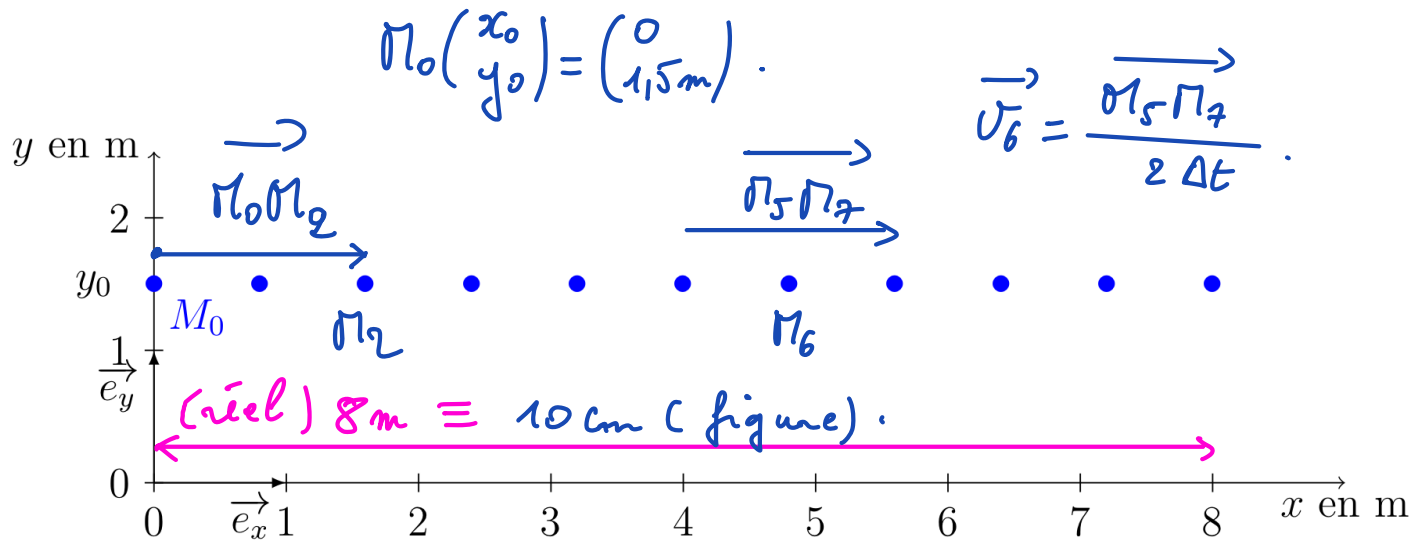


1.1 Mouvement rectiligne uniforme

On considère le mouvement d'un palet de hockey sur glace :



1.1.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. Que remarque-t-on?

On mesure $\|\vec{M_0 M_2}\| \equiv 2 \text{ cm (figure)}$
 $= 1.6 \text{ m (réel)}$

d'où $\|\vec{v}_1\| = \frac{\|\vec{M_0 M_2}\|}{2 \Delta t} = \frac{1.6}{0.2} = 8 \text{ m.s}^{-1}$
 $\equiv 10 \text{ cm (figure)}$

On voit que $\vec{M_0 M_2} = \vec{M_1 M_3} = \vec{M_2 M_4} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3$

figure	réel
10 cm	8 m
1 cm	0.8 m
	$\times 0.8 \times 10^2$
	$= 80$

1.1.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_i$.

On en déduit $\forall i : \vec{a}_i \approx \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2 \Delta t} = \vec{0}$ car $\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_{i-1}$.

1.1.3. Sachant que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du palet.

On a $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 & (1) \\ \ddot{y}(t) = 0 & (2) \end{cases}$

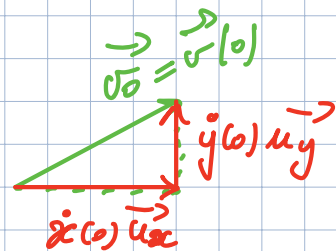
Rappel : Si $f(t) = g(t) \forall t \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$.

On intègre (1) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\int_0^t \ddot{x}(t') dt' = \int_0^t 0 dt'$$

$$\Leftrightarrow \left[\dot{x}(t') \right]_0^t = 0$$

rappel si



$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}(0) \quad \text{on} \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} v_0 = \dot{x}(0) \\ 0 = \dot{y}(0) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x}(t) = v_0} \quad (3)$$

On intègre (2) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{\dot{y}(t) = 0} \quad (4)$$

On intègre (3) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\int_0^t \dot{x}(t') dt' = \int_0^t v_0 dt'$$

$$\Leftrightarrow \left[x(t') \right]_0^t = \left[v_0 t' \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow x(t) - \underbrace{x(0)}_0 = v_0 \times t \quad \text{car} \quad \vec{OM}_0 = \vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = v_0 t} \quad (5)$$

On intègre (4) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\int_0^t \dot{y}(t') dt' = 0$$

$$\Leftrightarrow [y(t)]_0^t = 0$$

$$\Leftrightarrow y(t) - y(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(t) = y(0)$$

