

Applications linéaires Chapitre 3

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 3-1 Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x - y, 2x - 3y, x + 2y)$. Montrons que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $u = (x, y), v = (x', y')$ d'où : $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$

Et

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x' - (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y'), \lambda x + x' + 2(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(x - y, 2x - 3y, x + 2y) + (x' - y', 2x' - 3y', x' + 2y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. exo 3-2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], f(P) = P'$. (P' étant la dérivée de P). Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

1. Tout d'abord si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n - 1 \leq n$.

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ (1).

2. Montrons ensuite que f est linéaire :

$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[x], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f((\lambda P + Q)(x)) &= (\lambda P + Q)'(x) \\ &= \lambda P'(x) + Q'(x) \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda f(P(x)) + f(Q(x)) \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ (d'après (1)).

Par conséquent f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 3. exo 3-3

1. On reprend l'exo 2, déterminons $\text{Ker}(f)$. On a $\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[x], P' = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_0[x]\} = \mathbb{R}_0[x]$.
(car dire que $P' = 0$ implique $P = \text{constante}$)

NB : f n'est pas injective.

2. On reprend l'exo 1, déterminons $\text{Ker}(f)$.

On a $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0, 2x - 3y = 0, x + 2y = 0\}$.

$$\text{On résout } \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0. \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Par conséquent : $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et donc f est injective.

Exercice 4. exo 3-4 et 3-5

1. On reprend l'exo 2, déterminons $\text{Im}(f)$.

On a vu à l'exo 2 que $\deg(f(P)) \leq n - 1$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

On sait déjà que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Puis, si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ alors on peut toujours trouver un polynôme de degré au plus n tel que $P' = Q$ (Q est continue donc admet des primitives).

D'où $\mathbb{R}_{n-1}[x] \subset \text{Im}(f)$. Finalement $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[x] \neq \mathbb{R}_n[x]$ donc f n'est pas surjective.

$\dim(\text{Im}(f)) = n$.

2. On reprend l'exo 1, déterminons $\text{Im}(f)$.

On considère la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}((f((1, 0)), f((0, 1))) = \text{Vect}(((1, 2, 1), (-1, -3, 2)))$

Avec $((1, 2, 1), (-1, -3, 2))$ famille libre car deux vecteurs non colinéaires.

Donc $((1, 2, 1), (-1, -3, 2))$ est une base de $\text{Im}(f)$ qui est donc de dimension 2.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, définie par $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(u) = (x + y, 2x + 2y)$.

Donnons $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

On sait par hypothèses que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y, 2x + 2y) = (0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -y\}$$

$$= \{(-y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Vect}((-1, 1))$$

De plus, $(-1, 1)$ étant unique et non nul, c'est une famille libre et étant génératrice, c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

NB : $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

Considérons la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Alors, } \text{Im}(f) = \text{Vect}((f(e_1), f(e_2))) = \text{Vect}((1, 2)) \text{ car } f(e_1) = f((1, 0)) = (1, 2) = f((0, 1)) = f(e_2).$$

De plus, $(1, 2)$ est unique et non nul donc libre et engendre $\text{Im}(f)$ c'est donc une base de $\text{Im}(f)$.

NB : $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$ donc f non surjective.

Exercice 5. exo 3-6

Déterminons le rang de l'application f définie de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathbb{R}^3$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], f(P) = (P(1), P'(1), P(0))$.

Il faut d'abord prouver que f est linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathbb{R}^3$.

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[x], \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f((\lambda P + Q)(x)) = (\lambda P + Q)(1), (\lambda P + Q)'(1), (\lambda P + Q)(0)$$

$$= (\lambda P(1) + Q(1), \lambda P'(1) + Q'(1), \lambda P(0) + Q(0)) \text{ par propriétés des fonctions et linéarité de la dérivation}$$

$$= \lambda(P(1), P'(1), P(0)) + (Q(1), Q'(1), Q(0))$$

$$= \lambda f(P(x)) + f(Q(x))$$

L'application f est bien linéaire de $\mathbb{R}_2[x]$ vers $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver le $\text{rg}(f)$, deux méthodes possibles : soit passer par le calcul de $\text{Im}(f)$ soit par celui de $\text{Ker}(f)$ avec le théorème du rang pour conclure.

