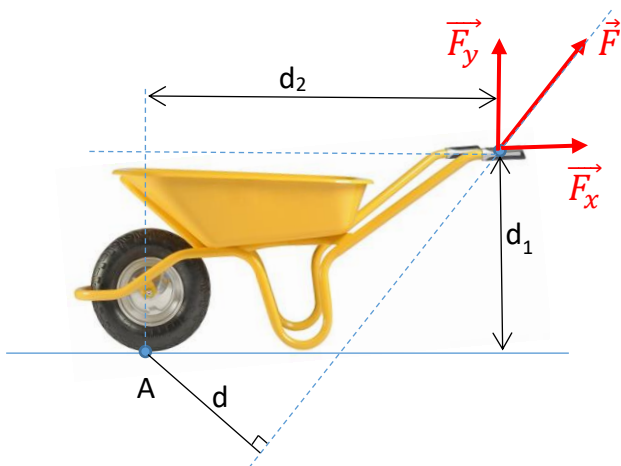
Ce moment est un scalaire, c'est-à-dire un nombre, dont le signe est donné par la convention de signe suivante :

- Si la force \vec{F} tend à faire tourner le solide sur lequel elle agit dans le sens trigonométrique autour de A, le moment est positif : $M_A(\vec{F}_2) = F_2 \cdot d_2$
- Le moment est négatif si la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre : $M_A(\vec{F}_1) = - F_1 \cdot d_1$
- L'unité SI du moment d'une force est le « **Newton mètre** » (**N·m**). Il peut être aussi exprimé en joules par radian (**J·rad⁻¹**)



Théorème de Varignon

Le moment de la force \vec{F} par rapport au point A est égale à la somme des moments de ses composantes \vec{F}_x et \vec{F}_y par rapport au même point.



Cas d'un moment scalaire

$$M_A(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot d$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y)$$

$$M_A(\vec{F}) = \|\vec{F}_x\| \cdot d_1 + \|\vec{F}_y\| \cdot d_2$$

2.3. Vecteur moment

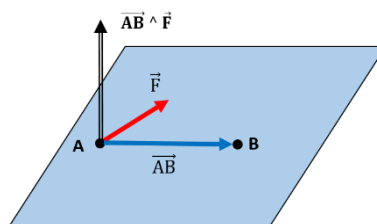
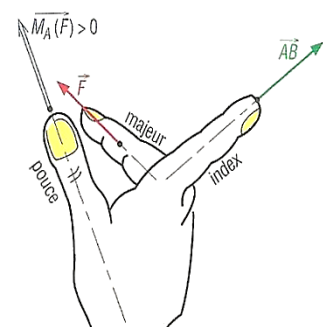
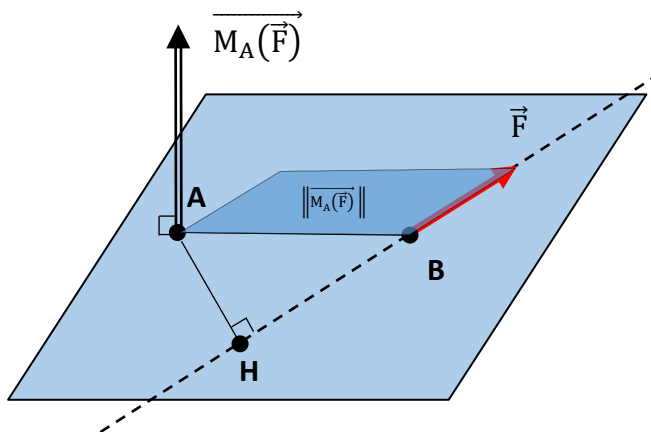
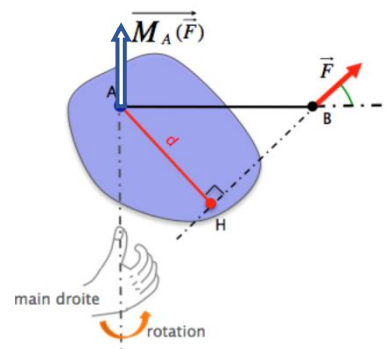
Pour l'étude de systèmes dans l'espace, la notion de moment scalaire ne suffit plus, on doit le définir à partir d'un produit vectoriel.

Le vecteur moment de la force \vec{F} par rapport au point A est défini par

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \wedge \vec{F} \text{ où B est un point quelconque de la ligne d'action de la force } \vec{F}.$$

Ce vecteur est défini par :

- Son origine : le point A
- Sa direction : la droite perpendiculaire au plan formé par \vec{AB} et \vec{F}
- Son sens : tel que le trièdre $(\vec{AB}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F}))$ soit direct
- Son intensité : $\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\vec{AB}, \vec{F})|$



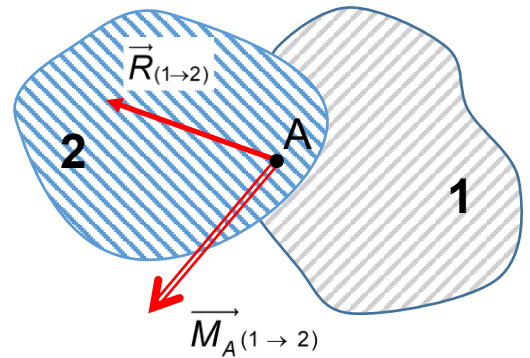
Modélisation d'une action mécanique par un torseur

2.4. Définition

Pour rappel :