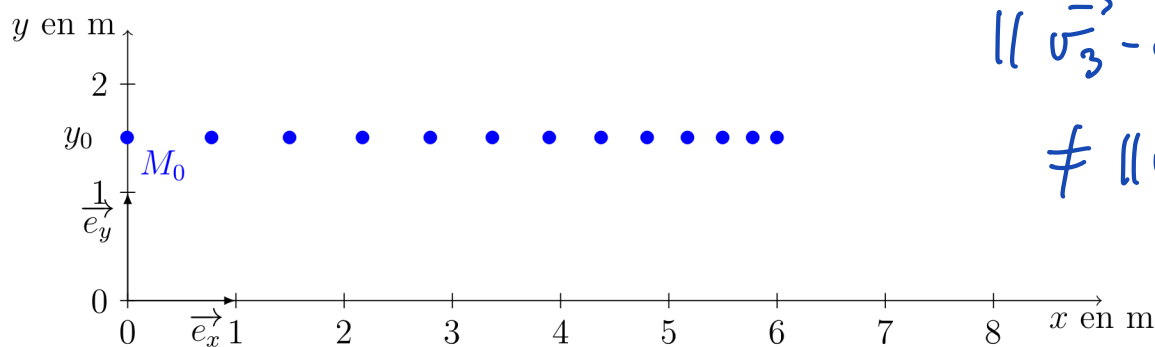
$$\text{or } y(0) = 1,5 \text{ m} = y_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = y_0} \quad (6)$$

~~Gabriel~~

1.2 Mouvement rectiligne uniformément décéléré

On considère le mouvement d'un palet de hockey sur une surface rugueuse :



$$\|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\|$$

$$\neq \|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\|$$

1.2.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ échelle de 0,8 m/cm

On mesure $M_0 M_2 = \underbrace{1,85}_{\text{cm sur le schéma}} \times 0,8 = 1,48 \text{ m} \Rightarrow v_1 = \frac{1,48}{0,2} = 7,4 \text{ m.s}^{-1} \equiv 3,7 \text{ cm (figure)}$

De même $\|\vec{v}_2\| = v_2 = 7 \text{ m.s}^{-1}$

$$v_3 = 6,4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_4 = 6 \text{ m.s}^{-1}$$

1.2.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Que remarque-t-on?

On calcule $\|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\| \equiv 0,5 \text{ m} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ Rq: $\vec{v}_1 = \bar{v}_1 \vec{e}_x$

on encore $\vec{v}_3 - \vec{v}_1 = (\bar{v}_3 - \bar{v}_1) \vec{e}_x = (6,4 - 7,4) \vec{e}_x$
 $\underbrace{\quad}_{\text{norme algébrique de } \vec{v}_3} = -1 \vec{e}_x \text{ en } \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

On en déduit $\|\vec{a}_2\| = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \equiv 1 \text{ cm} \text{ (figure)}$

puis $\vec{a}_2 = -5 \vec{e}_x \text{ en } \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

De même, on vérifie que $\vec{a}_3 = \vec{a}_2$.

$\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}_{\text{norme algébrique}} = \bar{a}$

1.2.3. Sachant que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que $\vec{a} = \bar{a} \vec{e}_x$ avec $\bar{a} = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du palet.

On sait que $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$

On a de plus : $\vec{a} = \bar{a} \vec{e}_x \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = \bar{a} < 0 & (1) \\ \ddot{y}(t) = 0 & (2) \end{cases}$

* On intègre (1) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\int_0^t \ddot{x}(t') dt' = \int_0^t \bar{a} dt'$$

Rappel: $\bar{a} = -5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{cst.}$

$$\Leftrightarrow \left[\dot{x}(t') \right]_0^t = \left[\bar{a} t' \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{v_0} = \bar{a} t \Leftrightarrow \boxed{\dot{x}(t) = \bar{a} t + v_0} \quad (3)$$

* On intègre (2) entre $t=0$ et t quelconque:

$$\dot{y}(t) - \underbrace{\dot{y}(0)}_0 = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0$$

De même, $\forall t: y(t) - \underbrace{y(0)}_{y_0} = 0 \Rightarrow y(t) = y_0$ (constant) (6)

* On intègre (3)

Méthode 1

$$\int_0^t \dot{x}(t') dt' = \int_0^t (\bar{a}t' + v_0) dt'$$

$$\Rightarrow \left[x(t') \right]_0^t = \left[\bar{a} \frac{t'^2}{2} + v_0 t' \right]_0^t$$

$$\Rightarrow x(t) - \underbrace{x(0)}_0 = \bar{a} \frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Au final: $x(t) = \bar{a} \frac{t^2}{2} + v_0 t$ (5)

Méthode 2 : on primitive (3)

Rappel : si $f(t) = g(t)$

$\underbrace{F(t)}_{\text{primitive de } f} = G(t) + \text{cst.}$

(3) $\Rightarrow x(t) = \bar{a} \frac{t^2}{2} + v_0 t + \text{cst}$

On $x(0) = 0$

$\Rightarrow 0 = \bar{a} \times \frac{0^2}{2} + v_0 \times 0 + \text{cst}$

$\Rightarrow \text{cst} = 0$

Au final: $x(t) = \bar{a} \frac{t^2}{2} + v_0 t$

$\rightarrow$ avec $\bar{a} = -\|\vec{a}\| = -5 \text{ m.s}^{-2}$

Soit $f(t) = g(t) \quad \forall t$ et $F(t), G(t)$ leurs primitives.