- Première méthode : calcul de $\text{Im}(f)$

On considère la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: (P_0, P_1, P_2) , avec $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2$:

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((f(P_0), f(P_1), f(P_2))).$$

$$f(P_0) = (P_0(1), P_0'(1), P_0(0)) = (1, 0, 1) \text{ car } P_0(x) = 1 \text{ pour tout réel } x \text{ donc } P_0(1) = P_0(0) = 1 \text{ et } P_0'(x) = 0 \text{ donc } P_0'(1) = 0.$$

$$f(P_1) = (P_1(1), P_1'(1), P_1(0)) = (1, 1, 0) \text{ car } P_1(x) = x \text{ pour tout réel } x \text{ donc } P_1(1) = 1, P_1(0) = 0 \text{ et } P_1'(x) = 1 \text{ donc } P_1'(1) = 1$$

$$f(P_2) = (P_2(1), P_2'(1), P_2(0)) = (1, 2, 0) \text{ car } P_2(x) = x^2 \text{ pour tout réel } x \text{ donc } P_2(1) = 1, P_2(0) = 0 \text{ et } P_2'(x) = 2x \text{ donc } P_2'(1) = 2.$$

$$\text{D'où : } \text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0)).$$

Regardons si la famille $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0))$ est libre :

Soient α, β, γ des réels on résout l'équation de liberté :

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 2, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0, \beta + 2\gamma = 0, \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la famille est libre et étant génératrice, c'est une base de $\text{Im}(f)$ donc

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3 = \text{rg}(f)$$

- Deuxième méthode : calcul de $\text{Ker}(f)$.

On a

$$\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[x], (P(1), P'(1), P(0)) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{P \in \mathbb{R}_2[x], P(1) = 0, P'(1) = 0, P(0) = 0\}$$

Or, $P \in \mathbb{R}_2[x]$ signifie qu'il ne peut avoir au plus que 2 racines.

Mais, on a $P(1) = 0 = P'(1)$ donc 1 est racine double de P et $P(0) = 0$ 0 est aussi racine de P ce qui donne 3 racines pour P ce qui est impossible à moins d'être le polynôme nul.

Ainsi : $\text{Ker}(f) = \{0\}$ (f est injective)

Et d'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f) + 0 \text{ d'où } \text{rg}(f) = 3.$$

Exercice 6. exo 3-7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$.

Que peut-on dire de f ?

On sait déjà que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par hypothèses.

A est inversible car ses colonnes ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

$$\ker(f) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0\} \stackrel{\text{car } A \text{ inversible}}{=} \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^{-1}AM = M = A^{-1}.0 = 0\} = \{0\}.$$

Donc f est injective (donc bijective) d'où f est finalement un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7. exo 3-8 Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (2x + 5y - 2z, -3x + y, x + 4y + 4z)$.

Montrons que $f \in GL(\mathbb{R}^3)$.

Tout d'abord, montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par définition.

Montrons que f est linéaire.

Pour tout u et v de $\mathbb{R}^3$ et λ réel : $f(\lambda u + v) = (2(\lambda x + x') + 5(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z')), -3(\lambda x + x') + \lambda y + y', \lambda x + x' + 4(\lambda y + y') + 4(\lambda z + z')) = \lambda(2x + 5y - 2z, -3x + y, x + 4y + 4z) + (2x' + 5y' - 2z', -3x' + y', x' + 4y' + 4z') = \lambda f(u) + f(v)$.

Donc f est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons $\ker(f)$.

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 5y - 2z = 0, -3x + y = 0, x + 4y + 4z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Donc f est injective (donc bijective) et finalement $f \in GL(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 8. exo 3-9 et 3-11

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[x], f(P)(x) = (x - 1)P'(x) + 3P(x)$.

Déterminons la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est (P_0, P_1, P_2) avec $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2$.

D'où : $f(P_0)(x) = (x - 1) \times 0 + 3 \times 1 = 3 = 3.P_0(x), f(P_1)(x) = (x - 1) \times 1 + 3x = 4x - 1 = -1.P_0(x) + 4.P_1(x),$

$f(P_2)(x) = (x - 1) \times (2x) + 3x^2 = 5x^2 - 2x = -2.P_1(x) + 5.P_2(x)$.