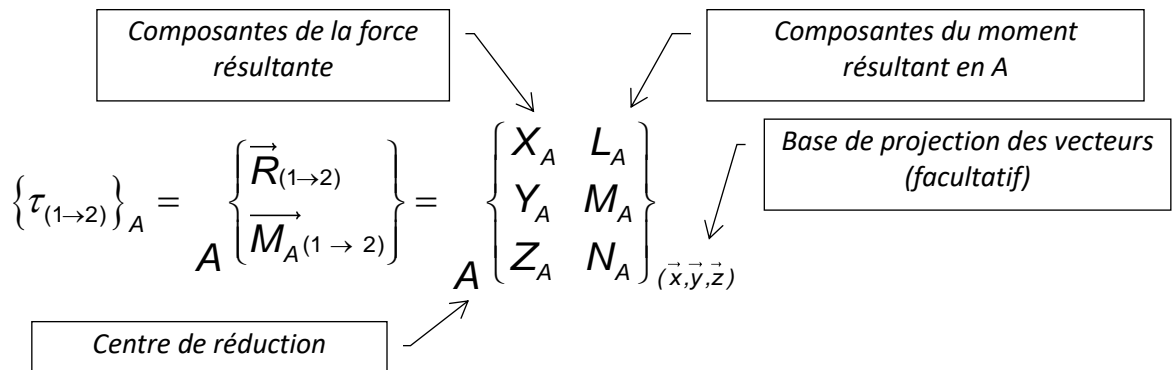
- $\vec{R}_{(1 \rightarrow 2)}$ est la résultante de l'AM de 1 → 2. Elle modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou compression.
- $\vec{M}_A(1 \rightarrow 2)$ est le moment résultant de l'AM de 1 → 2. Il modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de rotation, ou provoque une déformation en torsion ou en flexion.
- Le **moment résultant dépend du point A** choisi (appelé le centre de moment) pour le calcul. La résultante en est indépendante.

Soit une action mécanique exercée au point A par un solide 1 sur un solide 2



Une action mécanique étant définie lorsque ces deux vecteurs sont connus. Nous les regrouperons dans une entité mathématique appelée **Torseur**.

Le torseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 1 sur un solide 2 sera noté :



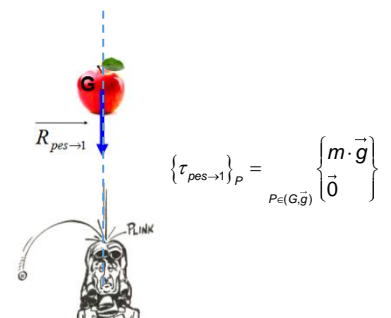
$\vec{R}_{(1 \rightarrow 2)}$ et $\vec{M}_A(1 \rightarrow 2)$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\{\tau_{(1 \rightarrow 2)}\}_A$.

2.5. Torseurs particuliers

2.5.1. Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

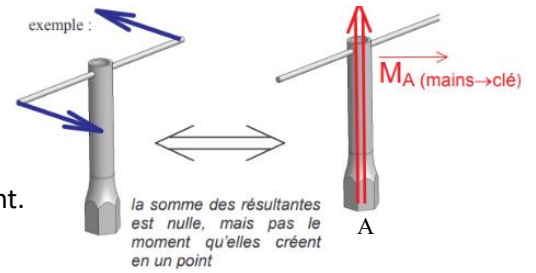
$$\{\tau_{(1 \rightarrow 2)}\}_A = \begin{matrix} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} \neq \vec{0} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{matrix}$$



2.5.2. Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante de la force est nulle.

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) \neq \vec{0} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 0 \quad L_A \\ 0 \quad M_A \\ 0 \quad N_A \end{array}$$



Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

2.5.3. Torseur nul

$$\left\{ \tau_{(1 \rightarrow 2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(1 \rightarrow 2)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Les éléments de réduction d'un torseur nul sont les mêmes en tout point de l'espace.

2.6. Opérations entre torseurs

2.6.1. Somme de deux torseurs

$$\text{Soit : } \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \tau_{(3 \rightarrow 1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_A(3 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{alors : } \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A + \left\{ \tau_{(3 \rightarrow 1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) + \vec{M}_A(3 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

- Pour pouvoir **additionner des torseurs**, ils **doivent tous être exprimés au même centre de réduction**.
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

2.6.2. Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$\text{Soit } \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

alors

$$\lambda \times \left\{ \tau_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \times \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \lambda \times \vec{M}_A(2 \rightarrow 1) \end{array} \right\}$$

2.6.3. Égalité de deux torseurs

Soit :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_{(3 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(3 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

$$\text{alors : } \{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \{\tau_{(3 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} = \vec{M}_{A(3 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

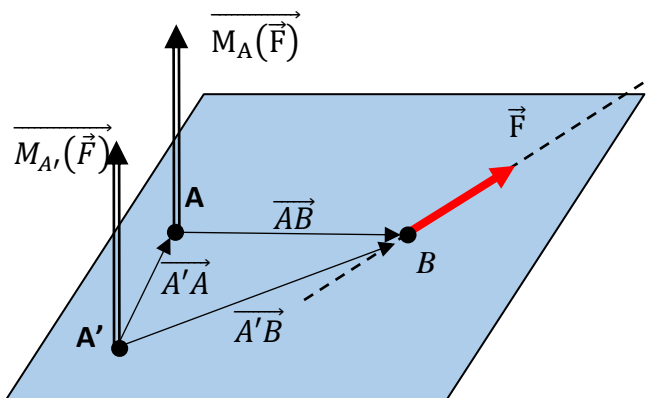
- Deux torseurs sont égaux s'ils ont la même résultante et le même moment **au même centre de réduction**
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