$$\int_0^t f(u) du = \int_0^t g(u) du$$

$$\left[F(u) \right]_0^t = \left[G(u) \right]_0^t$$

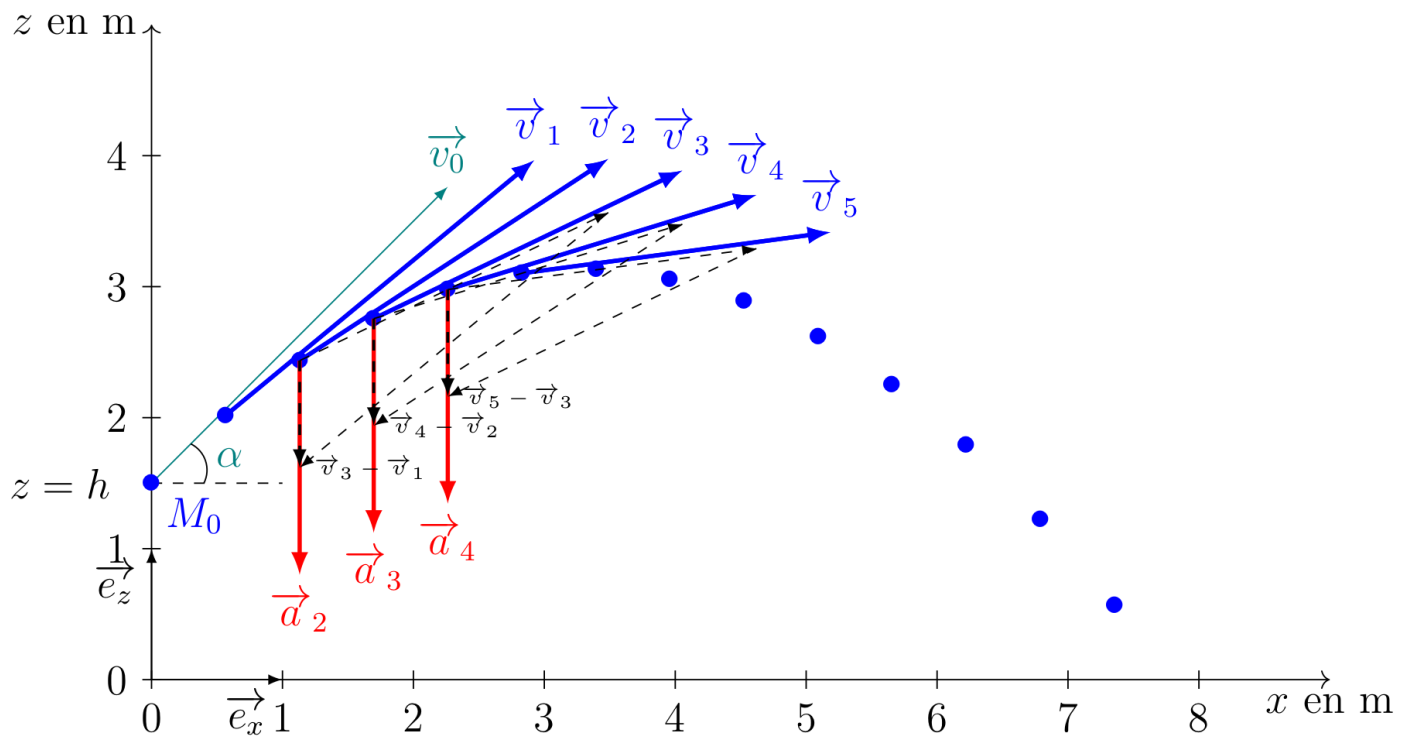
$$F(t) - F(0) = G(t) - G(0)$$

$$F(t) = G(t) + \underbrace{F(0) - G(0)}_{\text{cst}}$$

1.3 Mouvement à vecteur accélération constant

On considère le mouvement d'un projectile M dans un plan vertical :

1.3.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.



Pour tracer $\vec{v}_1 = \frac{\vec{M_0M_2}}{2\Delta t}$:

Le sens et la direction de $\vec{v}_1$ sont ceux de $\vec{M_0M_2}$, on place donc sa règle selon $\vec{M_0M_2}$ puis on la déplace de manière à ce qu'elle reste parallèle à $\vec{M_0M_2}$ pour tracer la direction de $\vec{v}_1$ qui passe par M_1 .

Pour le module $\|\vec{v}_1\|$, on mesure $M_0M_2 \equiv 1,85 \text{ cm}$ sur le schéma

d'où $M_0M_2 = 1,85 \times 0,8 = 1,48 \text{ m en réel}$

On en déduit $\|\vec{v}_1\| = \frac{M_0M_2}{2\Delta t} = \frac{1,48}{0,2} \approx 7,4 \text{ m s}^{-2} \equiv 3,7 \text{ cm sur le schéma}$

Et ainsi de suite pour $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

1.3.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Que remarque-t-on?

On a $\vec{a}_2 = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{2 \Delta t}$, pour le tracer on part de M_2 puis on

tracé $\vec{v}_3 - \vec{v}_1$ (reporter $\vec{v}_3$ en partant de M_2 puis $-\vec{v}_1$ en partant de la pointe de $\vec{v}_3$ ainsi tracé).