Par conséquent la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire supérieure sans zéros sur la diagonale donc A est inversible.

f est donc bijective.

Exercice 9. exo 3-10

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = AX - XB$.

Déterminons la matrice A de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $(E) = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule les images par f des vecteurs de la base canonique que l'on exprimera dans cette base :

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1}$$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + 2E_{1,2}.$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} - E_{2,1}.$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,2} - E_{2,1} - E_{2,2}.$$

D'où la matrice de f dans la base canonique (E) :

$$A = \text{Mat}(f)_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. exo 3-12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A .

Par calcul direct on a : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Puis $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$ Ainsi $P(A) = 0$ et P est bien un polynôme annulateur de A .

Exercice 11. 3-13

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P(x) = x^2 + 2x - 3$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A .

Par calcul direct on a : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ Puis $P(A) = A^2 + 2A - 3I_3 = O_3$ Ainsi $P(A) = 0$ et P est bien un polynôme annulateur de A .

De $A^2 + 2A - 3I_3 = O_3$ on en tire que :
 $A(A + 2I_3) = 3I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}A(A + 2I_3) = I_3$.

D'où A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$.

Exercice 12. exo 3-14

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une base de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Donnons $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(f)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et unique donc libre et étant générateur c'est une base de $\text{Ker}(A)$.

Pour avoir $\text{Ker}(f)$ qui est un sev de E on écrit en ligne les coordonnées obtenues :
 $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Exercice 13. exo 3-15 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donnons

$\text{Im}(J)$ et $\text{Im}(f)$.

Pour avoir $\text{Im}(J)$, il suffit de lire les colonnes de J : on a $C_1 = C_2 \neq C_3$.
Avec C_1 et C_3 non colinéaires donc formant une famille libre.

$$\text{Ainsi } \text{Im}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Pour avoir, $\text{Im}(f)$ on écrit en lignes les vecteurs colonnes :
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 2))$

Exercice 14. exo 3-16 Discuter sans calcul de l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A \text{ est non inversible car toutes les colonnes sont identiques.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ non inversible car une colonne de zéro}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ non inversible car } C_1 = C_3.$$

Exercice 15. exo 3-17

Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X - 1)^2$,

une autre base de cet espace. Déterminons la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

D'après le cours il suffit d'écrire en colonne les coordonnées de vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On utilise aussi le fait que $R_0(x) = 1$, $R_1(x) = -1 + x$ et $R_2(x) = 1 - 2x + x^2$,

$$\text{D'où } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P étant la matrice de passage entre les deux bases $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est donc inversible et on sait d'après le cours que la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donnée par $Q = P^{-1}$.

$$\text{On inverse } P \text{ et on trouve par réduite de Gauss que } Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16. exo 3-18 Reprenons l'exo 15. Déterminons à l'aide de la proposition précédente les coordonnées du polynôme $R(X) = 4X^2 - 3X + 7$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $R(x) = 4x^2 - 3x + 7$. Pour avoir ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, on utilise la formule de changement de base, en notant X le vecteur colonne associé à R dans $\mathcal{B}$, X' le vecteur colonne associé à R dans $\mathcal{B}'$:

$$X' = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \cdot X.$$

$$\text{D'où : } X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ D'où } R(x) = 4x^2 - 3x + 7 \text{ s'écrit dans la base } \mathcal{B}' \text{ par : } R'(x) = 8 + 5x + 4x^2.$$

Exercice 17. exo 3-19

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(ax^2 + bx + c) = ax^2 - (b + 4a)x + 6a + 4b + 3c$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les deux bases de l'exo 15. Déterminons la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $P_0(x) = 1, a = b = 0, c = 1, P_1(x) = x, a = c = 0, b = 1$ et enfin $P_2(x) = x^2, a = 1, b = c = 0$.

D'où : $f(P_0)(x) = 3 = 3P_0(x), f(P_1)(x) = -x + 4 = 4P_0(x) - P_1(x), f(P_2)(x) = x^2 - 4x + 6 = 6P_0(x) - 4P_1(x) + P_2(x)$.

Ainsi la matrice de M de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ dans l'exo 15 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et son inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a la formule de changement de base :

$$M = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}MP, \text{ d'où on trouve } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$