2.6.4. Changement de centre de réduction, théorème de transport du moment (Varignon)

Le moment résultant en un point A' peut être exprimé en fonction des éléments de réduction du torseur en un autre point A . La démonstration est la suivante sachant que le produit vectoriel est distributif :

$$\vec{M}_{A'} = \vec{A'B} \wedge \vec{F} = (\vec{A'A} + \vec{AB}) \wedge \vec{F} = \vec{A'A} \wedge \vec{F} + \vec{AB} \wedge \vec{F} = \vec{A'A} \wedge \vec{F} + \vec{M}_A$$

On obtient ainsi la relation de changement de centre de moment : $\vec{M}_{A'} = \vec{M}_A + \vec{A'A} \wedge \vec{R}$



Moyen mnémotechnique de la méthode dite « BABAR »

Soit un torseur exprimé au point A

$$\boxed{\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}}$$

Son écriture au point B sera :

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{B(2 \rightarrow 1)} = \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

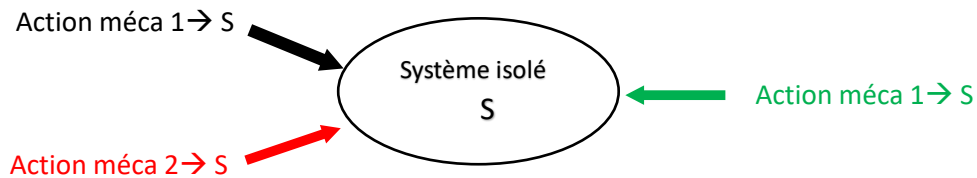
B
A
BA
R

3. Application du Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Le Principe Fondamental de la Statique ne s'applique que dans l'une ou l'autre de ces conditions :

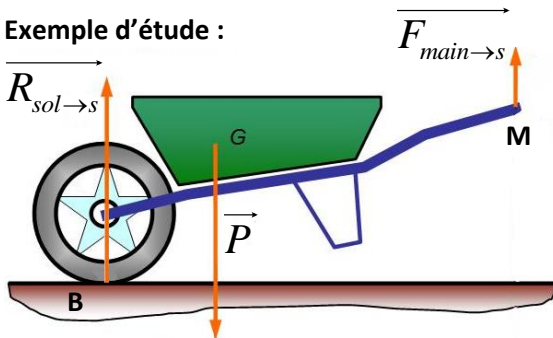
- Le système étudié est au repos.
- Le système étudié est en déplacement mais à vitesse constante :
 - en mouvement de translation sans accélération.
 - en mouvement de rotation sans accélération angulaire

3.1. Démarche de résolution d'un problème de statique.



- Isoler le système matériel S, en définissant une frontière fictive entre lui et l'extérieur du système.
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures agissant, par contact ou à distance, sur le système S isolé.
- Modéliser chacune des actions mécaniques par un vecteur force.
- Renseigner un tableau récapitulatif, en faisant apparaître les caractéristiques (connues ou inconnues) de chaque vecteur force (point d'application, direction, sens et norme/intensité).

Exemple d'étude :



B.A.M.

Force	Point d'application	Direction	Sens	Intensité/Norme
\vec{P}	G	vertical	de haut en bas	$\ \vec{P}\ = 100 \text{ daN}$
$\vec{F}_{\text{main} \rightarrow s}$	M	vertical	de bas en haut	75 daN
$\vec{R}_{\text{sol} \rightarrow s}$	B	vertical	de bas en haut	?

3.2. Principe fondamental de la statique

Si un système de solides indéformables est en équilibre, alors la somme des actions mécaniques extérieures à ce solide ou ce système est nulle.

- La somme vectorielle de toutes les forces extérieures est nulle :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow s} = \vec{0} \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

- La somme des moments en n'importe quel point I de toutes les forces extérieures est nulle :

$$\sum \vec{M}_I(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0} \quad \vec{M}_I(\vec{F}_1) + \vec{M}_I(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_I(\vec{F}_n) = \vec{0}$$

Qui se traduit en utilisant la notation d'un torseur :

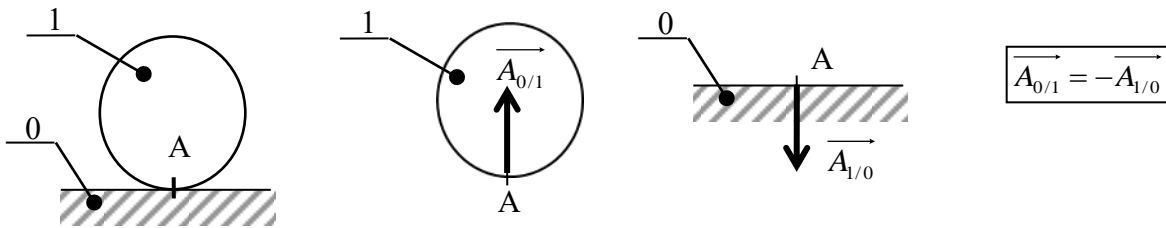
$$\left\{ \tau_{(\bar{s} \rightarrow s)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\bar{s} \rightarrow s)} \\ \vec{M}_{A(\bar{s} \rightarrow s)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \forall A$$

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total.