On mesure ensuite $\|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\| \equiv 1 \text{ cm} = 1 \times 2 = 2 \text{ m.s}^{-1}$

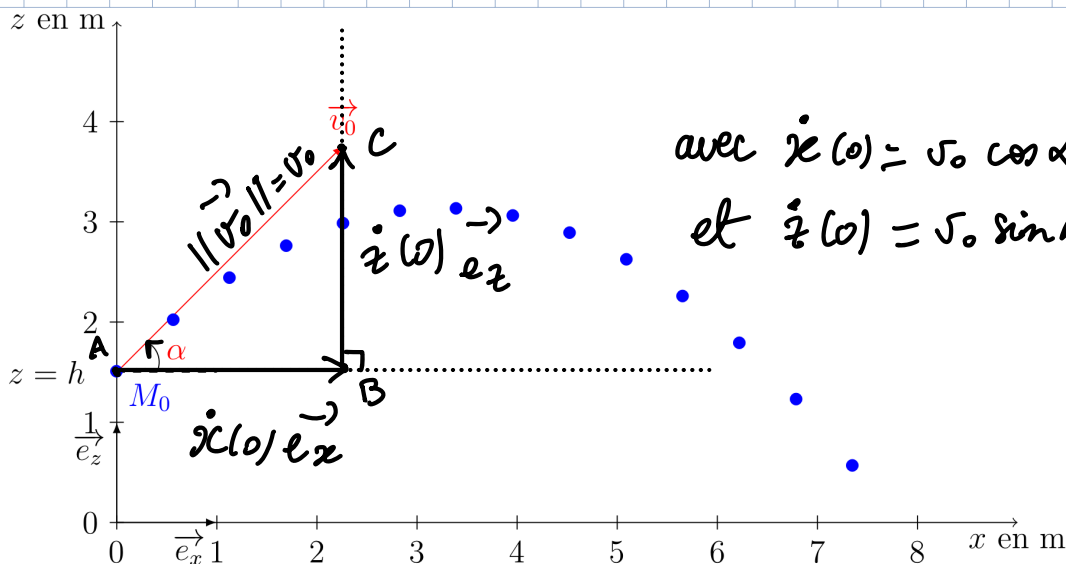
$$\triangle ! \quad \|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\| \neq \|\vec{v}_3\| - \|\vec{v}_1\|$$

On en déduit $\|\vec{a}_2\| = \frac{\|\vec{v}_3 - \vec{v}_1\|}{2 \Delta t} = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ m.s}^{-2} \equiv 2 \text{ cm sur le schéma}$

Et ainsi de suite ...

On remarque que $\vec{a}(t) = \vec{a}$

1.3.3. Sachant que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est telle que $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\vec{a} = -g \vec{e}_z$ avec $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du mobile.



$$\text{avec } \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \quad \text{et} \quad \dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$$

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \quad \text{avec } g = \|\vec{g}\|.$$

Dans le triangle ABC : $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{z}(0) = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$: C.I. sur $\vec{v}$

On a aussi $\begin{cases} x(0) = 0 \\ z(0) = h \end{cases}$: C.I. sur $\vec{OM}$.

* On connaît $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \quad (S1)$.

* j'intègre (S1) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \quad (S2)$$

* j'intègre (S2) entre $t=0$ et t quelconque :

$$\begin{cases} x(t) - \overbrace{x(0)}^{\text{}} = v_0 \cos(\alpha) \times t \\ z(t) - \underbrace{z(0)}_h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \times t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t & (A) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h & (B) \end{cases} \quad (S3)$$

1.3.4. En déduire l'équation de la trajectoire $z(x)$. Comment s'appelle ce type de courbe ?

$$(A) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$\text{puis (B)} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} + h$$

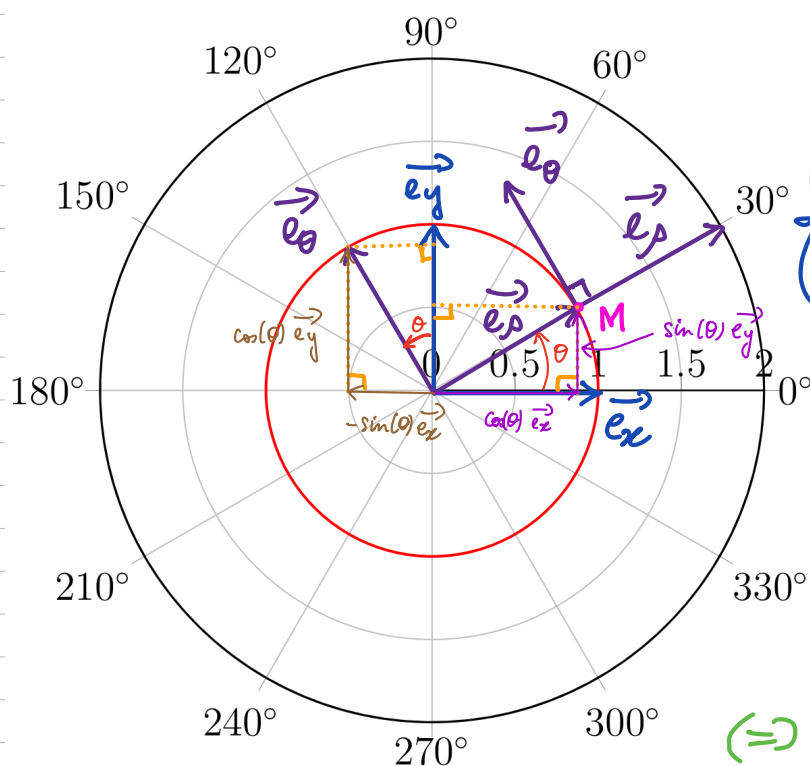
$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x + h$$

2 Mouvement circulaire uniforme ou non uniforme

On se place dans la base polaire pour décrire le mouvement circulaire d'un point M repéré par $\rho(t) = R = 1 \text{ m}$ et $\theta(t)$ (dont on donnera les caractéristiques plus loin).

2.1. Représenter les vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ de la base cartésienne en O et les vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ de la base polaire en M $(1; \frac{\pi}{6})$.

2.2. Exprimer les vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne.



D'après la figure :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$$

Rappel: $f: x \mapsto \cos x$

$g: t \mapsto \theta(t)$

$$(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \frac{d}{dt} (\cos \theta(t)) &= -\sin(\theta(t)) \times \dot{\theta}(t) \\ &= \frac{d}{d\theta} (\cos \theta) \times \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

2.3. Montrer que $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho$. On rappelle que $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} (\cos(\theta(t))) \vec{e}_x + \frac{d}{dt} (\sin(\theta(t))) \vec{e}_y \\ &= -\sin(\theta(t)) \times \dot{\theta}(t) \vec{e}_x + \cos(\theta(t)) \times \dot{\theta}(t) \vec{e}_y \\ &= \dot{\theta}(t) \times \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} (-\sin \theta) \times \vec{e}_x + \frac{d}{dt} (\cos \theta) \times \vec{e}_y \\ &= -\dot{\theta} \cos(\theta) \times \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \times \vec{e}_y \\ &= -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

2.4. En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base polaire en fonction de R , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

On a $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho)$ or $\rho = 1m = cst.$
 $= \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Puis $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$
 can $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho$ avec $\rho = R = cst.$

2.5. On note $v = R\dot{\theta}$, montrer que $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

On a $v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} = R \dot{\theta}^2$ d'où $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

Dans un premier temps, on considère un mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire tel que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante. On donne $\dot{\theta} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} = 6,28 \text{ rad.s}^{-1}$.

2.6. En déduire que $\|\vec{v}\| = cst$ et calculer sa valeur.

On a $\|\vec{v}\| = R |\dot{\theta}| = R \dot{\theta}$ car $\dot{\theta} > 0$
 $= 1 \times 2\pi = 6,28 \text{ m.s}^{-1}$

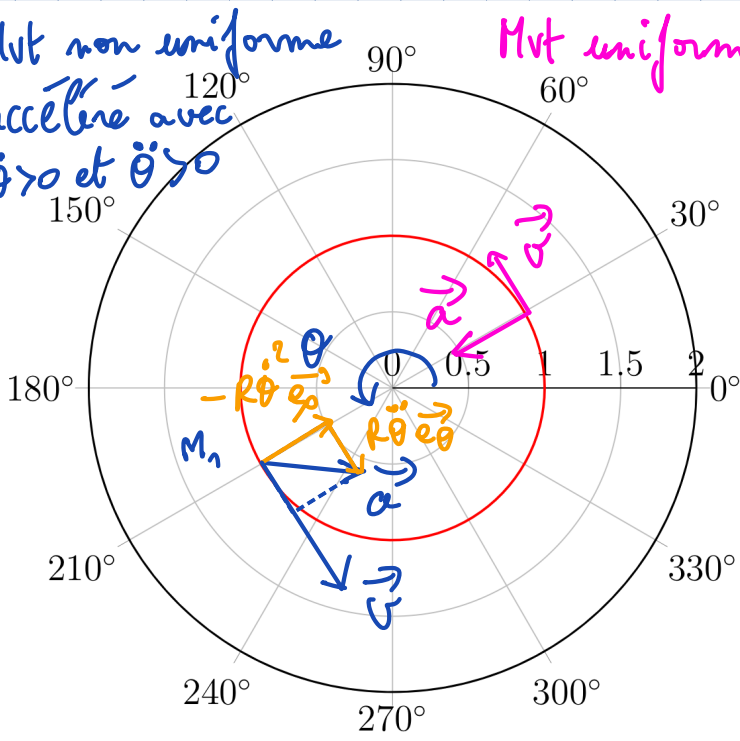
2.7. En déduire que l'accélération est radiale, donner son expression et calculer sa norme, puis tracer son allure en $M(1, \frac{\pi}{6})$.

Si $\dot{\theta} = cst = 2\pi \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_\rho$

$\Rightarrow$ l'accélération est radiale car dirigée selon $\vec{e}_\rho$.