3.3. Cas particuliers

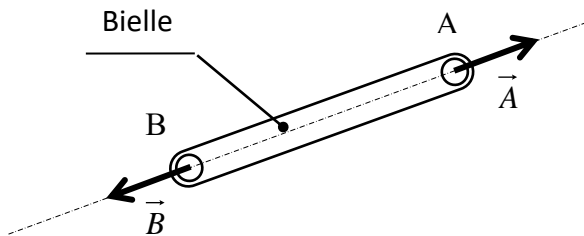
3.3.1 Principe des actions mutuelles

Soit deux solides 0 et 1 en contact. L'action exercée par le solide 0 sur le solide 1 est égale et opposée à l'action exercée par le solide 1 sur le solide 0.



3.3.2 Cas d'un solide soumis à deux forces.

Un solide est en équilibre sous l'action de deux forces si ces deux forces sont égales et opposées. (Même direction, même norme, mais sens opposé)

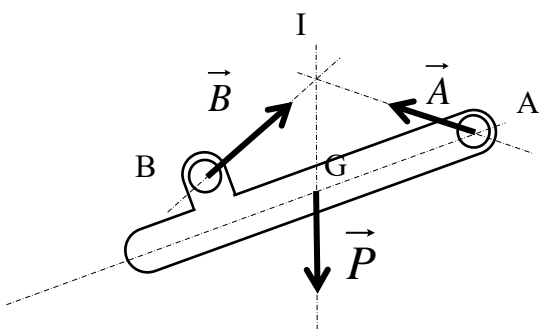


Force	Point d'application	Direction	Sens	Norme
\vec{A}	A	(AB)	de B vers A	$\ \vec{A}\ = \ \vec{B}\ $
\vec{B}	B	(AB)	de A vers B	$\ \vec{B}\ = \ \vec{A}\ $

3.3.3 Cas d'un solide soumis à trois forces.

Un solide soumis à l'action de trois forces extérieures (non parallèles) reste en équilibre si :

- Les trois forces ont leurs supports concourants (ils se coupent au même point).
- La somme vectorielle des trois résultantes est nulle. On parle de **dynamique des forces**, ici il s'agit donc d'un triangle formé par ces trois vecteurs. **Ce dynamique est fermé.**

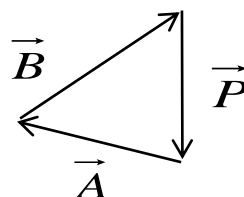


Force	Point d'application	Direction	Sens	Norme
\vec{A}	A	(AI)	De B vers A	?
\vec{B}	B	(BI)	De A vers B	?
\vec{P}	G	Verticale	Vers le bas	?

Condition d'équilibre PFS :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$M_I(\vec{A}) + M_I(\vec{B}) + M_I(\vec{P}) = 0$$