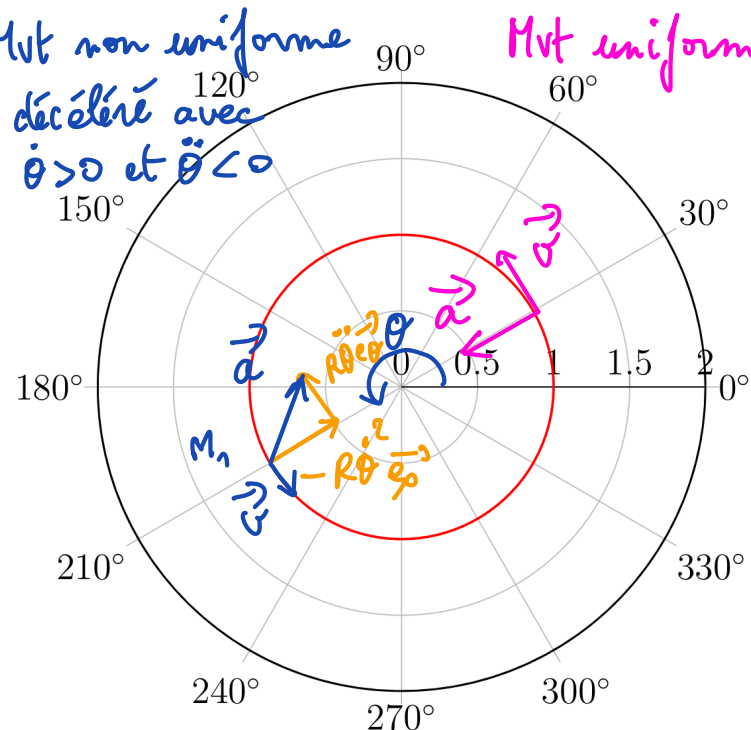
d'où $\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R} = R \dot{\theta}^2 = 1 \times 4\pi^2 = 39 \text{ m.s}^{-2}$

Mvt non uniforme
accéléré avec
 $\dot{\theta} > 0$ et $\ddot{\theta} > 0$



Mvt uniforme

Mvt non uniforme
décéléré avec
 $\dot{\theta} > 0$ et $\ddot{\theta} < 0$

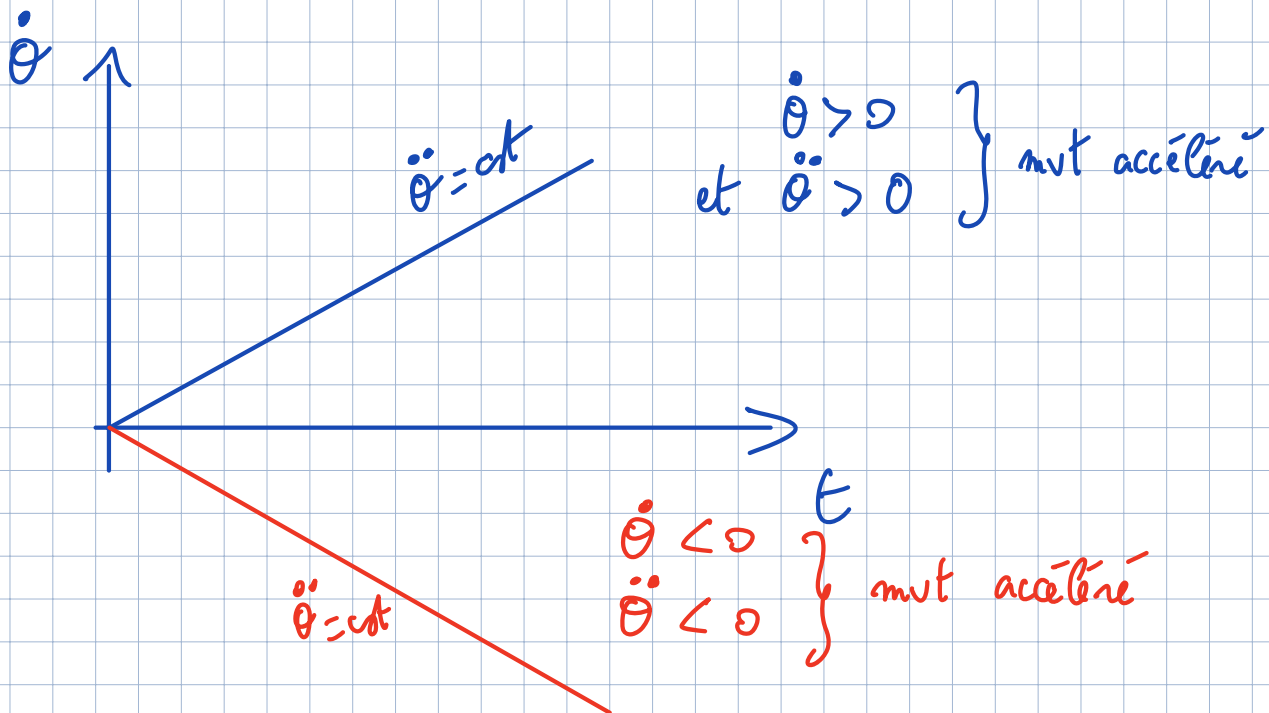


Mvt uniforme

Dans un second temps, on considère un mouvement circulaire non uniforme, c'est-à-dire tel que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ n'est pas constante. On donne $\dot{\theta} > 0$.

2.8. Dans quel sens tourne le point M ? Dans le sens trigonométrique.

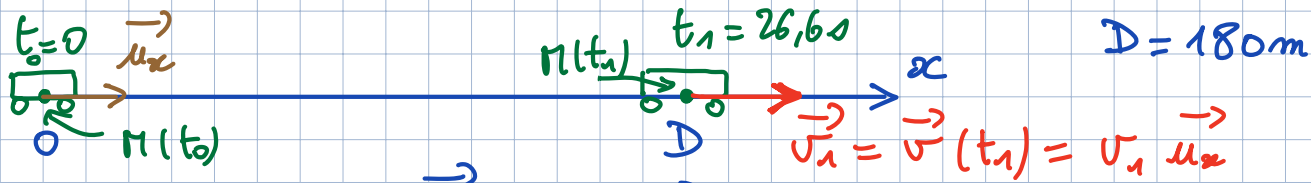
2.9. Représenter l'allure de $\vec{a}$ en $M_1(1, \frac{7\pi}{6})$ dans le cas où $\ddot{\theta} > 0$ (mouvement accéléré) et dans le cas où $\ddot{\theta} < 0$ (mouvement décéléré) voir ci-dessous.



3 Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

3.1. Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180$ m. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D .



vecteur position : $\vec{OM} = x \vec{u}_x$

" vitesse : $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$

" accélération : $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$ avec $\ddot{x} = a$ (constante)

* J'intègre (1) entre $t_0 = 0$ et t quelconque:

$$\dot{x}(t) - \underbrace{\dot{x}(0)}_0 = at \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = at} \quad (2)$$

* J'intègre (2) entre $t_0 = 0$ et t quelconque:

$$x(t) - \underbrace{x(0)}_0 = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2} at^2} \quad (3)$$

* On sait que $x(t_1) = D \Leftrightarrow \frac{1}{2} at_1^2 = D$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2D}{t_1^2} = \frac{2 \times 180}{26,6^2} = 0,509 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (3 \text{CS}).$$

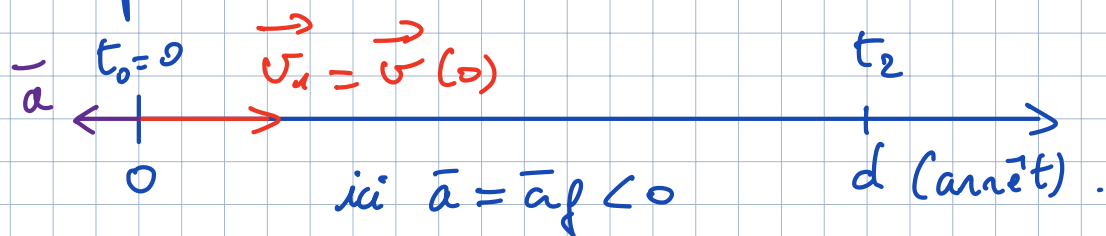
* la vitesse atteinte à t_1 est v_1 telle que:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}(t_1) = at_1 = \frac{2D}{t_1^2} \times t_1 = \frac{2D}{t_1} = 13,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= \frac{13,5 \times 3600}{1000} = 48,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Rq: } v_{\text{moy}} = \frac{D}{t_1} = \frac{180}{26,6} = \frac{13,5 \times 10}{1} \text{ km} = \frac{13,5 \times 3600}{10^3} \times \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

3.2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de 7 m.s^{-2}

On replace l'origine des temps et l'origine de l'axe au début de la phase de décélération.



On aura $\ddot{x} = \bar{a}_f < 0$

int. $\Rightarrow \underbrace{\ddot{x}(t) - \ddot{x}(0)}_{v_1} = \bar{a}_f \times t \Rightarrow \ddot{x}(t) = \bar{a}_f t + v_1$

int. $\Rightarrow \underbrace{x(t) - x(0)}_0 = \frac{1}{2} \bar{a}_f t^2 + v_1 \times t$

* l'instant d'arrêt t_2 est tel que :

$$\ddot{x}(t_2) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 0 = \bar{a}_f t_2 + v_1 \quad (\Rightarrow) \quad t_2 = -\frac{v_1}{\bar{a}_f} > 0$$

* On en déduit la distance d'arrêt d :

$$\begin{aligned} d &= x(t_2) = \frac{1}{2} \bar{a}_f t_2^2 + v_1 t_2 = \frac{1}{2} \cancel{\bar{a}_f} \frac{v_1^2}{\cancel{\bar{a}_f^2}} - \frac{v_1^2}{\bar{a}_f} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v_1^2}{\bar{a}_f} > 0 \quad \text{car } \bar{a}_f < 0. \\ &= 13 \text{ m.} \end{aligned}$$

4 Interpellation pour vitesse excessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et **accélère uniformément**. Le gendarme atteint la vitesse de $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ au bout de 10 s .

4.1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?

- Notons x_v l'abscisse de la voiture.
- " x_m " " moto.

Rappel: $v_1 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 $= \frac{90 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$
 $= \frac{90}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



- * la moto roule à $a = \text{cst}$: $x_m^{(1)} = \frac{1}{2} a t^2$ et $\dot{x}_m(t) = a t$

- * On sait qu'à $t_1 = 10 \text{ s}$, la moto atteint $v_1 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$:

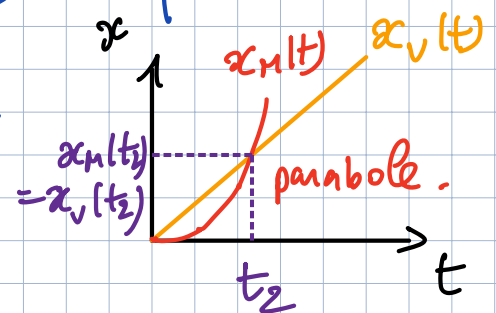
$$\dot{x}_m(t_1) = v_1 \Leftrightarrow a t_1 = v_1 \Leftrightarrow a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{90}{3,6 \times 10} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- * la voiture roule à $\dot{x}_v(t) = v_0 = \text{cst}$
 $\Rightarrow x_v(t) = v_0 t$

- * la moto rattrape la voiture à l'instant t_2 tel que:

$$x_m(t_2) = x_v(t_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} a t_2^2 = v_0 t_2$$

$$\Leftrightarrow t_2 = \frac{2 v_0}{a} = \frac{2 \times 100}{3,6 \times 2,5} = 22,2 \text{ s.}$$



4.2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?