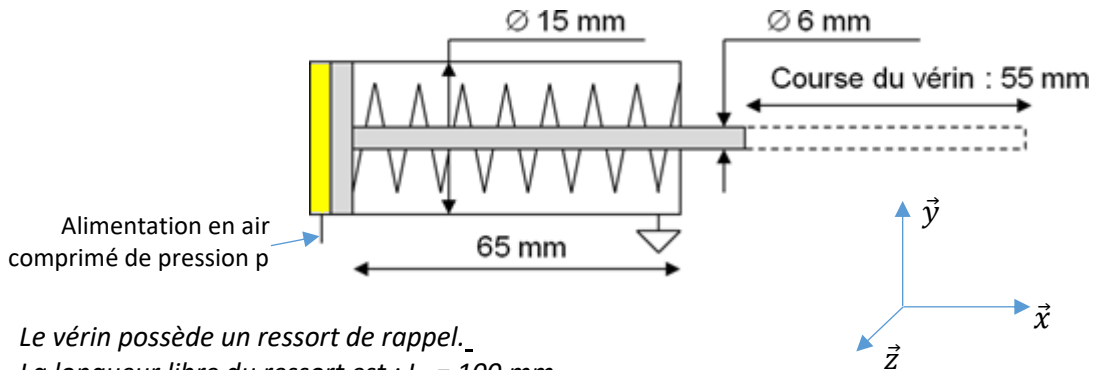


Nom de la liaison	Translation	Rotation	Degrés de liberté	Schématisation dans l'espace	Torseur statique $\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{A, 2 \rightarrow 1} \end{Bmatrix}_A$ $\beta = \text{base } \beta(x, y, z)$	Torseur cinématique $\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A, 2/1} \end{Bmatrix}_A$ $\beta = \text{base } \beta(x, y, z)$
Encastrement	0 0 0	0 0 0	0		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{Bmatrix}_{A, \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ torseur nul
Pivot d'axe \vec{z} (A, Z)	0 0 0	0 0 Rz	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ L_{21} \\ M_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$
Glissière de direction \vec{z}	0 0 Tz	0 0 0	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$
Helicoidale d'axe \vec{z} (A, Z) et de pas p	0 0 Tz	0 0 Rz	1		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$ avec $N_{31} = \frac{p}{2\pi} \cdot Z_{21}$ sirendement = 100%	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$ avec $\frac{p}{2\pi}$ $V_{z21} = \frac{\omega_{z21}}{2\pi}$
Pivot glissant d'axe \vec{z} (A, Z)	0 0 Tz	0 0 Rz	2		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} + M_{21} \vec{y} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ L_{21} \\ M_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z)}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, Z), \beta}$
Sphérique à doigt (ou rotule à doigt) d'axes \vec{A}, \vec{x} et \vec{A}, \vec{z}	0 0 0	Rx 0 Rz	2		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ M_{21} \vec{y} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ 0 \\ M_{21} \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} \omega_{x21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{z21} \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$
Sphérique (ou rotule) de centre A	0 0 0	Rx Ry Rz	3		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} \omega_{x21} \\ \omega_{y21} \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$
Appui plan (ou plan-plan) de normale \vec{y}	Tx 0 Tz	0 Ry 0	3		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y})}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \omega_{y21} \vec{y} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y})}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_{y21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$
Cylindre-plan (ou linéaire rectiligne) d'axe \vec{A}, \vec{z} et de normale \vec{y}	Tx 0 Tz	0 Ry Rz	4		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{y} \\ L_{21} \vec{x} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y})}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_{y21} \\ 0 \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$
Sphère-cylindre (ou linéaire annulaire) de centre A et d'axe \vec{A}, \vec{z}	0 0 Tz	Rx Ry Rz	4		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ $\begin{Bmatrix} \omega_{x21} \\ \omega_{y21} \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{A, \beta}$
Sphère-plan (ou ponctuelle) de point de contact A et de normale \vec{y}	Tx 0 Tz	Rx Ry Rz	5		$\{\tau_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} Y_{21} \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y})}$ $\begin{Bmatrix} 0 \\ Y_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$	$\{\theta_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x21} \vec{x} + \omega_{y21} \vec{y} + \omega_{z21} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y})}$ $\begin{Bmatrix} \omega_{x21} \\ \omega_{y21} \\ \omega_{z21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\forall P \in (A, \vec{y}), \beta}$

4. Applications

4.1. Vérin simple effet avec un retour ressort

Le vérin ci-dessus est un vérin à air comprimé. La pression d'alimentation p est variable.



Le vérin possède un ressort de rappel.

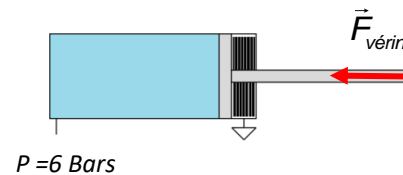
La longueur libre du ressort est : $L_0 = 100 \text{ mm}$.

La raideur du ressort est $k = 10 \text{ N.cm}^{-1}$.

Lorsque la tige du vérin est rentrée, le ressort est comprimé, avec une longueur $L = 65 \text{ mm}$.

La course du vérin est de 55 mm.

- Placer puis exprimer la force \vec{F}_{ress} exercée par le ressort sur la tige du vérin en position au repos.
- Placer puis exprimer la force \vec{F}_{fluide} exercée par le fluide sur la tige du vérin.
- En déduire la pression p minimale d'alimentation nécessaire pour commencer la sortie de tige (sans que le vérin fournisse le moindre effort).
- Pour $p = 6 \text{ bars}$, calculer l'intensité de la force $\vec{F}_{\text{vérin}}$ lorsque que la tige du vérin est entièrement sortie.

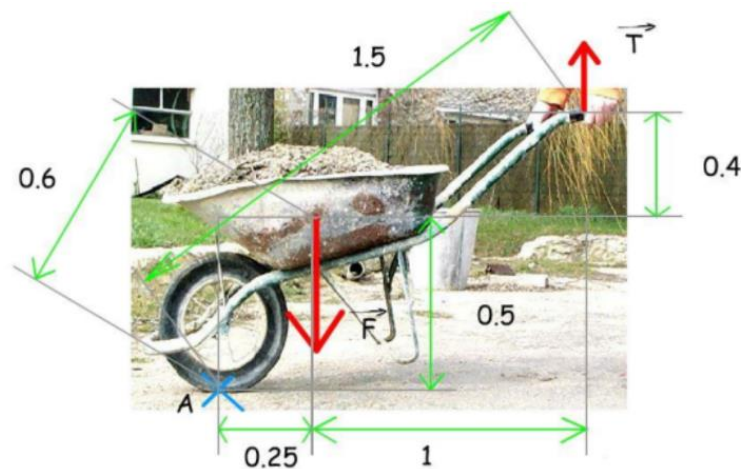


4.2. Calcul d'un moment

- La force \vec{F} représente le poids de la brouette appliqué sur son centre de gravité. \vec{T} est la résultante des forces exercées par la personne sur les bras de la brouette.

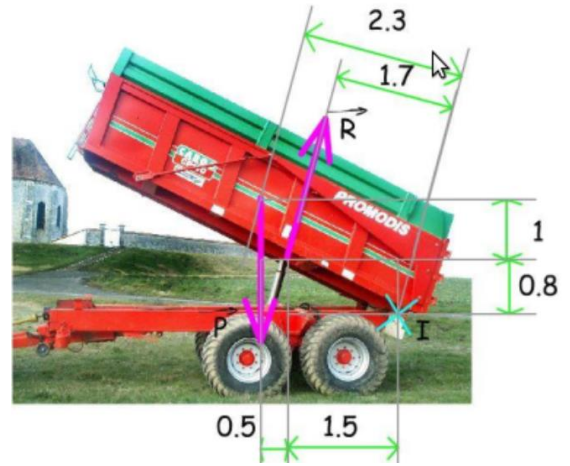
Déterminer le moment en A : $\sum M_A(\vec{F}_{\text{ext}})$ si

$F = 100 \text{ daN}$ et $T = 20 \text{ daN}$, conclure.



b) La benne de la remorque ci-contre a un poids P de 1700 daN, le vérin soulève la benne en générant une force R .

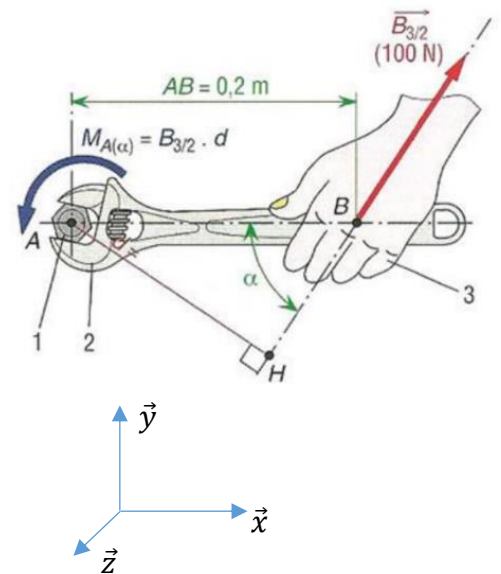
- Déterminer le moment en I : $\sum M_I(\vec{F}_{ext})$.
- En déduire l'intensité de la force R à l'équilibre statique.



4.3. Calcul d'un moment

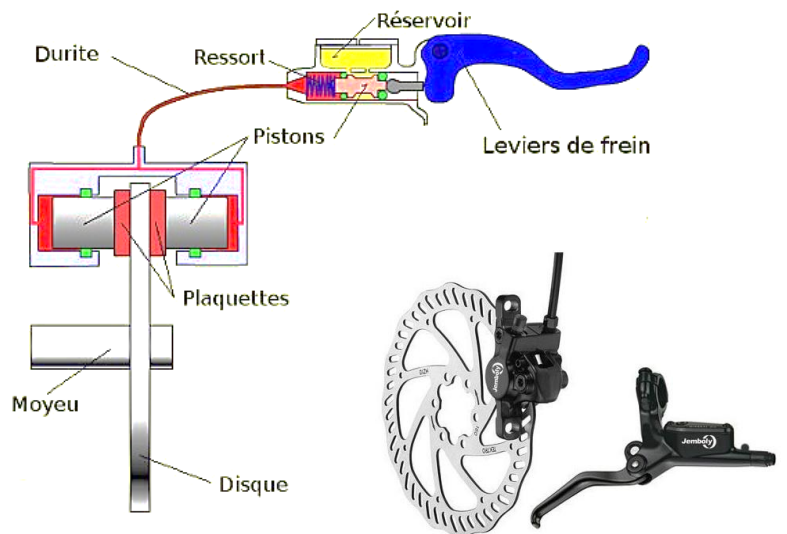
On utilise une clé à molette pour serrer un écrou et l'on s'aperçoit que la position de la main conditionne l'intensité du serrage. Faites les calculs suivants avec $\alpha = 30^\circ$.

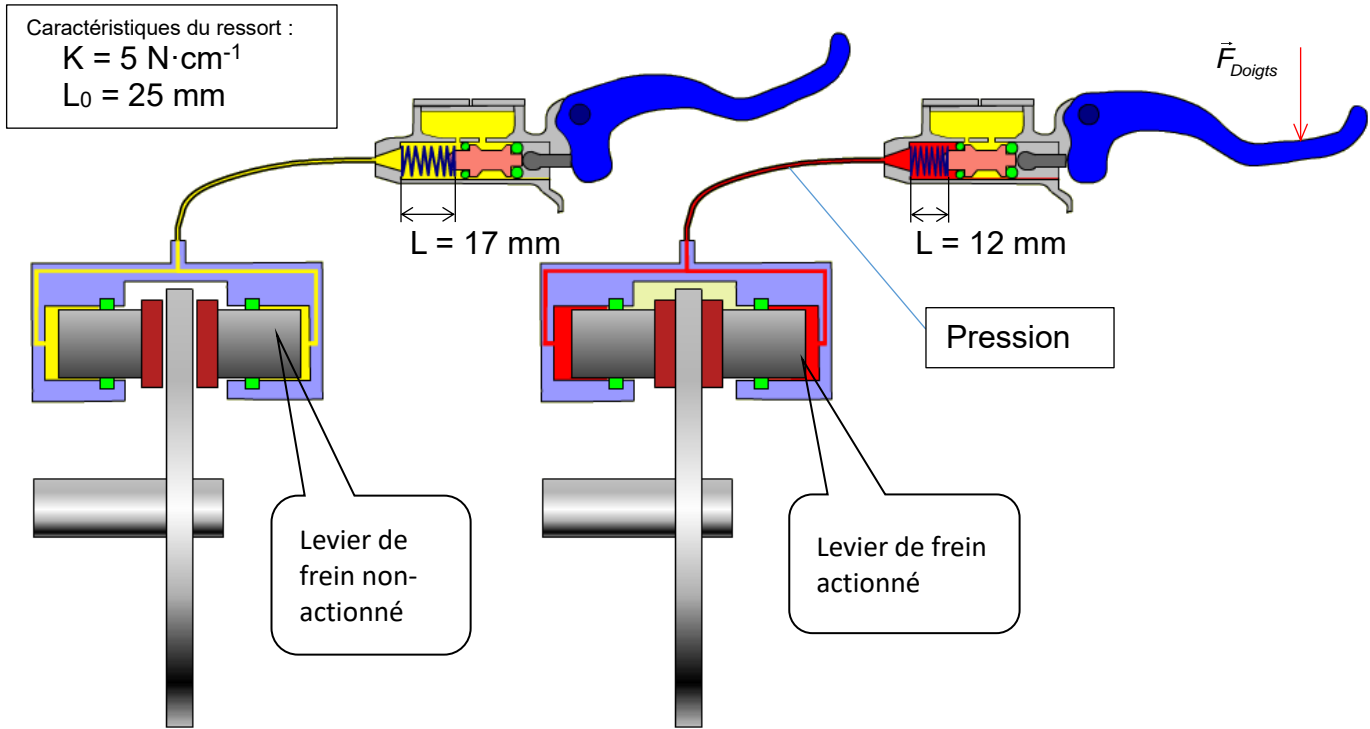
- Calculer le moment $M_A(\vec{B}_{3/2})$
- Exprimer les composantes du vecteur $\vec{B}_{3/2}$ dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ puis recalculer $M_A(\vec{B}_{3/2})$ en utilisant le théorème de Varignon.
- Exprimer les composantes du vecteur \vec{AB} dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, en déduire l'expression du vecteur moment $\vec{M}_A(\vec{B}_{3/2})$. Comparer son module avec le résultat précédent.