La distance parcourue par la moto est D telle que

$$\begin{aligned} D &= x_m(t_2) = \frac{1}{2} a t_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2,5 \times 22,2^2 \\ &= 616 \text{ m} \end{aligned}$$

4.3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

La vitesse v_2 atteinte par la moto est d telle que :

$$d = x_H(t_2) = a \times t_2$$

$$= 2,5 \times 22,2$$

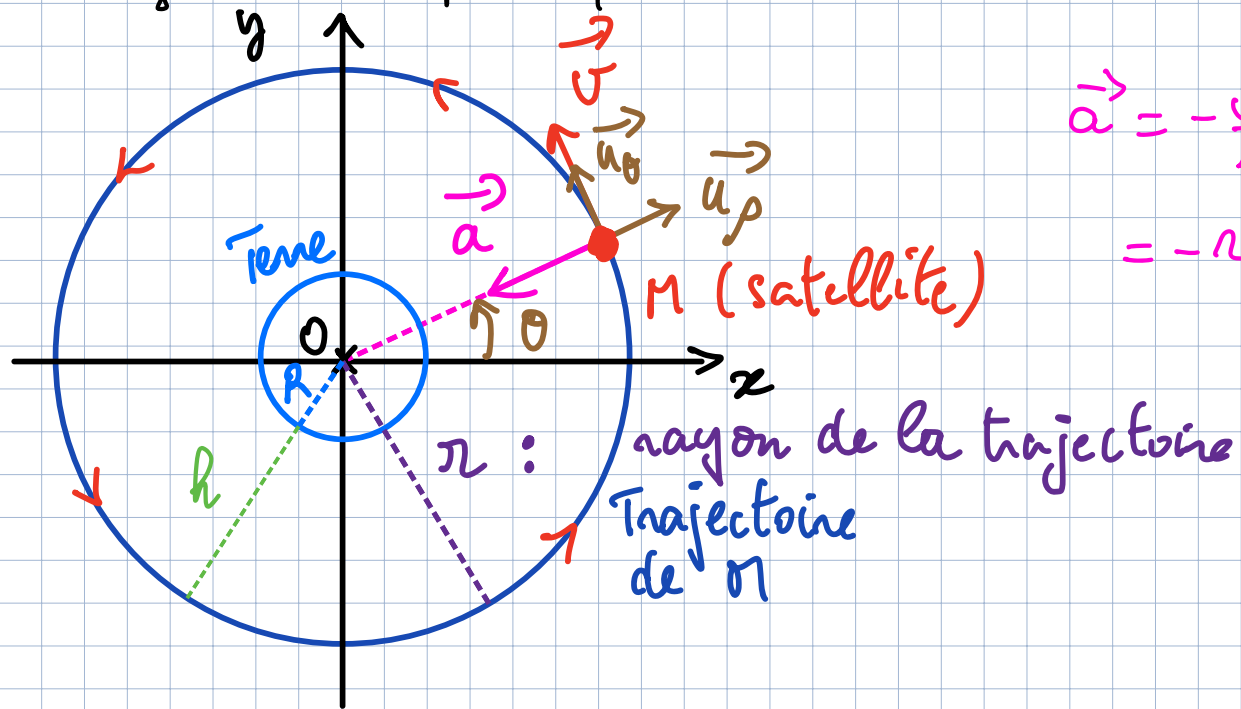
$$= 55,5 \text{ m.s}^{-1} = 55,5 \times 3,6 \approx 200 \text{ km.h}^{-1}$$

$$\frac{1 \text{ m}}{\text{s}} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ km}}{\text{h} / 3600} = 3600 \times 10^{-3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

5 Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il subit une accélération $a = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2$, où $R = 6380 \text{ km}$ est le rayon de la Terre, $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

Figure dans le plan équatorial :



5.1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis sa vitesse angulaire Ω .

$$T = 24 \times 3600 = 86400 \text{ s} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Omega = \Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,25 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}}$$

5.2. Déterminer l'altitude du satellite en orbite géostationnaire.

Rappel : $\vec{OM} = r \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho \quad (p=r)$

d'où $\|\vec{a}\| = r \Omega^2 = g_0 \frac{R^2}{r^2} \Rightarrow r^3 = g_0 \frac{R^2}{\Omega^2}$

$$\Rightarrow \underline{r} = \left(g_0 \frac{R^2}{\Omega^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{9,81 \times (6,38 \times 10^6)^2}{(7,25 \times 10^{-5})^2} \right)^{1/3} = \underline{42,2 \times 10^3 \text{ km}}$$

$$\text{d'où } \underline{h} = r - R \simeq (42,2 - 6,4) \times 10^3 \text{ km} = \underline{35,8 \times 10^3 \text{ km.}}$$

5.3. Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.

On a $\boxed{\vec{v} = r \Omega \vec{u}_\theta \text{ avec } \|\vec{v}\| = r \Omega = 3,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.}$