4.4. Frein à disque hydraulique de VTT

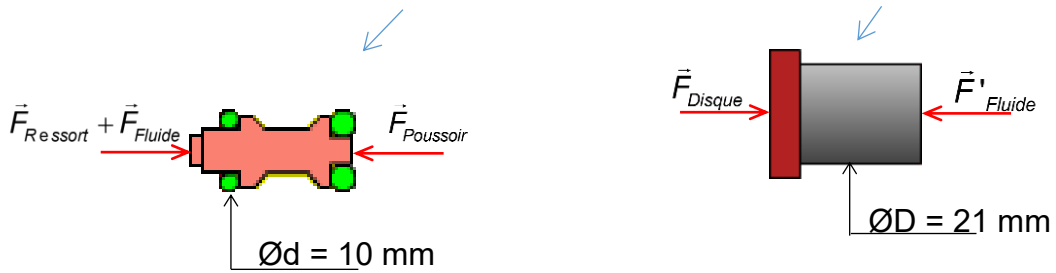
Cette technologie utilise un disque fixé sur le moyeu de la roue et des plaquettes venant le frotter sur chacune de ses faces. La force de frottement entre les plaquettes et le disque crée ainsi le couple de freinage.



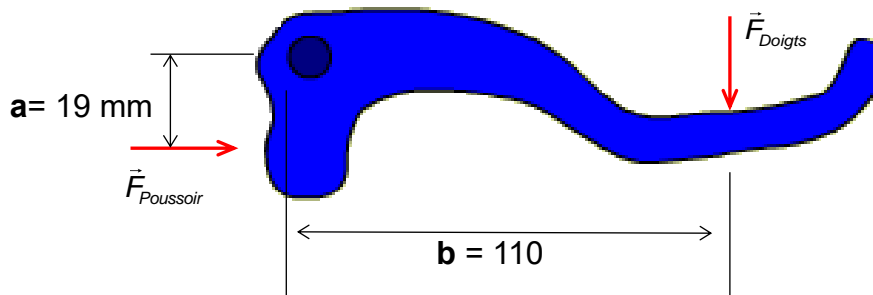


Relations d'équilibres lors du freinage : $\vec{F}_{\text{Ressort}} + \vec{F}_{\text{Fluide}} + \vec{F}_{\text{Poussoir}} = \vec{0}$

$\vec{F}_{\text{Disque}} + \vec{F}'_{\text{Fluide}} = \vec{0}$



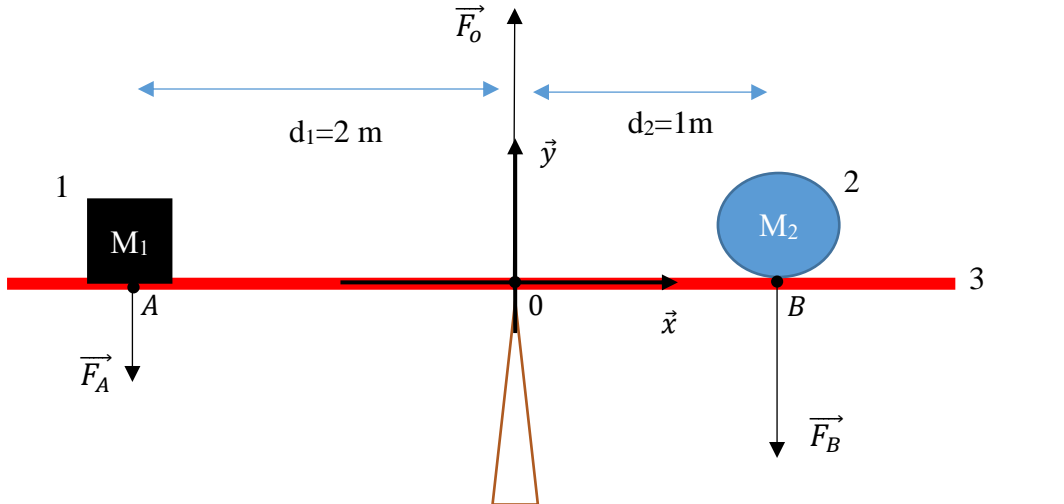
- Pour obtenir un freinage efficace, l'effort F_{Disque} doit être de 250 N, en déduire F'_{Fluide} et la pression p du fluide.
- Calculer l'effort F_{Fluide} , F_{Ressort} , et F_{Poussoir} lors du freinage.
- Calculer l'effort F_{Doigts} lors du freinage à partir de la figure ci-dessous.



4.5. Mise en œuvre de torseurs

On considère une balance de centre O placée à l'origine du plan $0, \vec{x}, \vec{y}$. La masse du plateau sera négligée dans les calculs.

La masse (1) engendre une force \vec{F}_A de 100 N, on souhaite déterminer l'intensité de la force \vec{F}_B due à la masse (2) qui assurera la stabilité du plateau (3) connaissant les distances OA et OB.



\vec{F}_O est la résultante des forces appliquées au point O.

A l'équilibre, toutes les forces n'ont de composantes que sur l'axe \vec{y}

a) Compléter l'écriture des torseurs suivants

$$\left\{ \mathbf{T}_{(1 \rightarrow 3)} \right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{A(1 \rightarrow 3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix} \quad \left\{ \mathbf{T}_{(2 \rightarrow 3)} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{B(2 \rightarrow 3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \mathbf{T}_{(0 \rightarrow 3)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(0 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{O(0 \rightarrow 3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

b) Procéder à un changement de centre de réduction des torseurs $\left\{ \mathbf{T}_{(1 \rightarrow 3)} \right\}_A$ et $\left\{ \mathbf{T}_{(2 \rightarrow 3)} \right\}_B$ pour exprimer les éléments suivants :

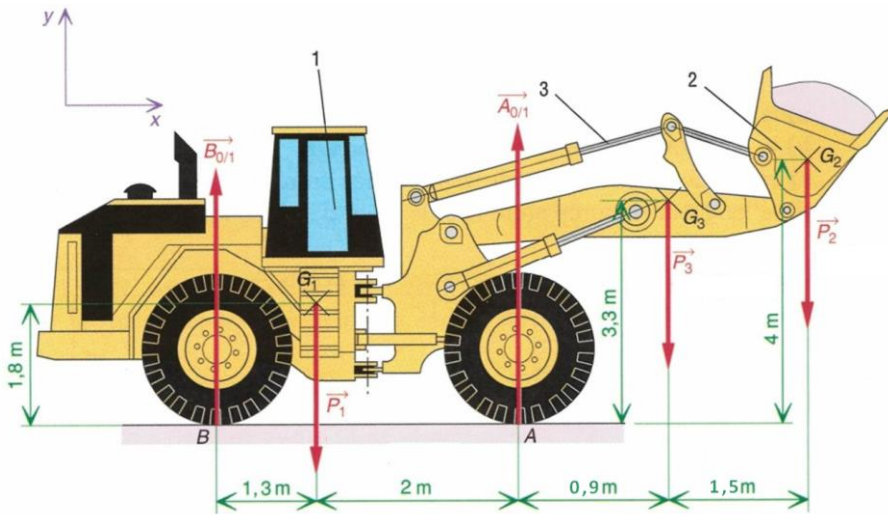
$$\left\{ \mathbf{T}_{(1 \rightarrow 3)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{O(1 \rightarrow 3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix} \quad \left\{ \mathbf{T}_{(2 \rightarrow 3)} \right\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 3)} \\ \vec{M}_{O(2 \rightarrow 3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

c) Déterminer, grâce au Principe Fondamental de la Statique, l'intensité de la force qui doit être appliquée au point B afin que la balançoire soit en équilibre.

4.6. Statique plane, cas de forces parallèles

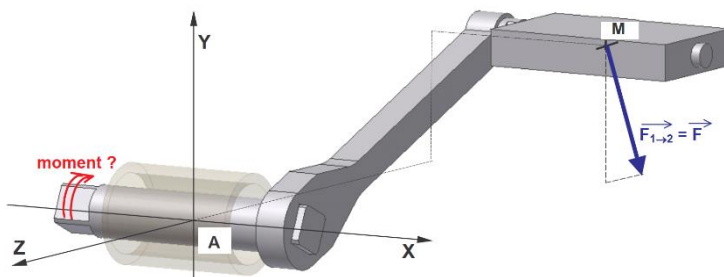
Le chargeur sur pneus se compose d'un châssis 1 (poids \vec{P}_1 de 10 000 daN en G1), d'un godet 2 rempli de matériaux (poids \vec{P}_2 de 5000 daN en G2) et d'un ensemble flèche 3 articulée avec des vérins (poids \vec{P}_3 de 2500 daN en G3). L'ensemble est supposé en équilibre à l'arrêt.

- Isoler l'ensemble $S=\{1,2,3\}$. Effectuer un bilan des actions mécaniques pour discuter de la possibilité de déterminer toutes les inconnues.
- Déterminer les actions du sol sur le chargeur en A et B.
- Quelle est la valeur limite de $\|\vec{P}_2\|$ avant basculement ?
- Procéder aux mêmes calculs en utilisant les torseurs (utiliser TorseurCalc pour les réductions)



4.7. Moment d'une force exprimé sur un pédalier

L'action du pied sur la pédale est représentée par une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ -10 \end{pmatrix}$ Newtons.



$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,05 \\ -0,2 \end{pmatrix} \text{ mètres}$$

- Calculer le vecteur moment de la force $\vec{M}_A(\vec{F}_{1 \rightarrow 2})$. En déduire le moment de $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ par rapport à l'axe de rotation du pédalier (A, \vec{x}).
- Exprimer la même valeur avec la méthode du bras de levier (donner une représentation dans le plan YZ)

